5. VÁLTAKOZÓ ÁRAM

A gyakorlat célja a soros rezgőkör segítségével megismerkedni a váltóáramú hálózatokra jellemző áram- és feszültségviszonyokkal, valamint a rezonancia jelenségével, amely sokszor előfordul a mérnöki gyakorlatban (mechanikus rezgések[1] gépeken, spektroszkópiai módszerek, adatátvitel).

Előismeret:
- Ohm-törvény;
- kondenzátor feszültsége, kapacitása;
- önindukciós tekercs feszültsége, önindukciós együtthatója;
- Kirchhoff-törvények;
- harmonikus függvények;
- komplex számok.

1. VÁLTÓÁRAMÚ HÁLÓZATSZÁMÍTÁS

Ha a feszültség, illetve az áramerősség harmonikus függvénye az időnek, azaz

$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)$ illetve $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$, (1)

akkor **váltófeszültségről,** illetve **váltóáramról** beszélünk. Itt

U_0 ill. I_0 a feszültség ill. az áram amplitúdója;

$\omega t + \varphi_U$ ill. $\omega t + \varphi_I$ a fázis;

ω a körfrekvencia [s^{-1}];

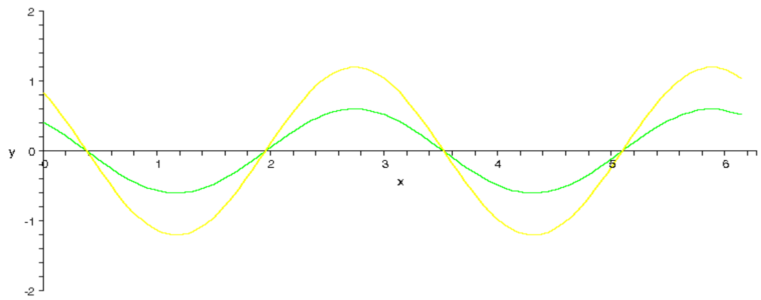
$\omega = 2\pi\nu$, ahol ν a frekvencia [Hz], és $\nu = 1/T$, ahol T a periódusidő [s];

φ_U ill. φ_I a fázisállandó vagy kezdőfázis [rad].

1.1. Ellenállás, kondenzátor és önindukciós tekercs váltóáramú hálózatban

Egy tetszőleges R **ellenállás**on időfüggő áram ill. feszültség esetén is érvényes az Ohm-törvény, tehát a feszültség minden pillanatban arányos a pillanatnyi áramerősséggel:

$U_R(t) = R\, I(t)$ (2)



1. ábra. *Áram és feszültség ohmos ellenálláson.*
Zöld: I(t), sárga: U_R(t)

[1] Rezonancia mechanikai rezgésnél: https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k

Kondenzátor és önindukciós tekercs esetén azonban nem ilyen egyszerű I(t) és U(t) viszonya, a feszültség és az áram hányadosa időben nem állandó.

A **kondenzátor** feszültsége a rajta lévő töltéssel arányos:

$U_C = \frac{1}{C} Q$.

Itt C a kondenzátor kapacitása, egysége a Farad [F].
Változó áram esetén változik a kondenzátoron levő töltés értéke, és azzal arányosan változik a kondenzátoron eső feszültség:

$U_C(t) = \frac{1}{C} Q(t)$.

Mivel az áram az adott felületen átmenő töltésmennyiség deriváltja, ezért a töltés átfolyó áram integrálja:

$I = \frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow \quad Q(t) = \int I(t)\, dt \quad \rightarrow \quad U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_C(t)\, dt$. (3)

Hogyan függ a kondenzátoron eső feszültség az időtől, ha a kondenzátoron átfolyó áram harmonikus függvénye az időnek? Írjuk fel az áramot $I_C(t) = I_0 \cos(\omega t)$ alakban (φ_U=0 választással) és integráljunk:

$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_0 \cos(\omega t)\, dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t)$.

Érdemes átírni a sin(ωt) -t $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ alakra:

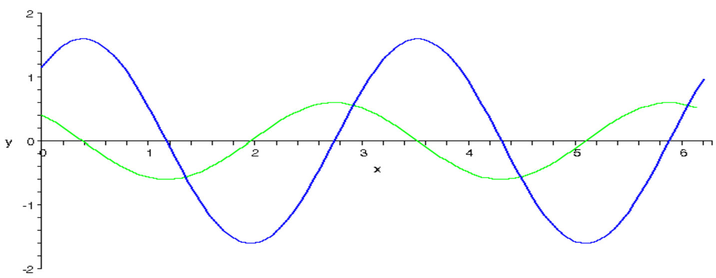
$U_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$. (4)

Látható, hogy **a kondenzátoron eső feszültség** olyan harmonikus függvénye az időnek, melynek frekvenciája megegyezik az áraméval, de a feszültség

π/2 fázissal késik az áramerősséghez képest,

és **amplitúdója**

$\mathbf{U_{C,0} = \frac{I_0}{\omega C}}$.



2. ábra. *Áram és feszültség kondenzátoron.*
Zöld: $I_C(t)$, kék: $U_C(t)$

<u>Önindukciós tekercs</u>: Ha a tekercsben folyó áram megváltozik, akkor az általa körülhatárolt területen a ϕ mágneses fluxus is megváltozik, és a tekercsben feszültség indukálódik. Ez az indukált feszültség a mágneses fluxus változási sebességével, a fluxus pedig az áramerősséggel arányos:

$U_L(t) = \frac{d\,\phi(t)}{dt} = L \frac{d\, I_L(t)}{dt}$. (5)

Itt L a tekercs önindukciós együtthatója, egysége a Henry [H].
$I_C(t) = I_0 \cos\omega t$ alakban felírt váltóáram esetén a tekercsen a feszültség

$U_L(t) = L \frac{d\, I_0 \cos\omega t}{dt} = -\, I_0\, \omega L \sin\omega t$.

A $-\sin(\omega t)$ -t átírható $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ alakra:

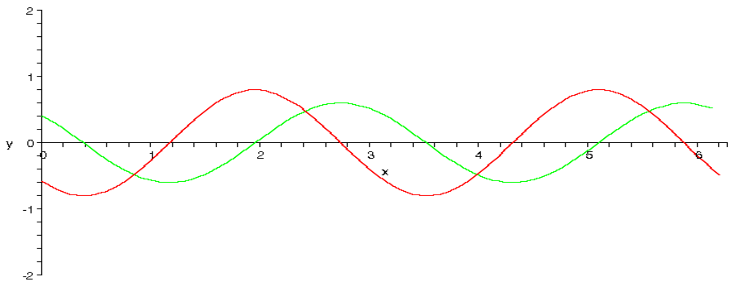
$$U_L(t) = I_0\,\omega L\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2}). \qquad (6)$$

Látható, hogy **az önindukciós tekercsen eső feszültség** olyan harmonikus függvénye az időnek, melynek frekvenciája megegyezik az áraméval, de a feszültség

