5. VÁLTAKOZÓ ÁRAM

<u>A gyakorlat célja</u> a soros rezgőkör segítségével megismerkedni a váltóáramú hálózatokra jellemző áram- és feszültségviszonyokkal, valamint a rezonancia jelenségével, amely sokszor előfordul a mérnöki gyakorlatban (mechanikus rezgések[1] gépeken, spektroszkópiai módszerek, adatátvitel).
<u>Előismeret:</u>
- Ohm-törvény;
- kondenzátor feszültsége, kapacitása;
- önindukciós tekercs feszültsége, önindukciós együtthatója;
- Kirchhoff-törvények;
- harmonikus függvények;
- komplex számok.

ELMÉLET
VÁLTÓÁRAMÚ HÁLÓZATSZÁMÍTÁS

1. Váltóáram, váltófeszültség

Váltófeszültségről, illetve **váltóáramról** akkor beszélünk, ha a feszültség, illetve az áramerősség harmonikus függvénye az időnek, azaz

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)\ [V]\ , \quad \text{ill.} \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I)\ \ [A]\ . \tag{1}$$

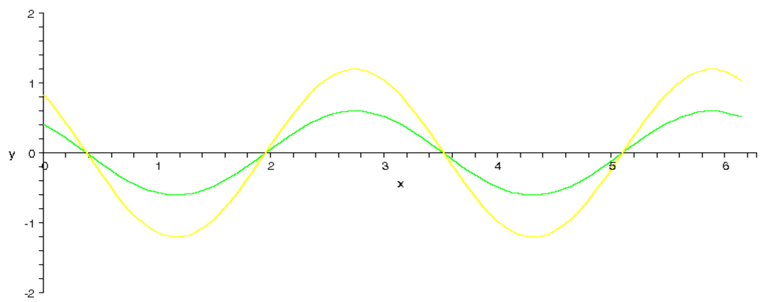
Itt

U_0 [V] ill. I_0 [A] a feszültség ill. az áram amplitúdója;
$\omega t + \varphi_U$ ill. $\omega t + \varphi_I$ a fázis [–];
φ_U ill. φ_I a fázisállandó vagy kezdőfázis [–].
ω a körfrekvencia [s^{-1}]; $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, ahol
ν a frekvencia [Hz], $\nu = 1/T$;
T a periódusidő [s].

2. Ellenállás, kondenzátor és önindukciós tekercs váltóáramú hálózatban

Egy R **ellenállás**on az Ohm-törvény időfüggő áram ill. feszültség esetén is érvényes, a feszültség minden pillanatban arányos a pillanatnyi áramerősséggel:

$$U_R(t) = R\, I(t) \tag{2}$$



1. ábra. *Áram és feszültség ohmos ellenálláson.*
Zöld: I(t), sárga: $U_R(t)$

Az áram és a feszültség azonos fázisban vannak, $U_R/I = R = \text{konst.}$

[1] Rezonancia mechanikai rezgésnél: https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k

Kondenzátor és önindukciós tekercs esetén azonban nem ilyen egyszerű U(t) és I(t) viszonya, a feszültség és az áram hányadosa időben nem állandó.

A **kondenzátor**on eső feszültség a rajta lévő töltéssel arányos:

$$U_C = \frac{1}{C} Q \,.$$

Itt C a kondenzátor kapacitása, egysége a Farad [F].
Váltóáramú hálózatban a kondenzátoron eső feszültség pillanatnyi értéke tehát nem a kondenzátoron átfolyó áram pillanatnyi értékével arányos, hanem a kondenzátoron levő töltés pillanatnyi értékével:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} Q(t) \,.$$

Tudjuk, hogy az áram az adott felületen átmenő töltésmennyiség deriváltja, vagyis a töltés az átfolyó áram integrálja:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow \quad Q(t) = \int I(t)\, dt \,,$$

tehát a kondenzátoron eső feszültség az áram integráljával (nem az aktuális értékével) arányos:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_C(t)\, dt \,. \tag{3}$$

Írjuk fel az áramot $I_C(t) = I_0 \cos(\omega t)$ alakban (φ_I=0 választással), és integráljunk:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_0 \cos(\omega t)\, dt = \frac{1}{\omega C} I_0 \sin(\omega t).$$

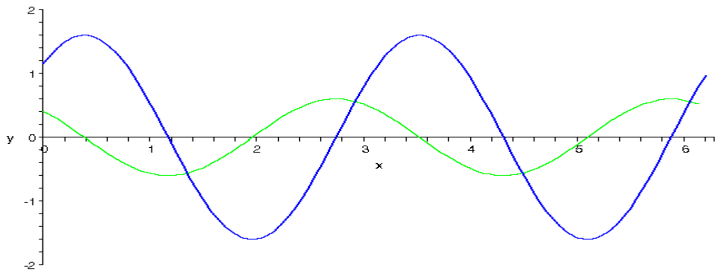
Érdemes átírni a $\sin(\omega t)$ -t $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ alakra:

$$U_C(t) = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \tag{4}$$

A kondenzátoron eső feszültség frekvenciája megegyezik az araméval, de nincs azonos fázisban a rajta átfolyó árammal, a feszültség **π/2 fázissal késik az áramerősséghez képest**.
Kondenzátoron a feszültség és az áram pillanatnyi értékének hányadosa nem konstans!

A feszültség **amplitúdója** $\mathbf{U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0}$, vagyis

a feszültség és az áram amplitúdója közti összefüggés $\mathbf{U_{C0} / I_0 = \frac{1}{\omega C}}$.



2. ábra. *Áram és feszültség kondenzátoron.*
Zöld: $I_C(t)$, kék: $U_C(t)$

Önindukciós tekercs: Ha a tekercsben folyó áram megváltozik, akkor az általa körülhatárolt területen a ϕ mágneses fluxus is megváltozik (Ampere-féle gerjesztési törvény), és a tekercsben feszültség indukálódik (Faraday-féle indukciós törvény). Ez az indukált feszültség a mágneses fluxus változási sebességével, a fluxus pedig az áramerősséggel arányos:

$$U_L(t) = \frac{d\,\phi(t)}{dt} = L \frac{d\,I_L(t)}{dt} \,. \tag{5}$$

Itt L a tekercs önindukciós együtthatója, egysége a Henry [H].
Váltóáramú hálózatban a tekercsen eső feszültség pillanatnyi értéke tehát nem a tekercsen átfolyó áram pillanatnyi értékével arányos, hanem az áram deriváltjával, és ezért – hasonlóan a kondenzátorhoz – a feszültség és az áram pillanatnyi értékének hányadosa nem konstans.

$I_C(t) = I_0 \cos(\omega t)$ alakban felírt váltóáram esetén a tekercsen a feszültség

$$U_L(t) = L\frac{d\, I_0 \cos(\omega t)}{dt} = -\,\omega L\, I_0 \sin(\omega t)\,.$$

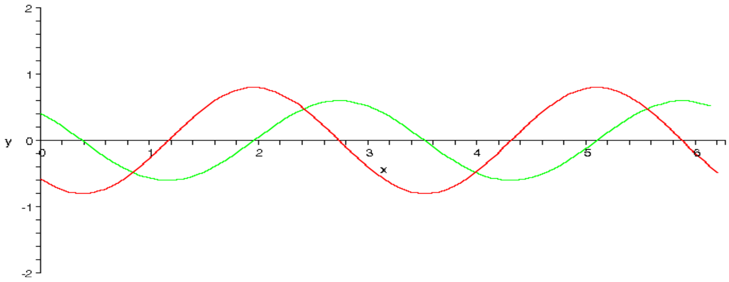
A $-\sin(\omega t)$ átírható $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ alakra:

$$U_L(t) = \omega L\, I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}). \qquad (6)$$

A tekercsen eső feszültség frekvenciája megegyezik az áraméval, de nincs azonos fázisban a rajta átfolyó árammal, a feszültség **π/2 fázissal siet az áramerősséghez képest**.

