Közvetett mérés hibája, Gauss-féle hibaterjedés

Tegyük fel, hogy meg akarjuk határozni egy ϕ mennyiség értékét, melyet nem tudunk közvetlenül mérni, de ϕ függ az x, y, ... mennyiségektől: $\phi = \phi(x, y, \ldots)$, amelyek viszont közvetlenül mérhetők. A mérési eredmények alapján ismertek az x, y, ... mért mennyiségek várható értékének becslésére szolgáló középértékek ($\bar{x}$, $\bar{y}$, ...), és egy adott P konfidenciaszintre vonatkozó hibaintervallumok (Δx, Δy, ...):

$x = (\bar{x} \pm \Delta x)$; $y = (\bar{y} \pm \Delta y)$; ... (ezek a hibaintervallumok azonos konfidenciaszintre vonatkoznak)

Hogyan függ ϕ várható értéke és hibaintervalluma az x,y,z,... várható értékétől és hibaintervallumától?

$\phi = (\bar{\phi} \pm \Delta\phi) = ?$

A ϕ mennyiség várható értékének becslése:

$$\bar{\phi} = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \ldots)$$

(azaz a függvénybe behelyettesítjük a középértékeket)

A ϕ mennyiség hibaintervallumára szolgáló becslés (ugyanazon a konfidenciaszinten, amilyen konfidenciaszintre az egyes mennyiségek hibaintervallumai ismertek):

$$\Delta\phi = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y},\ldots} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y},\ldots} \cdot \Delta y\right)^2 + \ldots}$$

(azaz vesszük a $\phi = \phi(x, y,\ldots)$ függvény parciális deriváltját sorra az egyes változói szerint, abba behelyettesítjük a **középértékeket**, megszorozzuk az adott mennyiség hibaintervallumával, majd ezeket a tagokat négyzetre emeljük, összeadjuk, és gyököt vonunk belőle)

(A fenti képlet akkor érvényes, ha az x, y, ... mennyiségek független mennyiségek; ez akkor lehet fontos szempont, ha több lépésben szeretnénk a hibaintervallumot számolni.)

Példa. Van két kupac ellenállásunk:

$R_1 = (100{,}0 \pm 2{,}1)\ \Omega$, $R_2 = (400{,}0 \pm 4{,}3)\ \Omega$,

a hibaintervallum mindkét esetben P = 99%-os konfidenciaszintre van megadva.

A. Mindkét kupacból egyet-egyet véletlenszerűen kiválasztva sorosan kapcsoljuk őket.

Mennyi lesz a soros eredő várható értéke és hibaintervalluma ugyancsak 99%-os konfidenciaszintre?

Megoldás:

$\bar{R}_1 = 100{,}0\ \Omega$; $\bar{R}_2 = 400{,}0\ \Omega$; $\Delta R_1 = 2{,}1\ \Omega$; $\Delta R_2 = 4{,}3\ \Omega$.

A soros eredő számítására szolgáló képlet: $R_{soros}(R_1,R_2) = R_1 + R_2$.

A soros eredő várható értéke

$$\bar{R}_{soros} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 100{,}0 + 400{,}0 = 500{,}0\ \Omega.$$

Az $R_{soros}(R_1,R_2) = R_1 + R_2$ függvény parciális deriváltja R_1 ill. R_2 szerint

$$\frac{\partial R_{soros}}{\partial R_1} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial R_{soros}}{\partial R_2} = 1.$$

A soros eredő ellenállás hibaintervalluma

$$\Delta R_{soros} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{soros}}{\partial R_1}\cdot\Delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_{soros}}{\partial R_2}\cdot\Delta R_2\right)^2} = \sqrt{(1\cdot 2{,}1)^2+(1\cdot 4{,}3)^2} = 4{,}785\ [\Omega]$$

Tehát a soros eredő értéke az adott P = 99%-os konfidenciaszinten az

R_{soros} = (500,0 $\pm$ 4,8) Ω intervallumba esik.

B. Mindkét kupacból egyet-egyet véletlenszerűen kiválasztva párhuzamosan kapcsoljuk őket.

Mennyi lesz a párhuzamos eredő várható értéke és hibaintervalluma az adott konfidenciaszinten?