π/2 fázissal siet az áramerősséghez képest,

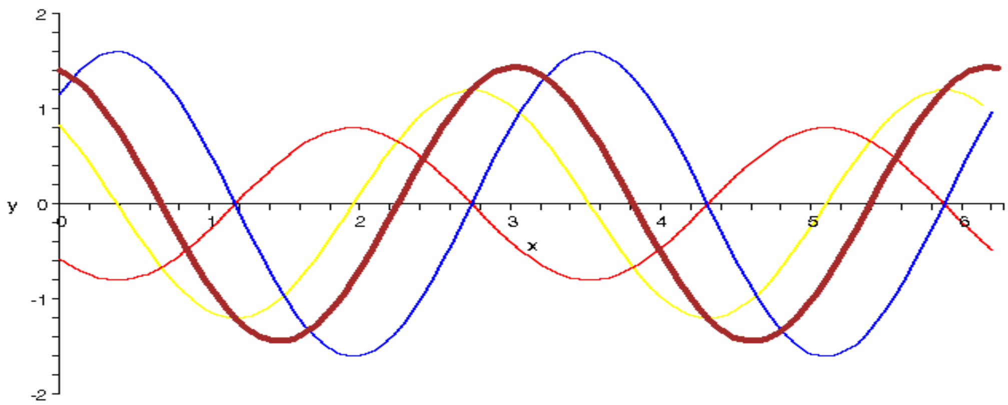
és **amplitúdója**

$\mathbf{U_{L,0} = I_0\,\omega L}$.



3. ábra. *Áram és feszültség önindukciós tekercsen.*
Zöld: $I_L(t)$, piros: $U_L(t)$

Képzeljük el, hogy sorosan kötünk egy ellenállást, egy kondenzátort és egy tekercset. Mivel sorosan vannak kötve, tudjuk, hogy ugyanaz az áram folyik át rajtuk, és a fentiek szerint ismerjük a rajtuk eső feszültségeket is. A három áramköri elemen eső teljes feszültség az egyes feszültségek (U_R, U_C, U_L) összege. Ez az összeadás azonban a fáziskülönbségek miatt nem egyszerű, az eredő feszültség amplitúdója és fázisa elég hosszadalmas számításokkal határozható meg. A 4. ábra mutatja a fenti három áramköri elemen eső feszültséget és az összegüket:



4. ábra. *Sorosan kötött ellenállás, kondenzátor és tekercs feszültsége,*
és a három elemen eső feszültség összege.
Sárga: $U_R(t)$, kék: $U_C(t)$, piros: $U_L(t)$, barna: $U_{RLC}(t)$ eredő feszültség.

Mivel mind a kondenzátornál, mind a tekercsnél a feszültség és az áram hányadosa időben változik, ezért az egyenáramú hálózatoknál használt Kirchhoff-törvények (csomóponti és huroktörvény) csak a *pillanatnyi* értékekre alkalmazhatók, az amplitúdókra nem. Az eredő áramok ill. feszültségek amplitúdóját a rész-áramok ill. -feszültségek amplitúdójából csak a *fázisok ismeretében* lehet meghatározni. Formális hasonlóság hozható viszont létre a váltó- és egyenáramú hálózatszámítás között az alábbi módszerrel.

1.2. Komplex mennyiségek bevezetése

Egy komplex számot megadhatunk az R valós és az X képzetes részével:

$\tilde{Z} = R + i X$,

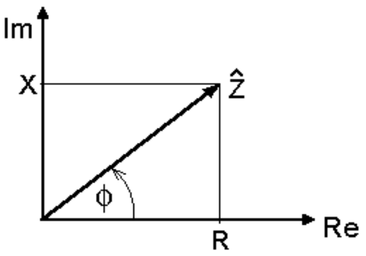
vagy a Z abszolút értékével és a φ fázisával:

$\tilde{Z} = Z e^{i\varphi}$ (Euler alak).

A φ fázis a valós tengellyel bezárt szög.

Az 5. ábráról látható, hogy

$$\begin{Bmatrix} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \mathrm{tg}\varphi = X / R \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} R = Z\cos\varphi \\ X = Z\sin\varphi \end{Bmatrix},$$



***5. ábra**. Komplex mennyiség*

vagyis $\tilde{Z}$ felírható

$\tilde{Z} = Z\cos\varphi + i Z \sin\varphi$ alakban is.

Az Euler alakból kiolvasható, hogy komplex számok szorzásakor az abszolút értékek szorzódnak, és a fázisok összeadódnak.

Elvben feltételezhetjük, hogy a feszültség ill. az áramerősség komplex értékű függvénye az időnek:

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0\, e^{i(\omega t + \phi_U)} \quad \text{ill.} \quad \tilde{I} = \tilde{I}_0\, e^{i(\omega t + \phi_I)}. \tag{7}$$

A feszültség és az áram ω szögsebességű forgó vektorok a komplex síkon. Bár ennek fizikai értelme nincs, mégis, ha vesszük $\tilde{U}$ ill. $\tilde{I}$ valós részét, az már a közönséges harmonikus időfüggés[2]:

$$\mathrm{Re}(\tilde{U}) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U), \quad \mathrm{Re}(\tilde{I}) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) . \tag{8}$$

A komplex feszültségekkel és áramokkal felírhatjuk az Ohm-törvényt és a kondenzátorra ill. az önindukciós tekercsre vonatkozó összefüggéseket. A feszültségek és áramok konstanssal való szorzását, differenciálását és integrálását elvégezhetjük a komplex függvényalakkal.

Írjuk fel az áramerősséget

$\tilde{I} = \tilde{I}_0\, e^{i(\omega t + \phi_I)}$

alakban, és határozzuk meg (2), (3) és (5) mintájára a komplex feszültségeket az egyes áramköri elemeken:

$$\tilde{U}_R = R \cdot \tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} = R \cdot \tilde{I} \tag{9}$$

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{C}\int \tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{\tilde{I}_0}{i\omega} e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \frac{1}{\omega C i} \cdot \tilde{I} , \tag{10}$$

$$\tilde{U}_L = L \cdot \frac{d\tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}}{dt} = L \cdot \tilde{I}_0 \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \omega L i \cdot \tilde{I} . \tag{11}$$

Látható, hogy a komplex alakban már a kondenzátor és a tekercs esetében is a feszültség és az áram hányadosa is egy-egy időtől nem függő – viszont komplex – szám. Ezeket a hányadosokat **komplex impedanciáknak** nevezzük, $\tilde{Z}$-vel jelöljük, és velük a komplex feszültség és komplex áram közötti összefüggés az egyenáramú Ohm-törvényhez hasonló alakba írható:

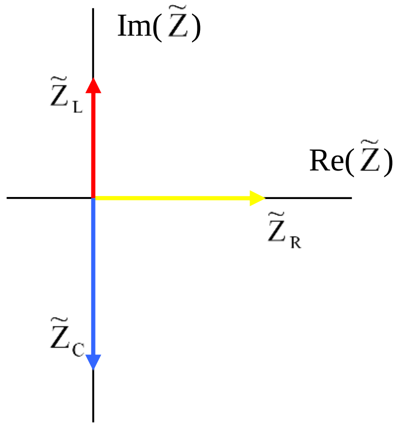
$$\tilde{U} = \tilde{Z} \cdot \tilde{I} . \tag{12}$$

[2] Ebben a videóban szimuláció mutatja, ahogy a komplex síkon forgó vektorok vetületeként megkapjuk a feszültség és az áram harmonikus időfüggését, és ahogy a forgó vektorok közötti fáziskülönbség leírja az harmonikus függvények fázisának különbségét.