A feszültség **amplitúdója** $\mathbf{U_{L0} = \omega L\, I_0}$, vagyis

a feszültség és az áram amplitúdója közti összefüggés $\mathbf{U_{L0} / I_0 = \omega L}$.

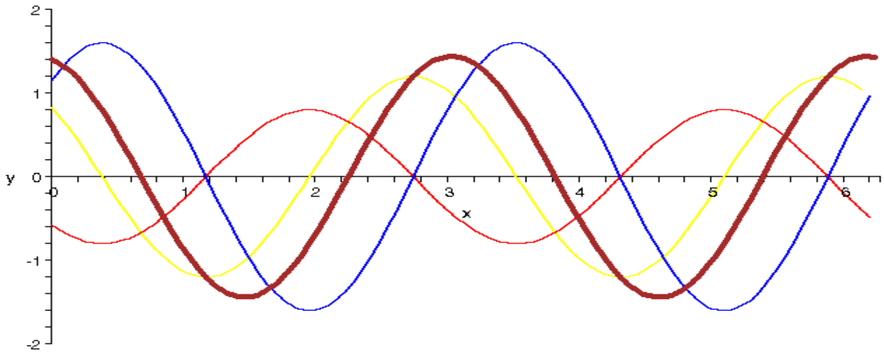


3. ábra. *Áram és feszültség önindukciós tekercsen.*
Zöld: $I_L(t)$, piros: $U_L(t)$

3. Sorosan kötött kondenzátor, ellenállás és tekercs

Képzeljük el, hogy sorosan kötünk egy ellenállást, egy kondenzátort és egy tekercset. Mivel sorosan vannak kötve, tudjuk, hogy ugyanaz az áram folyik át rajtuk. Az előző fejezetben felírtuk, hogyan függ az egyes áramköri elemeken a feszültség az áramtól. A három sorosan kötött áramköri elemen eső teljes feszültség az egyes feszültségek (U_R, U_C, U_L) összege (Kirchhoff II. törvénye). Az összeadandó feszültségek fázisa azonban eltérő (az ellenálláson az árammal azonos fázisban van, a kondenzátoron késik π/2-vel, a tekercsen siet π/2-vel az áramhoz képest), ezért az eredő feszültség amplitúdója és fázisa elég hosszadalmas számításokkal határozható meg[2].

A 4. ábra mutatja a fenti három áramköri elemen eső feszültséget és az összegüket:



4. ábra. *Sorosan kötött ellenállás, kondenzátor és tekercs feszültsége, és a három elemen eső feszültség összege.*
Sárga: $U_R(t)$, kék: $U_C(t)$, piros: $U_L(t)$, barna: $U_{RLC}(t)$ eredő feszültség.

[2] Két harmonikus függvény összege: https://www.geogebra.org/m/tktcvmkz
A jelen mérés szempontjából csak az azonos frekvenciájú függvények összege érdekes. A c ill. γ értékével lehet állítani az egyes összeadandók fázisállandóját, azaz ezekkel lehet beállítani a két összeadandó közötti fáziskülönbséget. Látható, hogy az eredő fázisa és amplitúdója is függ az összeadandók fázisától.

Váltóáramú hálózatban a Kirchhoff-törvények (csomóponti és huroktörvény) csak a *pillanatnyi* értékekre alkalmazhatók, az amplitúdókra nem! Az eredő áramok ill. feszültségek amplitúdóját a rész-áramok ill. -feszültségek amplitúdójából csak a *fázisok ismeretében* lehet meghatározni. Formális hasonlóság hozható viszont létre a váltó- és egyenáramú hálózatszámítás között az alábbi módszerrel.

4. Komplex mennyiségek bevezetése

Mechanikában tanultuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás tekinthető az egyenletes körmozgás (a körmozgást végző pontba mutató, egyenletes szögsebességgel forgó helyvektor végpontja) vetületének. A harmonikus időfüggést mutató feszültségekkel és áramokkal való számolást egyszerűsíti, ha bevezetünk olyan egyenletes szögsebességgel forgó vektorokat, amiknek a vetülete adja a harmonikus időfüggést. Ezek a vektorok komplex mennyiségek.

Egy komplex számot megadhatunk az R valós és az X képzetes részével:

$\tilde{Z} = R + i\,X$,

vagy a Z abszolút értékével és a φ fázisával:

$\tilde{Z} = Z\,e^{i\varphi}$ (Euler alak).

A φ fázis a valós tengellyel bezárt szög.

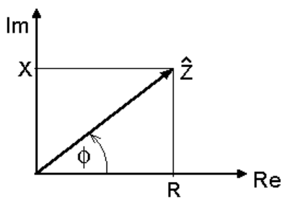
Szorzáskor az abszolút értékek szorzódnak, és a fázisok összeadódnak.

Az 5. ábráról látható, hogy

$$\left\{ \begin{matrix} Z = \sqrt{R^2+X^2} \\ \mathrm{tg}\varphi = X/R \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} R = Z\cos\varphi \\ X = Z\sin\varphi \end{matrix} \right\},$$

vagyis $\tilde{Z}$ felírható

$\tilde{Z} = Z\cos\varphi + i\,Z\sin\varphi$ alakban is.



***5. ábra**. Komplex mennyiség*

Feltesszük, hogy a feszültség ill. az áramerősség komplex értékű függvénye az időnek:

$$\tilde{U} = U_0\,e^{i(\omega t+\varphi_U)} \quad \text{ill.} \quad \tilde{I} = I_0\,e^{i(\omega t+\varphi_I)}. \tag{7}$$

A feszültség és az áram ω szögsebességgel forgó vektorok a komplex síkon. Ennek fizikai értelme nincs, de ha vesszük $\tilde{U}$ ill. $\tilde{I}$ valós részét, az már a közönséges harmonikus időfüggés[3]:

$$\mathrm{Re}(\tilde{U}) = U_0\cos(\omega t+\varphi_U), \quad \text{ill.} \quad \mathrm{Re}(\tilde{I}) = I_0\cos(\omega t+\varphi_I)\,. \tag{8}$$

A komplex mennyiségek bevezetésével a váltóáramú hálózatszámítás visszavezethető az egyenáramú hálózatszámításra, a Kirchhoff-törvények érvényesek maradnak a komplex áramokkal és feszültségekkel felírva. A komplex alakkal elvégezhetjük a feszültségek és áramok összeadását, konstanssal való szorzását, differenciálását és integrálását. A komplex feszültségek ill. áramok valós része megadja az adott mennyiség időfüggését.[4]

[3] Ebben a szimulációban látható, hogy a komplex síkon forgó vektorok vetületeként megkapjuk a harmonikus időfüggést, és hogy a forgó vektorok közötti fáziskülönbség adja a harmonikus függvények fázisának különbségét.

