# 2. MECHANIKA

A mérés célja

A gyakorlat célja egyrészt a korábbi tanulmányainkban megismert és a mindennapi életben gyakran tapasztalt periodikus mozgások kísérleti tanulmányozása, másrészt az elméletben bevezetett modellek (ideális rugó; inga) gyakorlati alkalmazhatóságának vizsgálata.

## ELMÉLET

## 1. Rezgőmozgás

### 1.1. Harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő függvényében:

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, ahol

*A* az amplitúdó (a maximális kitérés),

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ a fázis,

$\omega$ a harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciája,

$\varphi_0$ a fázisállandó, más néven kezdőfázis.

A körfrekvencia és a $\nu$ frekvencia, ill. *T* periódusidő összefüggése:

$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ .

Belátható, hogy egy ideális rugó végéhez rögzített, mozgásba hozott tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez.

**Ideális rugó erőtörvénye (Hooke-törvény)**:

$F = -kx$, ahol

*k* a rugóállandó; mértékegysége [N/m] = [kg/s$^2$],

*x* a rugó megnyúlása, deformációja, azaz a rugó nyugalmi hosszától mért eltérés (megnyúlás esetén pozitív, rövidülés esetén pedig negatív).

**Vízszintes helyzetű rugó** végéhez rögzített *m* tömegű test mozgásegyenlete (súrlódásmentes esetben):

$m\ddot{x} = -kx$ .

Mivel deriválással látható, hogy a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása

$a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\omega^2 x$ a kitéréssel arányos és vele ellentétes előjelű,

és a fenti mozgásegyenlet *m*-mel való osztással hasonló alakra hozható:

$\ddot{x} = -(k/m)x$ ,

így látható, hogy a rugóerő valóban harmonikus rezgőmozgást hoz létre, aminek

körfrekvenciája $\omega = \sqrt{k/m}$ ,

**periódusideje** $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ .

A rezgőmozgás *A* amplitúdóját és $\varphi_0$ kezdőfázisát a kezdeti feltételek – azaz az $x_0$ kezdeti kitérés és $v_0$ kezdősebesség – szabják meg:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + {x_0}^2}\ ; \qquad \varphi_0 = arc\ tg\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) .$$

### 1.2. Csillapított rezgőmozgás

Csillapított rezgőmozgás esetén a szokásos rugóerő mellett egy, a sebességgel arányos, de azzal ellentétes irányú fékező erő is fellép, így a mozgásegyenlet (vízszintes helyzetben):

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}\ .$$

A $\beta = c/(2m)$ mennyiséget csillapítási tényezőnek nevezzük.

Kis csillapítás esetén, azaz ha $\beta < \omega$ (ahol $\omega = \sqrt{k/m}$, az azonos tömeggel és rugóval létrehozott csillapítatlan rezgőmozgás körfrekvenciája), az egyenlet megoldása a következő alakú:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_{cs} t + \varphi_0).$$

Ilyenkor az amplitúdó exponenciálisan csökken:

$$A = A_0 e^{-\beta t}.$$

A csillapított rezgőmozgás $\omega_{cs}$ körfrekvenciája kisebb (periódusideje nagyobb), mint az ugyanazon rugóval és testtel létrehozott csillapítatlan rezgőmozgásé, méghozzá

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}\ .$$

$A_0$ és $\varphi_0$ értékét a kezdeti feltételek ($x_0$ és $v_0$) határozzák meg.

Ha a csillapítás igen nagy (ha $\beta \geq \omega$), akkor a mozgás *aperiodikussá* válik. Az ilyen aperiodikus mozgásokkal azonban itt nem foglalkozunk, mivel a kísérleteinkben a csillapítás ennél jóval kisebb.

### 1.3. Rugó függőleges pozícióban

Eddig a harmonikus és csillapított rezgőmozgás tárgyalásánál nem vettük figyelembe a gravitáció hatását, a függőleges elrendezésnél azonban számolni kell azzal is.