Az ellenállás, a kondenzátor és a tekercs impedanciáját a (9)–(11) képletekből olvashatjuk ki:

$$\tilde{Z}_R = R\,,\quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C i} = -\frac{1}{\omega C} i\,,\quad \tilde{Z}_L = \omega L i \tag{13}$$

Az ellenállás:
fázisa $\varphi_R = 0$,
nagysága R.
A kondenzátor:
fázisa $\varphi_C = -\pi/2$,
nagysága $1/(\omega C)$.
A tekercs:
fázisa $\varphi_L = \pi/2$,
nagysága ωL.



6. ábra. *Ellenállás, kondenzátor és tekercs komplex impedanciája.*

A komplex mennyiségekkel a váltóáramú hálózatszámítás visszavezethető az egyenáramú hálózatszámításra, a Kirchhoff-törvények érvényesek maradnak a <u>komplex</u> áramokkal és feszültségekkel felírva. A komplex alakkal elvégezhetjük a feszültségek és áramok összeadását, a komplex feszültségek ill. áramok valós része megadja az adott mennyiség időfüggését.

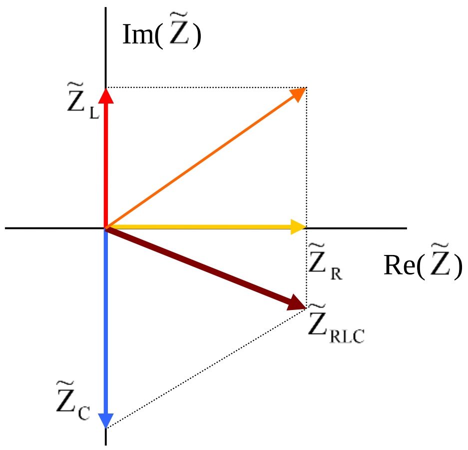
Ha ellenállásokból, tekercsekből és kondenzátorokból tetszőleges kétpólust építünk, annak a két pólusán is arányos lesz a komplex feszültség a komplex árammal, mert ez az arányosság minden egyes elemen fennáll (a (12) összefüggés felírható ez egyes elemekre vagy azok eredőjére is). Egy kétpólus komplex feszültségének és áramának hányadosát a kétpólus **eredő komplex impedanciá**jának nevezzük, ami az egyenáramú hálózatoknál megismert szabályok szerint számolható ki az egyes áramköri elemek komplex impedanciájából, azaz
– soros kapcsolásnál a komplex impedanciák összeadódnak:

$$\tilde{Z}_e = \sum \tilde{Z}_i\ , \tag{14}$$

– párhuzamos kapcsolásnál az egyes impedanciák reciprokának összege adja az eredő reciprokát:

$$\frac{1}{\tilde{Z}_e} = \sum \frac{1}{\tilde{Z}_i}\ . \tag{15}$$

Ez azt jelenti, hogy *soros kapcsolás*nál a komplex síkon az eredő impedancia az egyes impedanciáknak megfelelő vektorok eredőjének megszerkesztésével nyerhető:



***7. ábra**. Komplex impedanciák vektorábrája: sorosan kötött ellenállás, tekercs és kondenzátor eredő impedanciája.*

Mivel tudjuk, hogy komplex számok szorzásánál az abszolút értékek szorzódnak, a fázisok pedig összeadódnak, a komplex mennyiségekkel felírt Ohm-törvényből (12) következik, hogy

– a feszültség amplitúdója az impedancia abszolút értékének és az áram amplitúdójának szorzata:

$U_0 = Z \cdot I_0$,

– a feszültség fázisa az impedancia és az áram fázisának összegével egyenlő:

$\varphi_U = \varphi_Z + \varphi_I$.

φ_Z helyett általában röviden csak φ-t írunk. Tehát

$U(t) = Z \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t + (\varphi + \varphi_I))$.

A komplex impedancia nagysága megadja a feszültség és az áram amplitúdójának hányadosát, a fázisa pedig a feszültség és az áram közötti fáziskülönbséget.

Ellenőrizhetjük, hogyan kapjuk vissza ellenállásra, kondenzátorra és tekercsre az 1.1. pontban levezetett összefüggéseket:

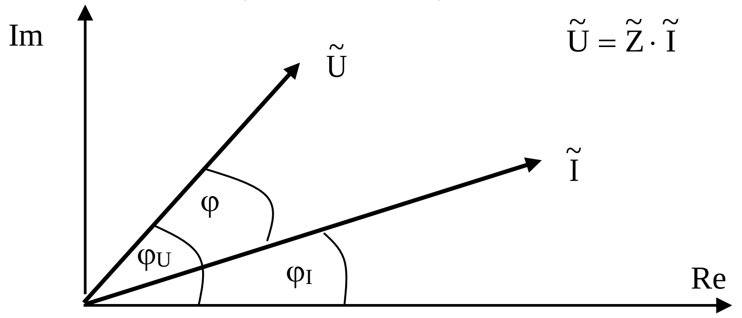
– Az ellenállás impedanciája $\tilde{Z}_R = R$. Ennek abszolút értéke R, így $U_{R,0} = R\, I_0$, és fázisa 0, vagyis a feszültség és az áram azonos fázisban vannak.

– A kondenzátor impedanciája $\tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C i} = -\frac{1}{\omega C} i$. Ennek abszolút értéke 1/(ωC), így $U_{C,0} = I_0 / (\omega C)$, és fázisa –π/2, vagyis a feszültség π/2-vel késik az áramhoz képest.

– A tekercs impedanciája $\tilde{Z}_L = \omega L i$. Ennek abszolút értéke ωL, így $U_{L,0} = \omega L\, I_0$, és fázisa π/2, vagyis a feszültség π/2-vel siet az áramhoz képest.

Ezen elemek összekapcsolásával az eredő impedancia fázisa –π/2 és π/2 közötti érték lehet.

A komplex számsíkon ábrázolhatjuk nemcsak a komplex impedanciák, hanem a komplex váltóáramok és feszültségek **vektorábráját** is:



$\tilde{U} = \tilde{Z} \cdot \tilde{I}$

1.3. Váltóáramú teljesítmény számítása

Periodikusan változó áram és feszültség esetén a pillanatnyi teljesítmény helyett az *átlagteljesítmény*nek van gyakorlati jelentősége. Az átlagteljesítmény a pillanatnyi valós feszültség és a pillanatnyi áram szorzatának (a pillanatnyi teljesítménynek) az időátlaga egy periódusra. Számoljuk ki szinuszos időfüggés esetén az átlagteljesítményt. Legyen $\varphi_I = 0$, így $\varphi_U = \varphi$.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 \cos(\omega t + \varphi) \cdot I_0 \cos(\omega t)\, dt = \frac{U_0 I_0}{T}\int_0^T \frac{\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi}{2} dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos\varphi \ .$$

Bevezetve az effektív értékeket

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \ I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

a teljesítmény az alábbi alakba írható:

$P = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi$.

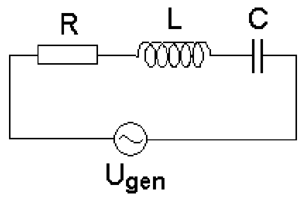
Az egyenáramú teljesítményhez képest tehát az az eltérés, hogy a teljesítményben megjelenik az impedancia fázisa. Ohmos ellenállásnál cosφ = 1, kondenzátornál és tekercsnél viszont cosφ = 0. Ez azt jelenti, hogy váltóáram esetén teljesítmény csak az ellenállásokon disszipálódik.