[4] Időfüggő feszültségek és forgó vektorok soros RLC körben:
https://www.geogebra.org/m/whek2dtv Állítható R, L és C, valamint a generátor ε_A feszültsége és ω_d körfrekvenciája. Érdemes kipróbálni, hogy a V_L és V_C feszültségamplitúdók nem csak L és C értékétől függnek, hanem a körfrekvenciától is. Az ε generátorfeszültség a V_R, V_L és V_C feszültségek vektori összege. A V_R, V_L és V_C vektorok egymáshoz képest állandó fázist tartanak, de a nagyságuk változásával az ε feszültségnek nem csak a nagysága változik, hanem a fázisa is (a V_R, V_L és V_C feszültségvektorokkal bezárt szöge).
https://www.geogebra.org/m/Jnh64cWZ Hasonló az előzőhöz, de a vektorok rögzített állapotban vannak.
https://www.geogebra.org/m/fcvfn5tW Hasonló az előzőhöz, csak az ε generátorfeszültség helyett az áram I_0 amplitúdóját lehet állítani. Az áram a generátorfeszültséggel van azonos fázisban. A vektorokat kézzel lehet forgatni az időfüggő jelen húzható pöttyel.

A komplex feszültségekkel és áramokkal a kondenzátoron, ill. az önindukciós tekercsen eső feszültség és rajtuk átfolyó áram közötti összefüggést az Ohm-törvényhez hasonló alakban tudjuk felírni, mert a komplex mennyiségek hányadosa időben állandó (mert azonos ω szögsebességgel forognak). Kondenzátor és tekercs esetében ez a konstans is komplex értékű, mivel a feszültség és az áram között fáziskülönbség van.

$$\tilde{U} / \tilde{I} = (U_0\, e^{i(\omega t+\varphi_U)}) / (I_0\, e^{i(\omega t+\varphi_I)}) = (U_0/I_0)\, e^{i((\omega t+\varphi_U)-(\omega t+\varphi_I))} = (U_0/I_0)\, e^{i(\varphi_U-\varphi_I)} .$$

Ezt a konstanst $\tilde{Z}$ -vel jelöljük és **impedanciának** nevezzük.

$$\tilde{Z} = (U_0/I_0)\, e^{i(\varphi_U-\varphi_I)} = Z_0\, e^{i\varphi} .$$

Az impedancia abszolút értéke a feszültség- és áramamplitúdó hányadosa:

$$Z_0 = U_0/I_0 ,$$

fázisa pedig a feszültség és áram fázisállandójának különbsége:

$\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ (az impedancia fázisát nem szokás indexszel ellátni).

A komplex alakban felírt Ohm-törvény tehát érvényes kondenzátorra, tekercsre, ill. ezeket tartalmazó hálózatokra is:

$$\tilde{U} = \tilde{Z}\, \tilde{I} . \qquad (9)$$

Az ellenállás, kondenzátor és tekercs impedanciáját megkapjuk, ha felírjuk az áramerősséget komplex alakban, és meghatározzuk a komplex feszültségeket (2), (3) ill. (5) mintájára:

$$\tilde{U}_R = R\, I_0\, e^{i(\omega t+\varphi_I)} = R\, \tilde{I} , \qquad (10)$$

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{C} \int I_0\, e^{i(\omega t+\varphi_I)}\, dt = \frac{1}{C}\, \frac{I_0}{i\omega}\, e^{i(\omega t+\varphi_I)} = \frac{1}{\omega C i}\, \tilde{I} , \qquad (11)$$

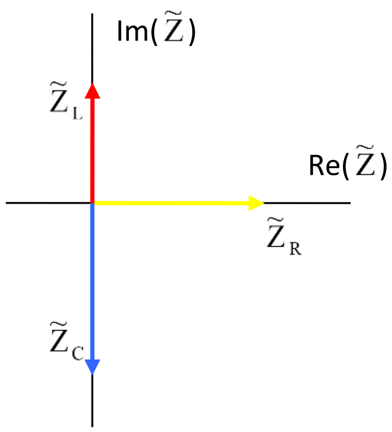
$$\tilde{U}_L = L \frac{d\, I_0\, e^{i(\omega t+\varphi_I)}}{dt} = L\, I_0\, i\omega\, e^{i(\omega t+\varphi_I)} = \omega L i\, \tilde{I} . \qquad (12)$$

Az ellenállás, a kondenzátor és a tekercs impedanciáját a (10)–(12) képletekből olvashatjuk ki.

Az ellenállás impedanciája $\tilde{Z}_R = R$. (13)
Ennek abszolút értéke R, így $U_{R,0} = R\, I_0$,
fázisa 0, vagyis a feszültség és az áram azonos fázisban vannak.

A kondenzátor impedanciája $\tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C i} = -\frac{1}{\omega C}\, i$. (14)
Ennek abszolút értéke $1/(\omega C)$, így $U_{C0} = I_0 / (\omega C)$,
fázisa $-\pi/2$, vagyis a feszültség $\pi/2$-vel késik az áramhoz képest.

A tekercs impedanciája $\tilde{Z}_L = \omega L i$. (15)
Ennek abszolút értéke ωL, így $U_{L0} = \omega L\, I_0$,
fázisa $\pi/2$, vagyis a feszültség $\pi/2$-vel siet az áramhoz képest.



6. ábra.
Ellenállás, kondenzátor és tekercs komplex impedanciája.

Ha ellenállásokból, tekercsekből és kondenzátorokból tetszőleges kétpólust építünk, a kétpólus **eredő komplex impedanciá**ja az egyenáramú hálózatoknál megismert szabályok szerint számolható ki az egyes áramköri elemek komplex impedanciájából, azaz

– soros kapcsolásnál a komplex impedanciák összeadódnak:

$$\tilde{Z}_s = \Sigma\, \tilde{Z}_i , \qquad (16)$$

– párhuzamos kapcsolásnál az egyes impedanciák reciprokának összege adja az eredő reciprokát:

$$\frac{1}{\tilde{Z}_p} = \sum \frac{1}{\tilde{Z}_i} .$$

Az eredő impedancia fázisa $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti érték lehet.

A hálózat bármely részére igaz, hogy az adott rész eredő impedanciájának a nagysága megadja az adott részen eső feszültség és átfolyó áram amplitúdójának hányadosát, a fázisa pedig a feszültség és az áram közötti fáziskülönbséget.

5. Váltóáramú teljesítmény

Periodikusan változó áram és feszültség esetén a pillanatnyi teljesítmény helyett az *átlagteljesítmény*nek van gyakorlati jelentősége. A P átlagteljesítmény a pillanatnyi teljesítménynek, azaz a pillanatnyi valós feszültség és a pillanatnyi áram szorzatának az időátlaga egy periódusra. Számoljuk ki szinuszos időfüggés esetén az átlagteljesítményt. Legyen $\varphi_I = 0$, így $\varphi_U = \varphi$.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \cos(\omega t+\varphi) \cdot I_0 \cos(\omega t)\, dt = \frac{U_0\, I_0}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t+\varphi)+\cos(\varphi)}{2}\, dt = \frac{U_0\, I_0}{2} \cos\varphi\ .$$

Szokás bevezetni az **effektív értékek**et:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

ezekkel a teljesítmény az alábbi alakba írható:

$$P = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi\ .$$

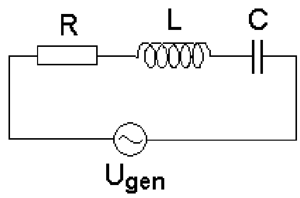
Az egyenáramú teljesítményhez képest tehát az az eltérés, hogy a váltóáramú teljesítményben megjelenik az impedancia fázisa. Ohmos ellenállásnál $\cos\varphi = \cos(0) = 1$, kondenzátornál és tekercsnél viszont $\cos\varphi = \cos(\pm\pi/2) = 0$. Ez azt jelenti, hogy váltóáram esetén teljesítmény csak az ellenállásokon disszipálódik.