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\frac{1}{R_{párh}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Ez az összefüggés alkalmas a párhuzamos eredő várható értékének kiszámolására, de a hibaintervallum számolásához szükséges parciális deriválás miatt ezt az összefüggést rendezni kell az $R_{párh}$ mennyiségre:

$$R_{párh}(R_1,R_2) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\ .$$

A párhuzamos eredő várható értéke

$$\overline{R}_{párh} = \frac{100{,}0 \cdot 400{,}0}{100{,}0 + 400{,}0} = 80{,}0\ \Omega.$$

Az $R_{párh}(R_1,R_2) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ függvény parciális deriváltja R_1 szerint:

$$\frac{\partial R_{párh}}{\partial R_1} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2 \cdot 1}{(R_1 + R_2)^2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2,$$

és hasonlóan R_2 szerint

$$\frac{\partial R_{párh}}{\partial R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2.$$

Ezek értéke az $\overline{R}_1$ = 100,0 Ω és $\overline{R}_2$ = 400,0 Ω középértékek behelyettesítésével

$$\frac{\partial R_{párh}}{\partial R_1} = \left(\frac{400{,}0}{100{,}0 + 400{,}0}\right)^2 = 0{,}64 \qquad \Delta R_1 = 2{,}1\ \Omega$$

$$\frac{\partial R_{párh}}{\partial R_2} = \left(\frac{100{,}0}{100{,}0 + 400{,}0}\right)^2 = 0{,}04 \qquad \Delta R_2 = 4{,}3\ \Omega$$

A párhuzamos eredő ellenállás hibaintervalluma

$$\Delta R_{párh} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{párh}}{\partial R_1}\cdot\Delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_{párh}}{\partial R_2}\cdot\Delta R_2\right)^2} = \sqrt{(0{,}64\cdot 2{,}1)^2+(0{,}04\cdot 4{,}3)^2} = 1{,}355\ [\Omega].$$

Tehát a párhuzamos eredő értéke az adott P = 99% konfidenciaszinten az

$R_{párh}$ = (80,0 $\pm$ 1,36) Ω

intervallumba esik.

Gyakorló feladatok

1. Egy test átlagsebességét szeretnénk kiszámolni. Mérések alapján meghatároztuk, hogy a test egy $s = (28{,}65 \pm 0{,}42)$ m utat $t = (6{,}72 \pm 0{,}134)$ s alatt tesz meg (mindkét mérés azonos konfidenciaszintre vonatkozott). Határozzuk meg a test átlagsebességét az s és t mérésének konfidenciaszintjével azonos valószínűségű konfidenciaintervallummal együtt!

Megoldás:

Az átlagsebesség:

$$v = s / t.$$

A várható értéke

$$\bar{v} = 28{,}65 / 6{,}72 = 4{,}263 \text{ m/s}.$$

A $v = s/t$ függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t} = \frac{1}{6{,}72} = 0{,}1488 \text{ 1/s}, \qquad \Delta s = 0{,}42 \text{ m};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{s}{t^2} = -\frac{28{,}65}{6{,}72^2} = 0{,}6344 \text{ m/s}^2, \qquad \Delta t = 0{,}134 \text{ s}.$$

A konfidenciaintervallum:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial s}\cdot\Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\Delta t\right)^2} = \sqrt{(0{,}1488\cdot0{,}42)^2 + (0{,}6344\cdot0{,}134)^2} = 0{,}1055 \text{ m/s},$$

tehát

$$v = (4{,}26 \pm 0{,}106) \text{ m/s}.$$

2. $E = (24{,}06 \pm 0{,}38)$ V elektromotoros erejű telepet terhelünk két sorba kötött ellenállással, az egyik $R_1 = (145{,}6 \pm 3{,}2)\ \Omega$, a másik $R_2 = (380{,}4 \pm 6{,}0)\ \Omega$ ellenállású (az értékek azonos konfidenciaszinten vannak meghatározva). Mekkora lesz a mért áram értéke?