1.4. Rezgőkörök, rezonancia

Kondenzátort és tekercset is tartalmazó hálózat esetén gyakran előfordul, hogy az eredő impedanciájának abszolút értéke a váltóáram frekvenciájának függvényében szélsőértéken megy át. Ezekben a hálózatokban a szélsőérték frekvenciáján rezonancia lép fel. A két legnevezetesebb a soros és a párhuzamos rezgőkör. A mérés során csak a **soros rezgőkörrel** fogunk foglalkozni.

<u>Soros rezgőkör</u> (<u>soros RLC kör</u>)

Sorba kapcsolunk
egy R ellenállást,
egy L önindukciójú tekercset és
egy C kapacitású kondenzátort, és
egy ω körfrekvenciájú (ν frekvenciájú) váltóáramú generátorra kötjük.



***8. ábra**. Soros rezgőkör*

A soros rezgőkör komplex impedanciája:

$$\tilde{Z}_{LRC} = R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C = R + \omega L i + \frac{1}{\omega C i} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i \qquad (16)$$

Az eredő impedancia az ω körfrekvencia (a ν frekvencia) függvénye.

Létezik egy ω_0 körfrekvencia, ahol $\tilde{Z}_{LRC}$ képzetes része zérus:

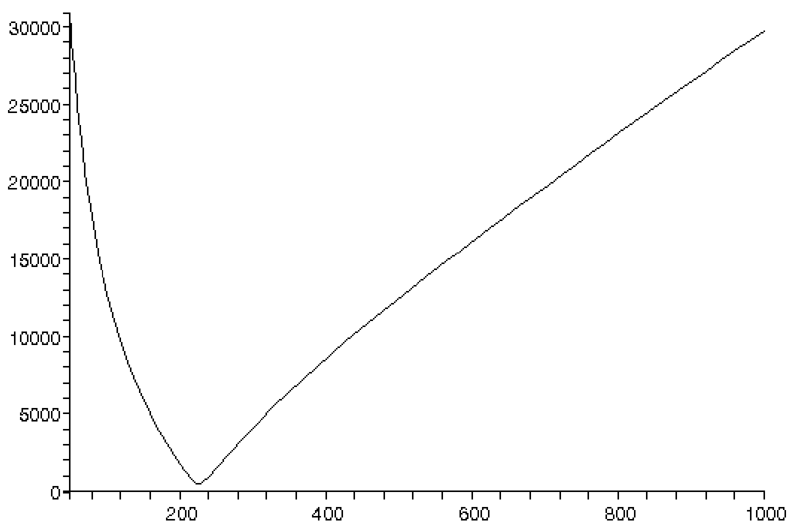
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \;; \qquad (17)$$

ekkor az impedancia valós, és az ohmos ellenállással, R-rel egyenlő:

$$\tilde{Z}(\omega_0) = R\,. \qquad (18)$$

Ezen a körfrekvencián a (16) impedancia abszolút értékének,

$$Z_{LRC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{-nek minimuma van:} \qquad (19)$$



***9. ábra**. Soros rezgőkör eredő impedanciájának frekvenciafüggése*
(R = 500 Ω, L = 5 H, C = 0,1 μF, ν = 50…1000 Hz)

Ez a körfrekvencia kifejezhető (17)-ből L és C értékével:

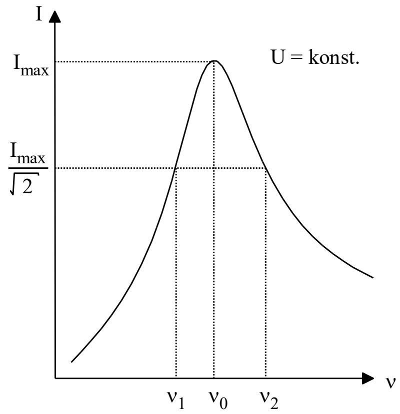
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad : \quad \text{ez a } \textbf{Thomson-formula}. \tag{20}$$

A

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{21}$$

frekvencia az áramkör **rezonanciafrekvenciája**.

Konstans feszültség mellett ennél a frekvenciánál az áram maximumon megy át, ezért a jelenséget *áramrezonanciának* nevezzük.



***10. ábra**. Soros rezgőkör rezonanciagörbéje*

A rezonanciagörbe alakját, a rezonancia élességét a Q **jósági tényezővel** jellemezzük.
Q értéke annál nagyobb, minél szűkebb az a frekvenciatartomány, ahol jelentősen megnövekedett áramokat mérhetünk.
Soros rezgőkör esetén a Q jósági tényező a rezonanciafrekvenciához tartozó egyes reaktanciák (nem ohmikus impedanciák) és az ohmikus ellenállás hányadosa:

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \tag{22}$$

(A harmadik alakot a Thomson-formula felhasználásával kaphatjuk.)
A jósági tényező értékét kiszámolhatjuk a rezonanciagörbéből is:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} \quad , \tag{23}$$

ahol ω_1 és ω_2 (ill. ν_1 és ν_2) az a két körfrekvencia (ill. frekvencia), amelynél az áramerősség a maximális érték $\sqrt{2}$-edére csökken (ld. 10. ábra) állandó feszültség mellett.

Hogy miért pont a maximális áram $\sqrt{2}$-edéhez tartozó frekvenciákat kell venni a Q kiszámításához? Ennek az az oka, hogy így lesz a kétféle képlettel számolva azonos a jósági tényező értéke. Ez az alábbi levezetéssel látható be.
Az ω_1 és ω_2 körfrekvenciákon $I_1 = I_2 = I_{max}/\sqrt{2}$ és U_{LRC} = konst. $\rightarrow$ $Z_{LRC,1} = Z_{LRC,2} = \sqrt{2}\, Z_{LRC,0} = \sqrt{2}\, R$,
az eredő impedancia abszolút értéke $\sqrt{2}$-szerese a rezonanciafrekvenciához tartozó impedanciának, azaz R-nek.
Ez azt jelenti, hogy ekkor az eredő reaktancia abszolút értéke megegyezik az ohmikus ellenállással:

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega c}\right| = R, \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \quad \text{és} \quad \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \quad .$$

A Thomson-formulából (20) $1/C = \omega_0^2 L$, ennek behelyettesítésével $\frac{\omega_0^2 L}{\omega_1} - \omega_1 L = R$ és $\omega_2 L - \frac{\omega_0^2 L}{\omega_2} = R$;
majd ω_1-gyel ill. ω_2-vel szorozva, és a két egyenletet összeadva

$(\omega_2^2 - \omega_1^2)L = (\omega_1 + \omega_2)R$, azaz $(\omega_2-\omega_1)(\omega_1+\omega_2)L = (\omega_1+\omega_2)R$ $\rightarrow$ $(\omega_2-\omega_1)L = R$ $\rightarrow$ $L/R = 1/(\omega_2-\omega_1)$.