6. Rezgőkörök, rezonancia

Kondenzátort és tekercset is tartalmazó hálózat esetén gyakran előfordul, hogy az eredő impedanciájának abszolút értéke a váltóáram frekvenciájának függvényében szélsőértéken megy át. Ezekben a hálózatokban a szélsőérték frekvenciáján rezonancia lép fel. A két legnevezetesebb a soros és a párhuzamos rezgőkör. A mérés során csak a **soros rezgőkörrel** fogunk foglalkozni.

7. Soros rezgőkör (soros RLC kör)

Sorba kapcsolunk
egy R ellenállást,
egy L önindukciójú tekercset és
egy C kapacitású kondenzátort, és
egy változtatható ω körfrekvenciájú (ν frekvenciájú) váltóáramú generátorra kötjük.



***7. ábra**. Soros rezgőkör*

A soros rezgőkör komplex impedanciája:

$$\tilde{Z}_{LRC} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C = R + \omega L\, i + \frac{1}{\omega C\, i} = R + \omega L\, i - \frac{1}{\omega C} i = R + (\omega L - \frac{1}{\omega C})\, i \qquad (17)$$

Az eredő impedancia az ω körfrekvencia (a ν frekvencia) függvénye.

Létezik egy ω_0 körfrekvencia, ahol $\tilde{Z}_{LRC}$ képzetes része zérus:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \qquad (18)$$

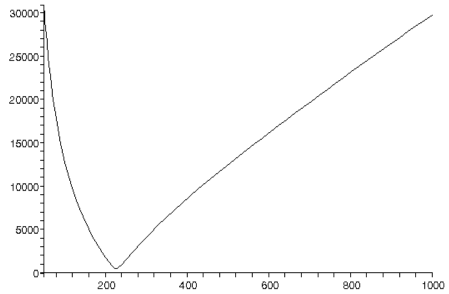
ekkor az impedancia valós, és az ohmos ellenállással egyenlő:

$$\tilde{Z}_{LRC}(\omega_0) = R\ . \qquad (19)$$

Ezen a körfrekvencián a (17) impedancia abszolút értékének,

$$Z_{LRC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

-nek minimuma van: (20)



***8. ábra**. Soros rezgőkör eredő impedanciájának frekvenciafüggése*
(R = 500 Ω, L = 5 H, C = 0,1 μF, ν = 50…1000 Hz)

Ez a körfrekvencia kifejezhető (18)-ból L és C értékével:

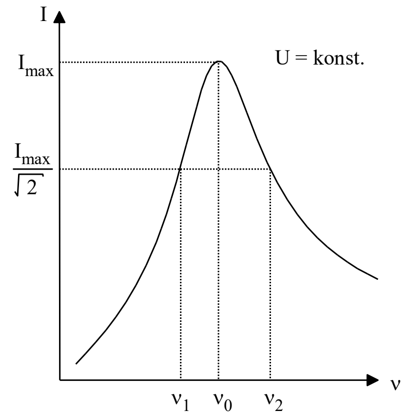
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad : \quad \text{ez a} \quad \textbf{Thomson-formula}. \qquad (21)$$

A

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (22)$$

frekvencia az áramkör **rezonanciafrekvenciája**.

Konstans feszültség mellett ennél a frekvenciánál az áram maximumon megy át, ezért a jelenséget *áramrezonanciának* nevezzük.



***9. ábra**. Soros rezgőkör rezonanciagörbéje*

A rezonanciagörbe alakját, a rezonancia élességét a Q **jósági tényezővel** jellemezzük.
Q értéke annál nagyobb, minél szűkebb az a frekvenciatartomány, ahol jelentősen megnövekedett áramokat mérhetünk.
Soros rezgőkör esetén a Q jósági tényező a rezonanciafrekvenciához tartozó egyes reaktanciák (nem ohmikus impedanciák) és az ohmikus ellenállás hányadosa:

$$Q = \frac{L\,\omega_0}{R} = \frac{1}{\omega_0 C\, R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \qquad (23)$$

(A harmadik alakot a Thomson-formula felhasználásával kapjuk.)
A jósági tényező értékét kiszámolhatjuk a rezonanciagörbéből is:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} \ , \qquad (24)$$

ahol ω_1 és ω_2 (ill. ν_1 és ν_2) az a két körfrekvencia (ill. frekvencia), amelynél az áramerősség a maximális érték $\sqrt{2}$-edére csökken (ld. 9. ábra) állandó feszültség mellett.

Hogy miért pont a maximális áram $\sqrt{2}$-edéhez tartozó frekvenciákat kell venni a Q kiszámításához? Ennek az az oka, hogy így lesz a kétféle képlettel számolva azonos a jósági tényező értéke. Ez az alábbi levezetéssel látható be.

Az ω_1 és ω_2 körfrekvenciákon $I_1 = I_2 = I_{max}/\sqrt{2}$ és U_{LRC} = konst. $\rightarrow$ $Z_{LRC,1} = Z_{LRC,2} = \sqrt{2}\,Z_{LRC,0} = \sqrt{2}\,R$,
az eredő impedancia abszolút értéke $\sqrt{2}$-szerese a rezonanciafrekvenciához tartozó impedanciának, azaz R-nek.
Ez azt jelenti, hogy ekkor az eredő reaktancia abszolút értéke megegyezik az ohmikus ellenállással:

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega c}\right| = R, \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \quad \text{és} \quad \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \ .$$

A Thomson-formulából (20) $1/C = \omega_0^2 L$, ennek behelyettesítésével $\frac{\omega_0^2 L}{\omega_1} - \omega_1 L = R$ és $\omega_2 L - \frac{\omega_0^2 L}{\omega_2} = R$;
majd ω_1-gyel ill. ω_2-vel szorozva, és a két egyenletet összeadva

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)L = (\omega_1 + \omega_2)R, \quad \text{azaz} \quad (\omega_2 - \omega_1)(\omega_1 + \omega_2)L = (\omega_1 + \omega_2)R \rightarrow (\omega_2 - \omega_1)L = R \rightarrow L/R = 1/(\omega_2 - \omega_1)\ .$$

Ezt behelyettesítve a jósági tényezőre adott (22) formulába
$Q = \omega_0 \cdot L/R = \omega_0 / (\omega_2 - \omega_1)$, tehát beláttuk, amit akartunk.