Megoldás:

Az áram értéke:

$$I = E / (R_1 + R_2).$$

A várható értéke

$$\bar{I} = 24{,}06/(145{,}6+380{,}4) = 0{,}04574 \text{ A} = 45{,}74 \text{ mA}.$$

Az $I = E / (R_1 + R_2)$ függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{145{,}6+380{,}4} = 1{,}901\cdot10^{-3}\ 1/\Omega, \qquad \Delta E = 0{,}38 \text{ V};$$

$$\frac{\partial I}{\partial R_1} = -\frac{E}{(R_1 + R_2)^2} = -\frac{24{,}06}{(145{,}6+380{,}4)^2} = -8{,}696\cdot10^{-5}\ \text{V}/\Omega^2 = -8{,}696\cdot10^{-5}\ \text{A}/\Omega, \qquad \Delta R_1 = 3{,}2\ \Omega;$$

$$\frac{\partial I}{\partial R_2} = \frac{\partial I}{\partial R_1} = -8{,}696\cdot10^{-5}\ \text{A}/\Omega, \qquad \Delta R_2 = 6{,}0\ \Omega.$$

A konfidenciaintervallum:

$$\Delta I = \sqrt{\left(1{,}901\cdot10^{-3}\cdot0{,}38\right)^2 + \left(-8{,}696\cdot10^{-5}\cdot3{,}2\right)^2 + \left(-8{,}696\cdot10^{-5}\cdot6{,}0\right)^2} = 9{,}336\cdot10^{-4} \text{ A} = 0{,}9336 \text{ mA},$$

tehát

$$I = (45{,}74 \pm 0{,}93) \text{ mA}.$$

4. Hatszor megmérjük egy telep elektromotoros erejét, a kapott eredmények:

12,1 12,2 11,9 12,2 11,7 11,9 [V]

a) Adjuk meg azt az intervallumot, melybe a telep elektromotoros ereje 95% valószínűséggel esik!

b) A telepet terheljük egy R ellenállással, és mérjük a terhelésen folyó I áramerősséget. (Az ampermérő belső ellenállása elhanyagolható.) Szintén 95%-os konfidenciaszintnél

$R = (61{,}2 \pm 1{,}22)\ \Omega$, $I = (0{,}1460 \pm 0{,}0029)$ A.

Határozzuk meg a fentiekből a telep R_b belső ellenállását és annak hibáját!

Megoldás:

4.a) $\bar{E} = 12{,}0$ V.

$$s_{\bar{E}} = \sqrt{\frac{(12{,}1-12{,}0)^2 + (12{,}2-12{,}0)^2 + (11{,}9-12{,}0)^2 + (12{,}2-12{,}0)^2 + (11{,}7-12{,}0)^2 + (11{,}9-12{,}0)^2}{6\cdot 5}} = 0{,}08165 \text{ V}.$$

A Student-táblázatból $t(n=6, P=0{,}95) = 2{,}571$;

$\Delta E = t \cdot s_{\bar{E}} = 2{,}571\cdot 0{,}08165 = 0{,}2099$ V;

tehát $P = 95\%$-os konfidenciaszinten $E = (12{,}00 \pm 0{,}21)$ V.

4.b) $I = E / (R + R_b)$ $\rightarrow$ az R_b belső ellenállás E-vel, R-rel és I-vel kifejezve

$R_b = E/I - R$.

Az átlagos értéke

$\overline{R_b} = 12{,}00 / 0{,}1460 - 61{,}2 = 20{,}99\ \Omega$.

A parciális deriváltak

$$\frac{\partial R_b}{\partial E} = \frac{\partial (E/I-R)}{\partial E} = \frac{1}{I} = \frac{1}{0{,}1460} = 6{,}849 \ \ 1/\text{A}, \qquad \Delta E = 0{,}21 \text{ V};$$

$$\frac{\partial R_b}{\partial R} = \frac{\partial (E/I-R)}{\partial R} = -1, \qquad \Delta R = 1{,}22\ \Omega;$$

$$\frac{\partial R_b}{\partial I} = \frac{\partial (E/I-R)}{\partial I} = -\frac{E}{I^2} = -\frac{12{,}00}{0{,}1460^2} = -563{,}0 \text{ V/A}^2 = -563{,}0\ \Omega/\text{A}, \qquad \Delta I = 0{,}0029 \text{ A}.$$

A konfidenciaintervallum

$$\Delta R_b = \sqrt{\left(\frac{\partial R_b}{\partial E}\cdot\Delta E\right)^2 + \left(\frac{\partial R_b}{\partial R}\cdot\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial R_b}{\partial I}\cdot\Delta I\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(6{,}849\cdot 0{,}21)^2 + (-1\cdot 1{,}22)^2 + (-563{,}0\cdot 0{,}0029)^2} = 2{,}495\ \Omega.$$

Tehát a belső ellenállás 95%-os konfidenciaszinten

$R_b = (21{,}0 \pm 2{,}5)\ \Omega$.