Ezt behelyettesítve a jósági tényezőre adott (22) formulába

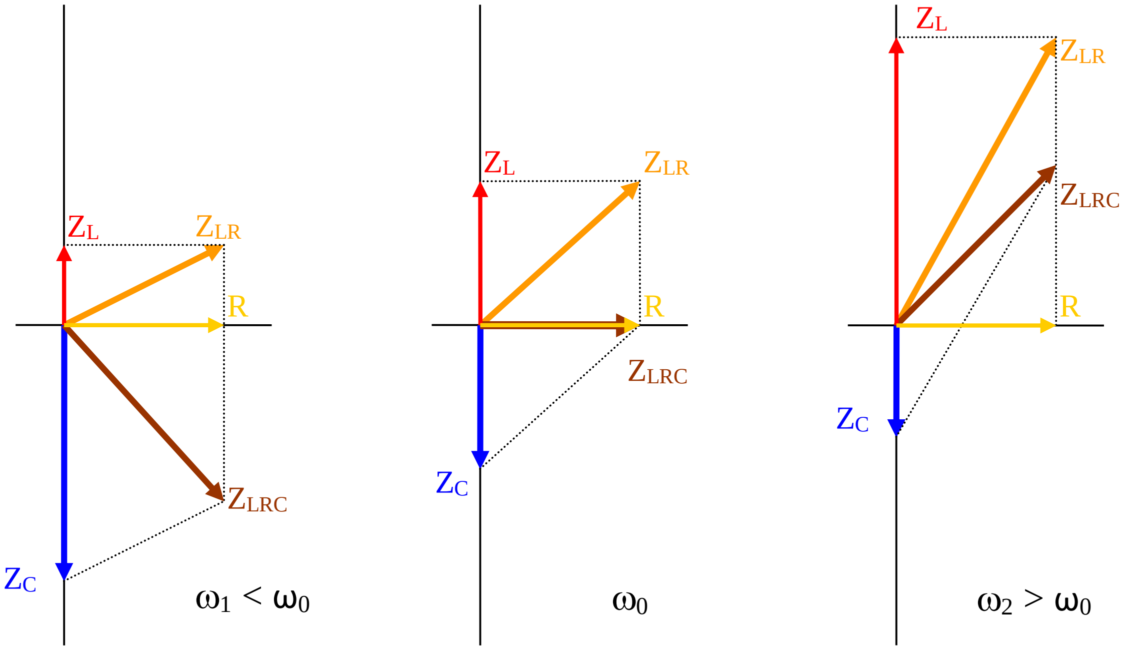
$Q = \omega_0 \cdot L/R = \omega_0 / (\omega_2 - \omega_1)$, tehát beláttuk, amit akartunk.

Az ω_1 ill. ω_2 körfrekvenciákon a rezgőkör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián felvett maximális teljesítménynek éppen a fele:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = I(\omega_1)^2 \cdot R = I(\omega_2)^2 \cdot R = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 R = \frac{I_{max}^{\ 2}\, R}{2} = \frac{P_{max}}{2} \quad .$$

A soros rezgőkör áramköri elemeinek komplex impedanciája a (kör)frekvencia függvényében

A 11. ábrán látjuk, hogyan változnak az egyes impedanciák egy soros áramkörben, ahogy nő a rákapcsolt feszültség (kör)frekvenciája. Az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor impedanciájának megfelelő komplex vektorok összegeként megkapjuk az eredő impedanciát.



***11. ábra**. Kondenzátor, reális tekercs és soros eredőjük impedanciája*
3 különböző – egyre nagyobb – körfrekvencián

Reális tekercs
Az olyan önindukciós tekercset, amelynek ohmikus ellenállása is van, *reális* tekercsnek nevezzük. Ennek impedanciája

$$\tilde{Z}_{LR} = R + \omega L i\,. \qquad (24)$$

A mérés során ilyet használunk, ezért a 11. ábrán ezt a komplex impedanciát is feltüntettük.

2. MÉRÉSI FELADATOK

A szükséges eszközök:

Tekercs  L, R_L

Vasmagos tekercs, ami reális tekercsként viselkedik, azaz van ohmikus ellenállása is. Az ohmikus ellenállása két részből tevődik össze:

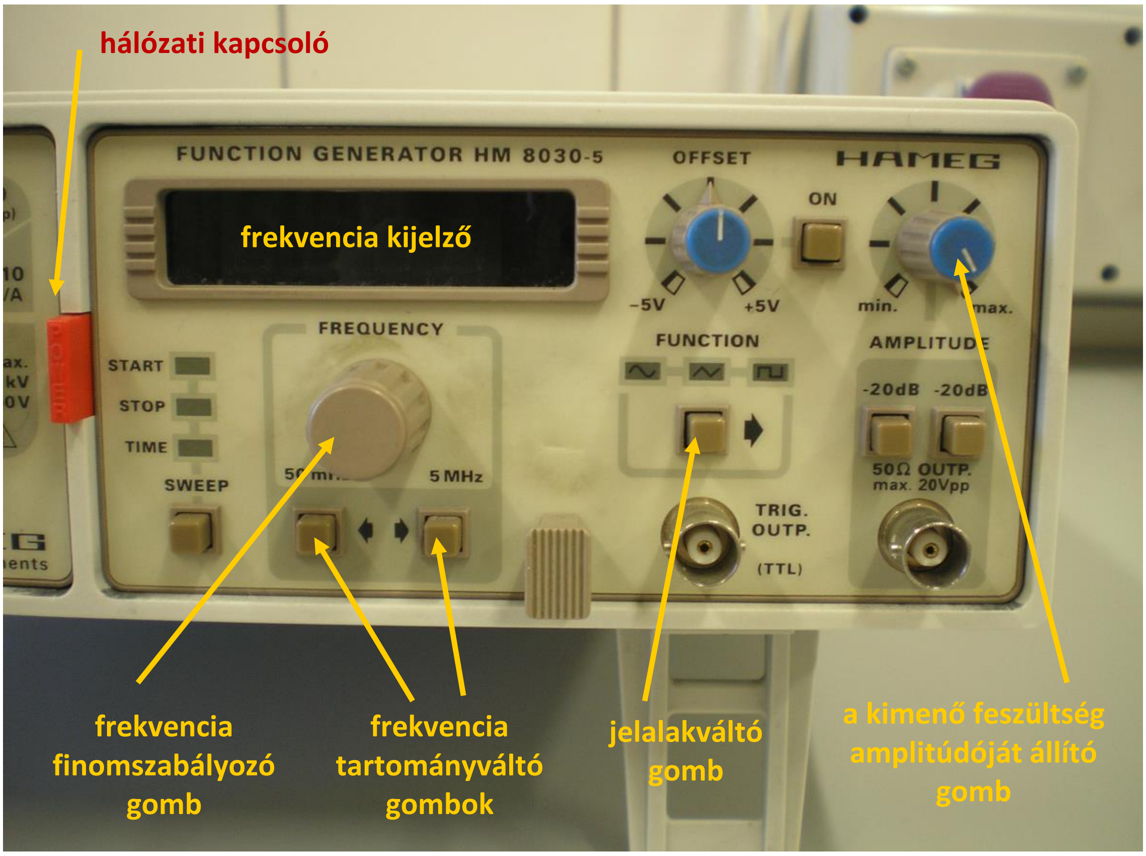
– a *rézveszteségből*, vagyis a tekercset alkotó rézhuzal ellenállásából (néhányszor tíz Ω), és
– a *vasveszteségből*, ami abból származik, hogy a váltóárammal átjárt tekercs vasmagja melegszik amiatt, hogy a változó elektromágneses térben örvényáramok jönnek létre benne. Ez az energiadisszipáció hasonló az ellenállásokon disszipálódó Joule-hőhöz, ezért modellezhető ohmikus ellenállással. A vasveszteség nagysága függ többek között a vasmag anyagi minőségétől, geometriai elrendezésétől, a frekvenciától és az áramerősségtől; a nagyságrendje fél kΩ.