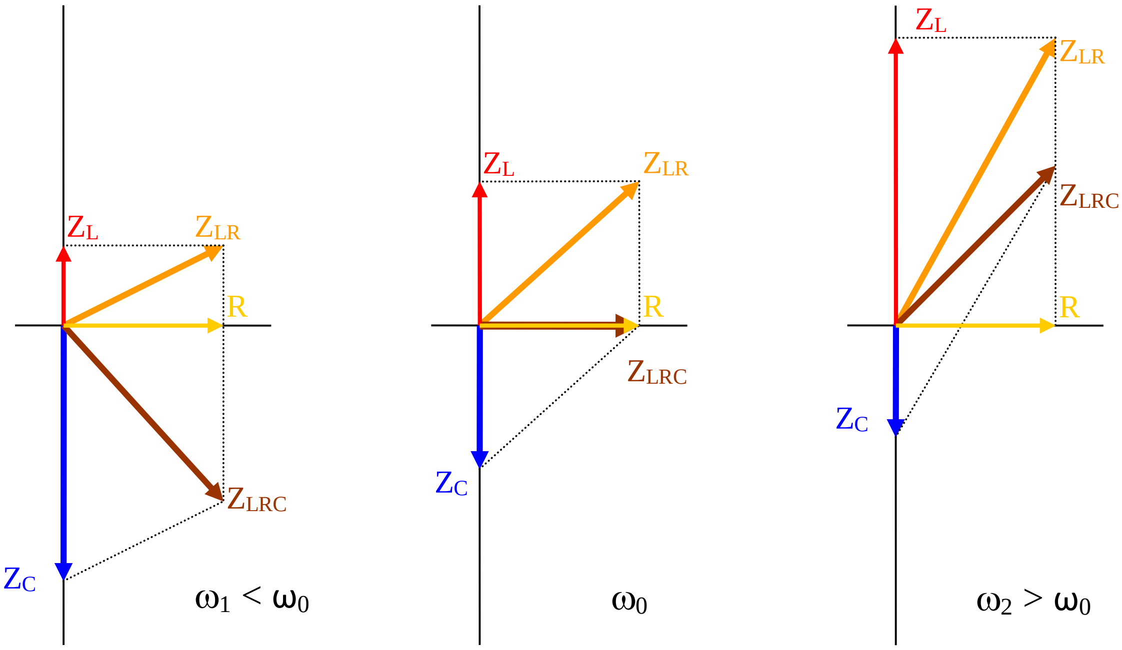
Az ω_1 ill. ω_2 körfrekvenciákon a rezgőkör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián felvett maximális teljesítménynek éppen a fele:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = I(\omega_1)^2 \cdot R = I(\omega_2)^2 \cdot R = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R = \frac{I_{max}^2\, R}{2} = \frac{P_{max}}{2}\ .$$

<u>A soros rezgőkör áramköri elemeinek komplex impedanciája a (kör)frekvencia függvényében</u>

Mivel soros kapcsolásnál az eredő impedancia az egyes impedanciák összege, ezért a komplex síkon az eredő impedancia az egyes elemek impedanciájának megfelelő vektorok eredője.

A 10. ábrán látjuk, hogyan változnak az egyes impedanciák egy soros áramkörben, ahogy nő a rákapcsolt feszültség (kör)frekvenciája. Az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor impedanciájának megfelelő komplex vektorok összegeként megkapjuk az eredő impedanciát.



10. ábra. *Kondenzátor, reális tekercs és soros eredőjük impedanciája*
3 különböző – egyre nagyobb – körfrekvencián

<u>Reális tekercs</u>

Az olyan önindukciós tekercset, amelynek ohmikus ellenállása is van, *reális* tekercsnek nevezzük. Ennek impedanciája

$\tilde{Z}_{LR} = R + \omega L\, i.$ (25)

A mérés során ilyet használunk, ezért a 10. ábrán ezt a komplex impedanciát is feltüntettük.

JEGYZŐKÖNYV BEVEZETÉS

<table>
<tr><td>a mérés elvégzésének tényleges dátuma</td><td colspan="2">az együtt dolgozó hallgatók neve</td><td>csoport-szám</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. VÁLTÓÁRAMÚ MÉRÉSEK</td><td colspan="2">a mérésvezető neve</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
</table>

1. Soros rezgőkör rezonanciagörbéjének mérése

Rajzolja le az áramkör kapcsolási rajzát és nevezze meg az egyes áramköri elemeket.
Mi a mérés célja? Milyen mennyiséget mérünk milyen mennyiség függvényében?
Írja le a mérés menetét!
Milyen mennyiségek lesznek kiszámolva a mérési adatokból?

2. Soros rezgőkör áramköri jellemzőinek mérése

Rajzolja le az áramkör kapcsolási rajzát a voltmérő háromféle bekötésével.
Írja le a mérés menetét.
Mi a mérés célja, milyen mennyiségek lesznek kiszámolva a mérési adatokból?

MÉRÉSI FELADATOK

A szükséges eszközök:

Tekercs  L, R_L

Vasmagos tekercs, ami reális tekercsként viselkedik, azaz van ohmikus ellenállása is. Az ohmikus ellenállása két részből tevődik össze:

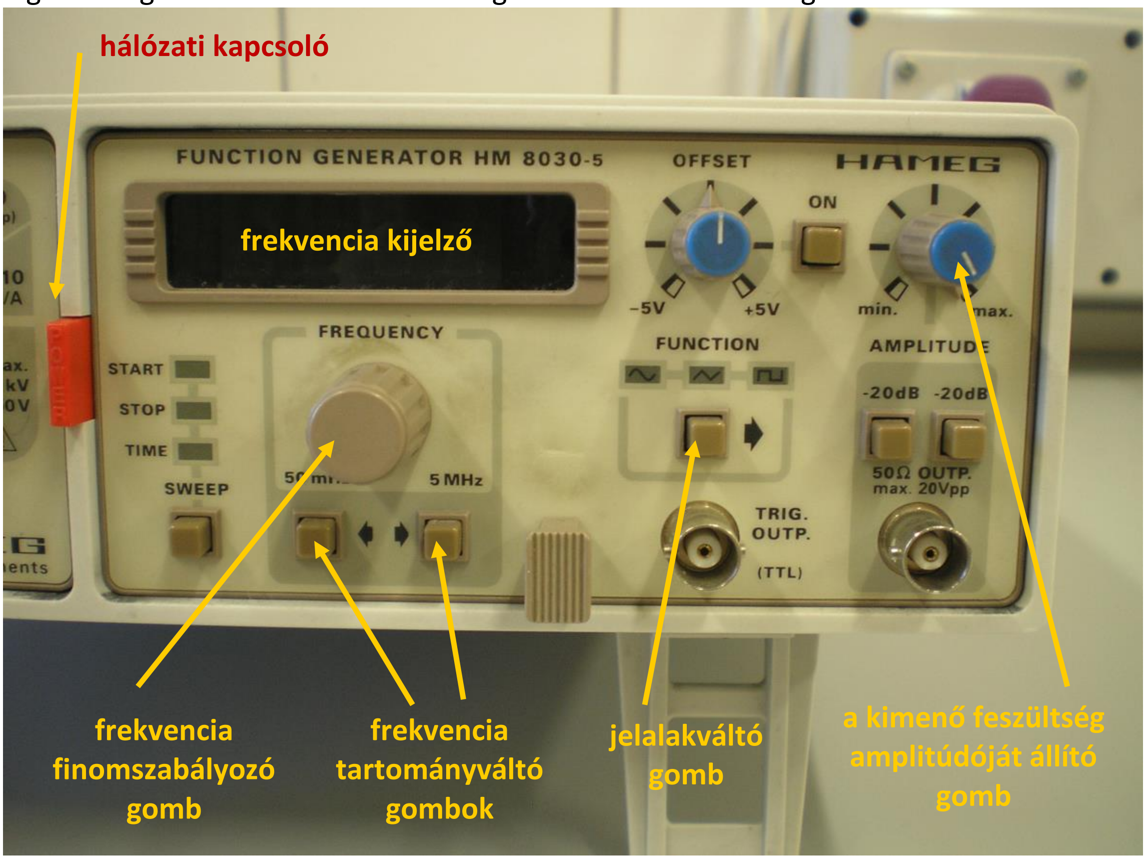
- a *rézveszteségből*, vagyis a tekercset alkotó rézhuzal ellenállásából (néhányszor tíz Ω), és
- a *vasveszteségből*, ami abból származik, hogy a váltóárammal átjárt tekercs vasmagja melegszik amiatt, hogy a változó elektromágneses térben örvényáramok jönnek létre benne. Ez az energiadisszipáció hasonló az ellenállásokon disszipálódó Joule-hőhöz, ezért modellezhető ohmikus ellenállással. A vasveszteség nagysága függ többek között a vasmag anyagi minőségétől, geometriai elrendezésétől, a frekvenciától és az áramerősségtől; a nagyságrendje kΩ.

Kondenzátor  C

A mérésnél használt kondenzátor jó közelítéssel ideálisnak tekinthető, azaz nincs ohmikus ellenállása.

Függvénygenerátor  U_{gen}

Különböző jelalakú és frekvenciájú váltakozó feszültség előállítására alkalmas generátor. Amikor szinuszos kimenetet használunk, hanggenerátorként szokás rá hivatkozni. A készülék nem ideális feszültséggenerátor abban az értelemben, hogy kapocsfeszültsége megváltozik, ha a terhelést vagy a frekvenciát megváltoztatjuk, azonban a kimenő feszültség szabályozható, és annak állításával lehetséges a rezgőkörön konstans feszültséget tartani a rezonanciagörbe felvételénél.

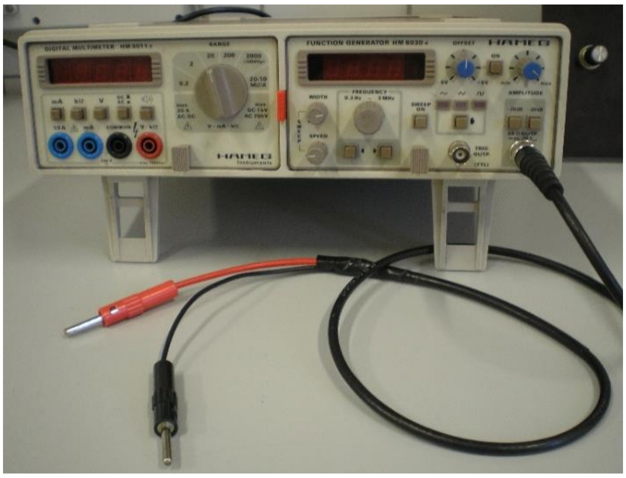


11. ábra. *A függvénygenerátor*

Digitális univerzális műszerek

Áram-, feszültség- és ellenállásmérésre alkalmasak. Szinuszos váltakozó áram esetén a műszerről leolvasható érték az effektív érték (az amplitúdó $\sqrt{2}$-e). Általános szabály, hogy egy műszert mindig a legnagyobb méréshatárba kötünk be, majd fokozatosan csökkentjük a méréshatárt a legkisebbig, amibe még belefér a mérendő érték.

A mérés során két műszert fogunk használni, egyet **ampermérő**ként, egyet **voltmérő**ként.

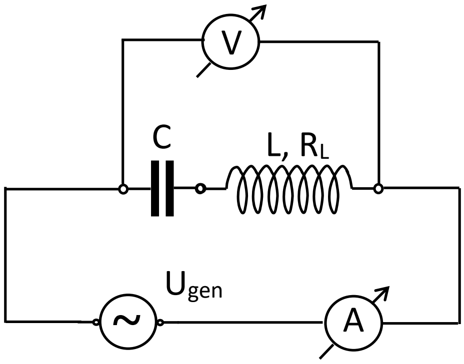


12. ábra. *Az ampermérőként használt műszer és a függvénygenerátor. A generátoron beállított feszültség a kábellel köthető rá az áramkörre.*

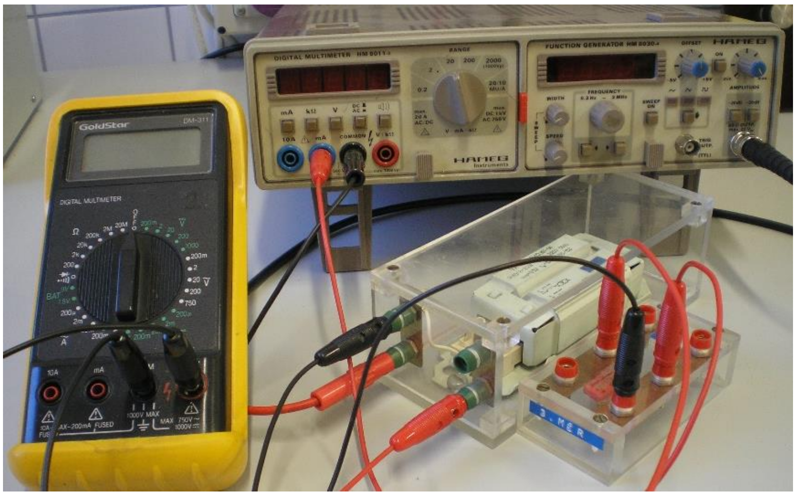
---

1. Soros rezgőkör rezonanciagörbéjének mérése

Állítsa össze a 13. ábra szerinti kapcsolást.
Először kösse sorosan a generátor kimenetét, a tekercset, a kondenzátort, és az ampermérőt.
Ezután kösse be a voltmérőt úgy, hogy a teljes rezgőkörön, vagyis a kondenzátor és a tekercs soros eredőjén eső feszültséget mérje. (Az ampermérőn eső feszültség ne legyen belemérve!)
Mielőtt az áramkörre rákapcsolná a feszültséget, ellenőriztesse a mérésvezetővel!



13. ábra. *Az összeállítandó áramkör*



14. ábra. *Az összeállított áramkör. A sárga tokos műszert használjuk feszültségmérésre.*

Mérési feladat:

1.) A rezonanciafrekvencia közelítő meghatározása tájékozódás céljából:
A hanggenerátoron állítson be szinuszos jelalakot, maximális kimenő feszültségamplitúdót és kb. 20-30 Hz frekvenciát, majd az ampermérőn állítsa be a méréshatárt. Kezdje el folyamatosan növelni a frekvenciát, és figyelje, hogyan változik az áram. Az árammaximumot akarjuk megkeresni, azaz azt a frekvenciát, aminél nagyobb frekvenciák esetén az áram már csökken a frekvencia növelésével.
A frekvencia növelésekor egy-egy tartomány végére érve a tartományváltó gomb megnyomása után álljon vissza a finomszabályozó gomb segítségével arra a frekvenciára, ahonnan a tartományt váltotta, hogy ne maradjanak ki frekvenciák. Az ampermérőn szükség esetén váltson méréshatárt.
Az így meghatározott maximumhely a *közelítő* rezonanciafrekvencia. Azért csak közelítő, mert közben a feszültséget nem szabályoztuk, ezért a körön eső feszültség nem volt állandó. Jegyezze fel a közelítő rezonanciafrekvenciát az adatlapra.