Kondenzátor  C

Jó közelítéssel ideálisnak tekinthető, azaz nincs ohmikus ellenállása.

Függvénygenerátor  U_{gen}

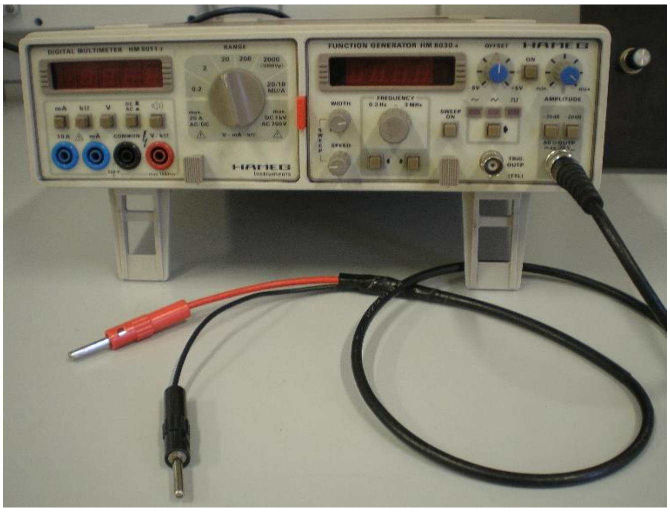
Különböző jelalakú és frekvenciájú váltakozó feszültség előállítására alkalmas generátor. Amikor szinuszos kimenetet használunk, hanggenerátorként szokás rá hivatkozni. A készülék nem ideális feszültséggenerátor abban az értelemben, hogy kapocsfeszültsége megváltozik, ha a terhelést vagy a frekvenciát megváltoztatjuk, azonban a kimenő feszültség szabályozható, és annak állításával lehetséges a rezgőkörön konstans feszültséget tartani a rezonanciagörbe felvételénél.



12. ábra. *A függvénygenerátor*

Digitális univerzális műszerek

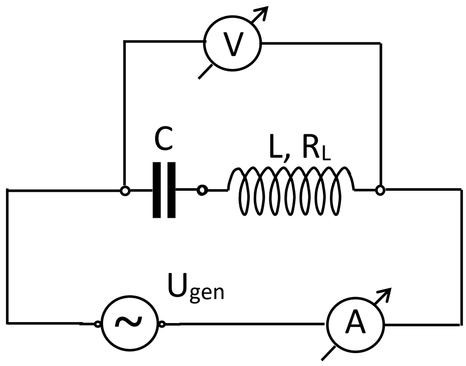
Áram-, feszültség- és ellenállásmérésre alkalmasak. Szinuszos váltakozó áram esetén a műszerről leolvasható érték az effektív érték (az amplitúdó $\sqrt{2}$-e). Általános szabály, hogy egy műszert mindig a legnagyobb méréshatárba kötünk be, majd fokozatosan csökkentjük a méréshatárt a legkisebbig, amibe még belefér a mérendő érték.



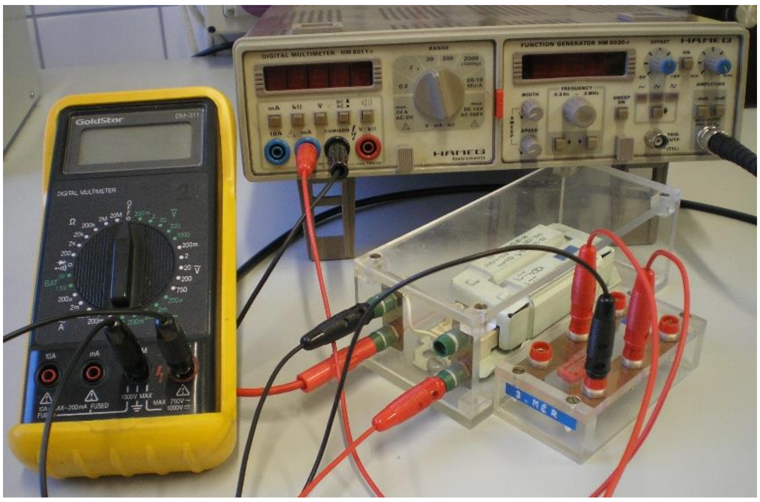
13. ábra. *Az ampermérőként használt műszer és a függvénygenerátor. A generátoron beállított feszültség a kábellel köthető rá az áramkörre.*

2.1. Soros rezgőkör rezonanciagörbéjének mérése

Állítsuk össze a 14. ábra szerinti kapcsolást. Először kössük sorosan a generátor kimenetét, a tekercset, a kondenzátort, és az ampermérőt. Ezután kössük be a voltmérőt úgy, hogy a teljes rezgőkörön, vagyis a kondenzátor és a tekercs soros eredőjén eső feszültséget mérjük vele. (Az ampermérőn eső feszültség ne legyen belemérve!) **Mielőtt az áramkörre rákapcsolnánk a feszültséget, ellenőriztetni kell a mérésvezetővel!**



14. ábra. *Az összeállítandó áramkör*



15. ábra. *Az összeállított áramkör. A sárga tokos műszert használjuk feszültségmérésre.*

Feladat:

1.) Tájékozódás céljából közelítőleg meghatározzuk a rezonanciafrekvenciát:
A hanggenerátoron állítsunk be a szinuszos jelalakot, maximális kimenő feszültségamplitúdót és kb. 20-30 Hz frekvenciát, majd az ampermérőn állítsuk be a méréshatárt. Kezdjük el folyamatosan növelni a frekvenciát, és figyeljük, hogyan változik az áram. Az árammaximumot akarjuk megkeresni, azaz azt a frekvenciát, aminél nagyobb frekvenciák esetén az áram már csökken a frekvencia növelésével. A frekvencia növelésekor egy-egy tartomány végére érve a tartományváltó gomb megnyomása után álljunk vissza a finomszabályozó gomb segítségével arra a frekvenciára, ahonnan a tartományt váltottuk, hogy ne maradjanak ki frekvenciák. Az ampermérőn szükség esetén váltsunk méréshatárt.
Az így meghatározott maximumhely a *közelítő* rezonanciafrekvencia. Azért csak közelítő, mert közben a feszültséget nem szabályoztuk, ezért a körön eső feszültség nem volt állandó. Jegyezzük fel a közelítő rezonanciafrekvenciát az adatlapra.

2.) Kiválasztjuk a rezonanciagörbe felvételénél alkalmazandó konstans feszültséget:
Olvassuk le a közelítő rezonanciafrekvencián a rezgőkörön eső feszültséget, és válasszunk egy tetszőleges értéket ennek kb. a 60-80%-ánál. Ezen a feszültségen fogjuk mérni a rezonanciagörbe felvételekor az áramot, tehát ezt szeretnénk majd látni a rezgőkörre kötött voltmérőn az ampermérő leolvasása előtt. A kívánt feszültségértéket a hanggenerátor amplitúdó gombjával (vagyis a hanggenerátor által leadott feszültség amplitúdójának változtatásával) tudjuk beállítani.