2.) A rezonanciagörbe felvételénél alkalmazandó konstans feszültség kiválasztása:
Olvassa le a közelítő rezonanciafrekvencián a rezgőkörön eső feszültséget, és válasszon egy tetszőleges értéket ennek kb. a 60-80%-ánál. Ezen a feszültségen fogja mérni a rezonanciagörbe felvételekor az áramot, tehát ezt a feszültséget kell mutassa a rezgőkörre kötött voltmérő az ampermérő leolvasása előtt. A kívánt feszültségértéket a hanggenerátor amplitúdó gombjával (vagyis a hanggenerátor által leadott feszültség amplitúdójának változtatásával) tudja beállítani.

3.) A rezonanciagörbe felvétele: Legalább 10-12 mérési pontban
a) állítsa be a frekvenciát,
b) ellenőrizze és szükség esetén állítsa utána a konstans feszültséget,
c) olvassa le az áramerősséget.

Ügyeljen arra, hogy úgy vegyen fel mérési pontokat, a mérési pontok alapján megrajzolt rezonanciagörbéből meghatározható legyen egyrészt a rezonanciafrekvencia 2-3 Hz pontossággal, másrészt a jósági tényező. Ez azt jelenti, hogy egyrészt a maximális áramhoz tartozó frekvencia (a rezonanciapont) környékén legalább 2-3 Hz-enként kell felvenni mérési pontokat lefelé és felfelé is, másrészt hogy a rezonanciapontban mért áramerősség (I_{max}) $\sqrt{2}$-e alatt kevéssel is legyen egy-egy mérési pont a rezonanciafrekvenciánál kisebb és nagyobb frekvenciák irányába is.

Kiértékelés:

Ábrázolja a rezonanciagörbét! A diagramot lehet Excelben is készíteni, de mindenképpen egy folyamatos görbe legyen meghúzva (nem töröttvonal), és legyen megjelölve I_{max} és $I_{max}/\sqrt{2}$, valamint ν_0, ν_1 és ν_2 értéke.

A rezonanciagörbéből állapítsa meg a rezonanciafrekvenciát (ν_0),
és számolja ki a jósági tényezőt és a tekercs ohmikus ellenállását (24) és (19) alapján:

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1}, \quad R_L = \frac{U}{I_{max}}.$$

Szorgalmi feladat: Határozza meg R_L, L és C értékét az $I(\nu)$ függvény illesztésével. Érdemes először a 2.1. pont szerint kiszámolni C értékét, és ahhoz közeli értéket beírni az iteráció kiinduló értékének, vagy az illesztendő függvénybe beírni C nagyságrendjét. Töltse fel a fájlt a Moodleba.

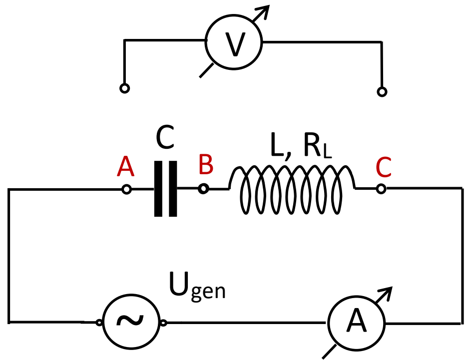
2. Soros rezgőkör áramköri jellemzőinek mérése

Mérési feladat:

Állítson be a maximális feszültségamplitúdó 30–60%-a környékén egy tetszőleges értéket a hanggenerátoron, és ezt a továbbiakban már ne változtassa.
Sorban be kell állítani három különböző frekvenciát: $0{,}9\cdot\nu_0$, ν_0, $1{,}1\cdot\nu_0$ (ν_0 értékét az előző mérési sorozatból tudjuk). Ezután minden egyes frekvenciánál

a) a voltmérőt a kondenzátor sarkaira kötve olvassa le
az áramerősség (I_1) és
a kondenzátoron eső feszültség (U_C) értékét;
b) a voltmérőt a tekercsre kötve olvassa le
az áramerősség (I_2) és
a tekercsen eső feszültség (U_{LR}) értékét;
c) a voltmérőt a kondenzátor és a tekercs soros eredőjére kötve olvassa le
az áramerősség (I_3) és
a kondenzátor és tekercs eredőjén eső feszültség (U_{LRC}) értékét.

Ideális voltmérőt feltételezve egy adott frekvencián I_1, I_2 és I_3 teljesen azonos lenne, a mérési adatokban megfigyelhető kis különbségek a voltmérő hatását mutatják.



***15. ábra**. Feszültségmérés a soros RLC körben: kondenzátor: U_{AB} tekercs: U_{BC} eredő: U_{AC}*

Kiértékelés:

2.1. Számítsa ki a C kapacitást és az L induktivitást a következő módon:

a) kondenzátort ideálisnak tekintjük, tehát

$$C = \frac{I_1}{\omega\, U_c},$$

b) a tekercsnél figyelembe vesszük annak ohmikus ellenállását, vagyis

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U_{LR}}{I_2}\right)^2 - R_L^{\,2}} \;.$$

A kondenzátor kapacitása és a tekercs induktivitása bármelyik frekvencián végzett mérés adataiból kiszámolható. A kötelező számítási feladat a rezonanciafrekvencia adataival számolni.

2.2. A fenti C és L és az **1.** mérésben meghatározott R_L értékek felhasználásával számítsa ki a rezonanciafrekvenciát a (22) alapján, és a jósági tényezőt (23) alapján, és vesse össze ezeket az értékeket a rezonanciagörbéből kapottakkal.

*<u>Szorgalmi feladat</u>: Végezze el a **2.1.** és **2.2.** számolásokat a $0{,}9\cdot\nu_0$ ill. az $1{,}1\cdot\nu_0$ frekvencián mért adatokkal is (a számításokat végezheti Excelben. az eredményeket írja be a jegyzőkönyvbe).*

2.3. A $0{,}9\cdot\nu_0$, ν_0, $1{,}1\cdot\nu_0$ frekvenciákon mért adatok felhasználásával mindhárom esetben szerkessze meg az impedanciák vektorábráját! A vektorábrákat megszerkesztheti a jegyzőkönyvben, vagy külön lapokon is, de célszerű kockás lapot használni.

Az impedanciavektorok hosszát a mért feszültség- és áramértékek hányadosaként kapjuk meg.

A vektorok irányát az egyes mennyiségek fázisa szabja meg. Sorosan kapcsolt áramköri elemek impedanciái összeadódnak, ez a vektorábrában az impedanciavektorok vektori összegzését jelenti (10. ábra).

Feltételezzük, hogy
- a kondenzátor ideális, tehát a $\tilde{Z}_C$ a képzetes tengely negatív irányába mutat;
- a tekercs reális, vagyis impedanciájának fázisa 0 és $\pi/2$ közé esik.

A szerkesztés menete:
- készítsen léptéket az ábrázoláshoz;
- vegye fel a komplex síkon a képzetes tengely negatív irányába a kondenzátor impedanciáját;
- körzővel szerkessze meg az $\tilde{Z}_C + \tilde{Z}_{LR} = \tilde{Z}_{LRC}$ vektorháromszög $\tilde{Z}_C$ -vel szemközti csúcsát;
- rajzolja meg $\tilde{Z}_{LRC}$ -t, és párhuzamos eltolással a $\tilde{Z}_{LR}$ vektort.