3.) Felvesszük a rezonanciagörbét: legalább 10-12 mérési pontban
a) beállítjuk a frekvenciát,
b) ellenőrizzük és szükség esetén utána állítjuk a konstans feszültséget,
c) leolvassuk az áramerősséget.
Ügyeljünk arra, hogy úgy vegyünk fel mérési pontokat, a mérési pontok alapján megrajzolt rezonanciagörbéből egyrészt a rezonanciafrekvencia 2-3 Hz pontossággal, másrészt a jósági tényező meghatározható legyen. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy egyrészt a maximális áramhoz tartozó frekvencia (a rezonanciapont) környékén 2-3 Hz-enként vegyünk fel mérési pontokat lefelé és felfelé is, másrészt hogy a rezonanciapontban mért áramerősség $\sqrt{2}$-e alatt kevéssel is legyen egy-egy mérési pont a rezonanciafrekvenciánál kisebb és nagyobb frekvenciák irányába is.

Kiértékelés:

Ábrázoljuk a rezonanciagörbét!
A rezonanciagörbéből állapítsuk meg a rezonanciafrekvenciát (ν_0), és számoljuk ki a jósági tényezőt és a tekercs ohmikus ellenállását (23) és (18) alapján:

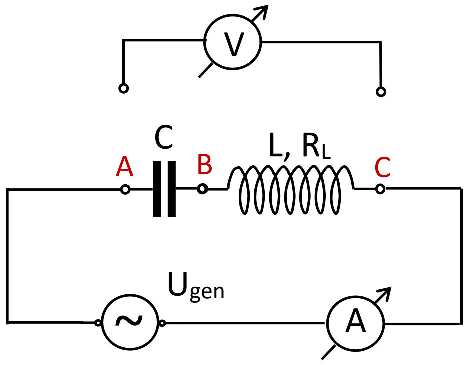
$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1}\ , \qquad R_L = \frac{U}{I_{max}}\ .$$

2.2. Soros rezgőkör áramköri jellemzőinek mérése

Feladat:

Állítsunk be a maximális amplitúdó 35–40%-a környékén egy tetszőleges értéket a hanggenerátoron, és ezt a továbbiakban már ne változtassuk.
Sorban be fogunk állítani három különböző frekvenciát: $0{,}9\cdot\nu_0$, ν_0, $1{,}1\cdot\nu_0$ (ν_0 értékét az előző mérési sorozatból tudjuk). Ezután minden egyes frekvenciánál
a) a voltmérőt a kondenzátor sarkaira kötve leolvassuk az áramerősség (I_1) és a kondenzátoron eső feszültség (U_C) értékét;
b) a voltmérőt a tekercsre kötve leolvassuk I_2-t és U_{LR}-t;
c) a voltmérőt a kondenzátor és a tekercs soros eredőjére kötve leolvassuk I_3-at és U_{LRC}-t.

Ideális voltmérőt feltételezve egy adott frekvencián I_1, I_2 és I_3 teljesen azonos lenne. A közöttük megfigyelhető kis különbségek mutatják a voltmérő befolyását.



***16. ábra**. Feszültségmérés a soros RLC körben:*
kondenzátor: U_{AB}; tekercs: U_{BC} ; eredő: U_{AC}.

<u>Kiértékelés:</u>

2.2.1. Számítsuk ki *a rezonanciafrekvencián mért adatokból* a kapacitást és az induktivitást:

a) kondenzátort ideálisnak tekintjük, tehát

$$C = \frac{I_1}{\omega_0 \cdot U_C} \ ,$$

b) a tekercsnél figyelembe vesszük annak ohmikus ellenállását, vagyis

$$L = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_{LR}}{I_2}\right)^2 - R_L^2} \ .$$

2.2.2. A fenti C és L és a 2.1. mérésben meghatározott R_L értékek felhasználásával számítsuk ki a rezonanciafrekvenciát a (21) alapján, és a jósági tényezőt R_L, L és C értékéből (22) alapján, majd vessük össze a rezonanciagörbéből kapottakkal.

Szorgalmi feladat:
Végezzük el a számolásokat a 0,9 ν_0 ill. az 1,1 ν_0 frekvencián mért adatokkal is.

2.2.3. A $0{,}9 \cdot \nu_0$, ν_0, $1{,}1 \cdot \nu_0$ frekvenciákon mért adatok felhasználásával mindhárom esetben szerkesszük meg az impedanciák vektorábráját az alábbi feltételezésekkel:

- a kondenzátor ideális,
- a tekercs reális, vagyis impedanciájának fázisa 0 és $\pi/2$ közé esik.

A vektorok irányát az egyes mennyiségek fázisa szabja meg.
Az impedanciavektorok hosszát a mért feszültség- és áramértékek hányadosaként kapjuk meg.
Sorosan kapcsolt áramköri elemek impedanciái összeadódnak, ez a vektorábrában az impedanciavektorok vektori összegzését jelenti.
A szerkesztés menete:

- készítsünk léptéket az ábrázoláshoz;
- vegyük fel a komplex síkon a képzetes tengely negatív irányába a kondenzátor impedanciáját;
- körzővel szerkesszük meg az $\tilde{Z}_C + \tilde{Z}_{LR} = \tilde{Z}_{LRC}$ vektorháromszög $\tilde{Z}_C$ -vel szemközti csúcsát;
- rajzoljuk meg $\tilde{Z}_{LRC}$ -t, és párhuzamos eltolással a $\tilde{Z}_{LR}$ vektort.

3. KÉRDÉSEK, GYAKORLÓ FELADATOK

Az alábbi kérdésekre, feladatokra, ill. hasonlóakra lehet számítani a beugró kiszárthelyiben.

MINIMUMKÉRDÉSEK

Mik a mérési feladatok? Szükséges eszközök, kapcsolási rajzok. Mik a leolvasott mennyiségek, és milyen mennyiséget határozunk meg az egyes mérések során?

---

*Igaz-e, hogy soros rezgőkörben
- a kondenzátoron mért feszültség lehet nagyobb is a generátorfeszültségnél?
- a kondenzátor feszültsége késik a generátorfeszültséghez képest?
- a kondenzátor árama késik a generátoráramhoz képest?
- a rezonanciafrekvencián az eredő impedancia független attól, hogy milyen kapacitású kondenzátor és milyen induktivitású tekercs van a körben?
- ha a kondenzátort kisebb kapacitásúra cseréljük, a rezonanciafrekvencia nő?
- a rezonanciafrekvencián a kör eredő impedanciájának minimuma van?
- konstans generátorfeszültség mellett a rezonanciafrekvencián az áramnak minimuma van?
- a tekercs impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?
- a generátorfeszültség *frekvenciájának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a generátorfeszültség *amplitúdójának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a tekercsen ill. a kondenzátoron eső feszültség aránya független a frekvenciától?
- állandó generátorfeszültség mellett a frekvenciát változtatva a kör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián maximális?
- a kondenzátor impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?

**A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

1. Egy kondenzátorból és egy veszteséges tekercsből álló soros rezgőkörben a rezonanciafrekvencián a kondenzátoron 3,6 V-ot, a teljes rezgőkörön 4,8 V-ot mérünk. Mekkora feszültséget mérnénk a tekercsen?

2. Mennyi a kondenzátor kapacitása, ha ν = 199 Hz frekvencián a kondenzátoron eső feszültség effektív értéke 1,6 V és a rajta átfolyó áram effektív értéke 0,5 mA?

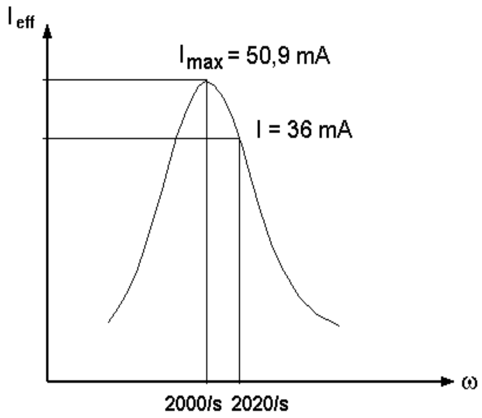
3. Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy L = 0,2 H önindukciós együtthatójú, R = 420 Ω ellenállású veszteséges tekerccsel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 7958 Hz lesz?

4. Sorosan kapcsolunk egy C = 200 nF kapacitású kondenzátort és egy L = 0,5 H önindukciós együtthatójú, R = 420 Ω ellenállású veszteséges tekercset, és egy U_{gen} = 7,0 V effektív feszültségű váltóáramú generátorra kötjük.
a) Mekkora áram fog folyni a körben 600 Hz frekvencián?
b) Mennyi a kör rezonanciafrekvenciája?

5. Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy L = 2,5 H önindukciós együtthatójú, R = 250 Ω ellenállású veszteséges tekerccsel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 318 Hz lesz?
b) Hányszorosa a rezonanciafrekvencián a generátorfeszültség a kondenzátoron eső feszültségnek?

Megoldott feladatok:

6.



Egy soros rezgőkörön folyó áram effektív értékét mérjük az ω körfrekvencia függvényében, miközben a körön a feszültség értéke állandó, U_{eff} = 45,81 V.
ω_0 = 2000 1/s -nál az áram mért (effektív) értéke maximális, I_{max} = 50,9 mA.
Ha ω_1 = 2020 1/s, az áramerősség effektív értéke I_1 = 36 mA.
a) Határozzuk meg, milyen értékű ellenállásból, milyen induktivitású tekercsből és milyen kapacitású kondenzátorból áll a rezgőkör!
b) Mekkora teljesítmény fejlődik a körön ω_0 = 2000 1/s és ω_1 = 2020 1/s körfrekvencián?

Megoldás:

a) ω_0 a rezonancia-körfrekvencia; $Z_0 = U_{eff} / I_{max} = 45{,}81\ \text{V} / 50{,}9\cdot10^{-3}\ \text{A} = 900\ \Omega \rightarrow R = 900\ \Omega$.

ω_1-en $Z_1 = U_{eff}/I = 45{,}81/36\cdot10^{-3} = 1272{,}5\ \Omega = \sqrt{R^2+\left(\omega_1 L-\dfrac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{900^2+\left(2020\,L-\dfrac{1}{2020\,C}\right)^2}$,

és fel tudjuk még írni, hogy $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 2000$.

Az egyenletrendszer megoldása L = 22,60 H, C = 11,06 nF.

b) ω_0 körfrekvencián $P_0 = U_{eff}\cdot I_{max} = 45{,}81\cdot 50{,}9\cdot10^{-3} = 2{,}332$ W;

ω_1 körfrekvencián $P_1 = I_{eff}^2 R = (36\cdot10^{-3})^2\cdot 900 = 1{,}166$ W.

7. A Kossuth adó frekvenciája 540 kHz. Olyan soros rezgőkört akarunk készíteni, melynek itt van a rezonanciafrekvenciája, és a rezonanciafrekvencián a rezgőkör impedanciája 100 Ω, a jósági tényező pedig Q = 20.

a) Mennyi legyen L és C?

b) Ha $U_{g,\,eff}$ = 10 V, mennyi áram folyik a teljes rezgőkörön a rezonanciafrekvencián, és annál 20 kHz-cel nagyobb frekvencián?

Megoldás:

a. a rezonanciafrekvencián $Z_0 = 100\ \Omega \rightarrow R = 100\ \Omega$.

$Q = \omega_0 L / R = 2\pi\nu_0 L / R = 2\cdot\pi\cdot540\cdot10^3\cdot L / 100 = 20 \rightarrow L = 0{,}5895$ mH.

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \rightarrow C = 1/(\omega_0^2 L) = 1/((2\cdot\pi\cdot540\cdot10^3)^2\cdot0{,}59\cdot10^{-3}) = 147{,}4$ pF.

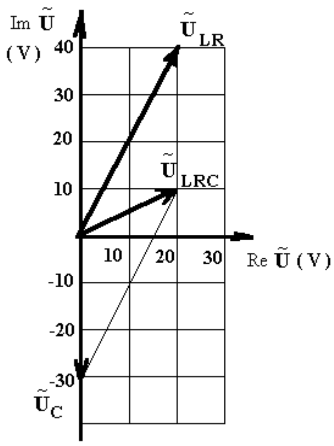
b. a rezonanciafrekvencián $I_{max} = U_{eff} / Z_0 = 10 / 100 = 0{,}1$ A.

$\nu_1 = 560\cdot10^3$ Hz frekvencián az impedancia:

$$Z_1 = \sqrt{R^2+\left(\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{100^2+\left(0{,}59\cdot10^{-3}\cdot(2\pi\cdot560000)-\frac{1}{147{,}4\cdot10^{-12}\cdot(2\pi\cdot560000)}\right)^2} = 174{,}2\Omega,$$

és az áram $I_1 = U_{eff} / Z_1 = 10\ \text{V} / 174{,}2\ \Omega = 57{,}41$ mA.

8. Sorosan kötünk egy veszteséges tekercset egy kondenzátorral, és a rezgőkört egy ω = 5000 1/s körfrekvenciájú váltóáramú generátorra kapcsoljuk.
Mérjük a rezgőkörön folyó áramot (ennek amplitúdója 5 mA) és a feszültséget az egyes elemeken, valamint a teljes rezgőkörön.
Az áram amplitúdója I_0 = 5 mA. A komplex feszültségek vektorábrája az ábrán látható.
a) Számítsuk ki az L önindukciós együtthatót, a C kapacitást és az R ellenállást!
b) Mennyi a kör ν_0 rezonancia frekvenciája és Q jósági tényezője?



Megoldás:

a) $\tilde{U}_C = -30i$ V, $\quad \tilde{Z}_C = \tilde{U}_C / \tilde{I} = -30i / 0{,}005 = -6000i\ \Omega$

és $\quad \tilde{Z}_C = -i/(\omega C) \quad \rightarrow \quad C = 33{,}33$ nF.

$\tilde{U}_{LR} = 20 + 40i$ V , $\qquad \tilde{Z}_{LR} = \tilde{U}_{LR} / \tilde{I} = (20 + 40i) / 0{,}005 = 4000 + 8000i$

$\tilde{Z}_{LR} == R + \omega L i \quad \rightarrow \quad R = 4000\ \Omega = 4\ k\Omega, \quad \omega L = 8000\ \Omega, \quad L = 1{,}6$ H.

b) $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 4330$ 1/s, $\quad \nu_0 = \omega_0/2\pi = 689{,}2$ Hz

$Q = \omega_0 L / R = 1{,}732$.