KÉRDÉSEK, GYAKORLÓ FELADATOK

Az alábbi kérdésekre, feladatokra, ill. hasonlóakra lehet számítani a beugró kiszárthelyiben.

MINIMUMKÉRDÉSEK
Mik a mérési feladatok? Szükséges eszközök, kapcsolási rajzok. Mik a leolvasott mennyiségek, és milyen mennyiséget határozunk meg az egyes mérések során?

---

*Igaz-e, hogy soros rezgőkörben
- a kondenzátoron mért feszültség lehet nagyobb is a generátorfeszültségnél?
- a kondenzátor feszültsége késik a generátorfeszültséghez képest?
- a kondenzátor árama késik a generátoráramhoz képest?
- a rezonanciafrekvencián az eredő impedancia független attól, hogy milyen kapacitású kondenzátor és milyen induktivitású tekercs van a körben?
- ha a kondenzátort kisebb kapacitásúra cseréljük, a rezonanciafrekvencia nő?
- a rezonanciafrekvencián a kör eredő impedanciájának minimuma van?
- konstans generátorfeszültség mellett a rezonanciafrekvencián az áramnak minimuma van?
- a tekercs impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?
- a generátorfeszültség *frekvenciájának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a generátorfeszültség *amplitúdójának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a tekercsen ill. a kondenzátoron eső feszültség aránya független a frekvenciától?
- állandó generátorfeszültség mellett a frekvenciát változtatva a kör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián maximális?
- a kondenzátor impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?

**A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

1. Mennyi a kondenzátor kapacitása, ha ν = 199 Hz frekvencián a kondenzátoron eső feszültség effektív értéke 1,6 V és a rajta átfolyó áram effektív értéke 0,5 mA?

2. Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy L = 0,2 H önindukciós együtthatójú, R = 420 Ω ellenállású veszteséges tekerccsel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 7958 Hz lesz?

3. Sorosan kapcsolunk egy C = 320 nF kapacitású kondenzátort és egy L = 0,4 H önindukciós együtthatójú, R = 420 Ω ellenállású veszteséges tekercset, és egy U_{gen} = 8,0 V effektív feszültségű váltóáramú generátorra kötjük.
a) Mekkora áram fog folyni a körben 800 Hz frekvencián?
b) Mennyi a kör rezonanciafrekvenciája?

4. Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy L = 2,5 H önindukciós együtthatójú, R = 250 Ω ellenállású veszteséges tekerccsel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 318 Hz lesz?
b) Hányszorosa a rezonanciafrekvencián a generátorfeszültség a kondenzátoron eső feszültségnek?

5. Egy kondenzátorból és egy veszteséges tekercsből álló soros rezgőkörben a rezonanciafrekvencián a kondenzátoron 3,6 V-ot, a teljes rezgőkörön 4,8 V-ot mérünk.
Mekkora feszültséget mérnénk a tekercsen?

Megoldott gyakorlófeladat:

Összeállítunk egy soros RLC kört egy L = 0,5 H önindukciós együtthatójú és R_L = 480 Ω ellenállású reális tekercsből és egy C = 200 nF kapacitású kondenzátorból, és egy U_{gen} = 7,0 V feszültségű, változtatható frekvenciájú váltóáramú generátorra kötjük.

a) Mekkora áram folyik a körben ν_1 = 600 Hz frekvencián?

b) Mekkora a kondenzátoron eső feszültség nagysága ν_1 = 600 Hz frekvencián?

c) Mekkora a reális tekercsen eső feszültség nagysága ν_1 = 600 Hz frekvencián?

d) Mennyi a kör rezonanciafrekvenciája?

e) Mekkora áram folyik a körben a rezonanciafrekvencián?

f) Mekkora feszültség esik a kondenzátoron a rezonanciafrekvencián?

g) Mekkora feszültség esik a reális tekercsen a rezonanciafrekvencián?

h) Mennyi a kör jósági tényezője?

Megoldás:

a) $\nu_1 = 600$ Hz $\rightarrow$ $\omega_1 = 2\pi\,\nu_1 = 2\pi\cdot 600\ \mathrm{s}^{-1}$; C = 200 nF = $200\cdot 10^{-9}$ F.

(20) szerint $Z_{LRC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, $Z_{LRC}(\nu_1) = \sqrt{480^2 + \left(2\pi\cdot 600\cdot 0{,}5 - \frac{1}{2\pi\cdot 600\cdot 200\cdot 10^{-9}}\right)^2} = 736{,}6\ \Omega$;

$U_{gen} = U_{LRC} = I\, Z_{LRC}$ $\rightarrow$ $I(\nu_1) = U_{gen} / Z_{LRC}(\nu_1) = 7{,}0 / 736{,}6 = 0{,}009504$ A = 9,504 mA .

b) (14) szerint $Z_C = |\tilde{Z}_C| = \left|-\frac{1}{\omega C}\, i\right| = \frac{1}{\omega C}$; $Z_C(\nu_1) = \frac{1}{2\pi\cdot 600\cdot 200\cdot 10^{-9}} = 1885\ \Omega$;

$U_C(\nu_1) = I(\nu_1)\, Z_C(\nu_1) = 0{,}009504 \cdot 1885 = 17{,}91$ V.

c) (25) szerint $Z_{LR} = |\tilde{Z}_{LR}| = |\, R + \omega L\, i\,| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $Z_{LR}(\nu_1) = \sqrt{480^2 + (2\pi\cdot 600\cdot 0{,}5)^2} = 1945\ \Omega$;

$U_{LR}(\nu_1) = I(\nu_1)\, Z_{LR}(\nu_1) = 0{,}009504 \cdot 1945 = 18{,}49$ V.

Megjegyzés: vegyük észre, hogy $U_C + U_{LR} \neq U_{LRC}$, a skalár összeadás nem teljesül!

Másrészt $U_C > U_{LRC}$ és $U_{LR} > U_{LRC}$, vagyis a kondenzátoron és a tekercsen eső feszültség is nagyobb a generátorfeszültségnél.

d) A (21), (22) Thomson-formula szerint

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}5\cdot 200\cdot 10^{-9}}} = 503{,}3\ \text{Hz}\ .$$

e) (19) szerint a rezonanciafrekvencián $Z_{LRC}(\nu_0) = R = 480\ \Omega$;

$I(\nu_0) = U_{LRC} / R = 7{,}0 / 480 = 0{,}01458$ A = 14,58 mA (ez a maximális áram ebben a körben).

f) $\omega_0 = 2\pi\,\nu_0 = 2\pi\cdot 503{,}3\ \mathrm{s}^{-1}$;

(14): $Z_C(\nu_0) = \frac{1}{2\pi\cdot 503{,}3\cdot 200\cdot 10^{-9}} = 1581\ \Omega$;

$U_C(\nu_0) = I(\nu_0)\, Z_C(\nu_0) = 0{,}01458 \cdot 1581 = 23{,}06$ V.

g) (25): $Z_{LR}(\nu_0) = \sqrt{480^2 + (2\pi\cdot 503{,}3\cdot 0{,}5)^2} = \sqrt{480^2 + 1581^2} = 1652\ \Omega$;

$U_{LR}(\nu_0) = I(\nu_0)\, Z_{LR}(\nu_0) = 0{,}01458 \cdot 1652 = 24{,}10$ V.

h) (23) szerint $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{480}\sqrt{\frac{0{,}5}{200\cdot 10^{-9}}} = 3{,}294$