Az $m$ tömegpontot $l_0$ nyugalmi hosszúságú rugóra függesztve a rugó $y$ hosszára felírt differenciálegyenlet (a csillapítást is figyelembe véve):

$$m\ddot{y} = -k(y - l_0) + mg - c\dot{y}.$$

Az $y_E$ egyensúlyi helyzetben $\ddot{y} = \dot{y} = 0$, tehát $-k(y_E - l_0) + mg = 0$, amiből

$$y_E = l_0 + mg/k.$$

Ha bevezetjük az $x$ változót, amely a tömegpont távolságát ettől az egyensúlyi ponttól méri:

$$x = y - y_E = y - (l_0 + mg/k)$$

és átírjuk erre a mozgásegyenletet (felhasználva, hogy $\ddot{x} = \ddot{y}$ és $\dot{x} = \dot{y}$), akkor a függőleges helyzetnél az egyensúlyi megnyúlástól mért távolságra felírt mozgásegyenlet a vízszintes helyzetű rugóra felírt

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad \text{alakot ölti.}$$

Tehát a nehézségi erő módosítja ugyan az egyensúlyi helyzetet, de más hatása nincs a harmonikus rezgőmozgásra.

### 1.4. Rugók soros és párhuzamos kapcsolása

Vegyük észre, hogy a rugó $l_0$ hossza nem játszik közvetlen szerepet a rezgőmozgásban. Közvetett szerepe azonban van, mert pl. az ugyanolyan minőségű, de $2l_0$ hosszúságú rugó rugóállandója fele akkora lesz, mint az $l_0$ hosszúságú rugóé. Rugók toldása, azaz a rugók soros kapcsolása esetén a rugóállandók reciprokának összege adja az eredő rugóállandó reciprokát, rugók párhuzamos kapcsolása esetén a rugóállandók összege adja az eredő rugóállandót.

## 2. Matematikai inga

A matematikai inga egy egyik végén rögzített *L* hosszúságú súlytalan, nyújthatatlan fonálból és a másik végéhez erősített *m* tömegű tömegpontból áll. A tömegpont általánosan a felfüggesztési pont körüli *L* sugarú gömbön mozoghat, és mozgása elég bonyolult lehet. Két speciális esetet szokás vizsgálni, amikor a mozgása könnyen leírható: a síkingát és a kúpingát.

### 2.1. Síkinga

A tömegpont ebben az esetben egy állandó, függőleges síkban mozog.
Jelölje $\alpha$ a fonálnak a függőlegessel bezárt szögét. A test mozgásegyenlete:

$$mL\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha\,,$$

amit egyszerűsítés után az alábbi alakba írhatunk:

$$\ddot{\alpha} = -(g/L)\sin\alpha\,.$$

Ezt a nemlineáris differenciálegyenletet nehéz megoldani. Alkalmazhatjuk azonban a

$\sin\alpha \approx \alpha$ közelítést,

ami 5°-nál csak 0,05% eltérést okoz, 22°-nál azonban már 1%-ot, 90°-nál pedig 18% eltérést.
Így a csillapítatlan rezgőmozgás mozgásegyenletéhez hasonló egyenlethez jutunk:

$\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha$ , ahol is $\omega^2 = g/L$ ,

azaz az inga olyan lengéseket végez, ahol az $\alpha$ az időnek harmonikus függvénye:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\,.$$

Az $\alpha_0$ maximális kitérés és a $\varphi_0$ fázisállandó értékét a kezdőállapot határozza meg.
**A periódusidő** az $\omega^2 = g/L$ egyenletből $\omega = 2\pi/T$ felhasználásával:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}\,,$$

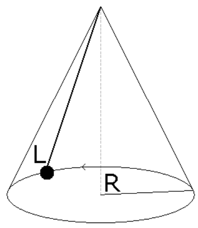
feltéve, hogy a maximális kitérés elég kicsi ahhoz, hogy a $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítés alkalmazható.

### 2.2. Kúpinga (szorgalmi mérés)

A tömegpont ebben az esetben vízszintes síkban mozog egy *R* sugarú körön, ennek megfelelően a fonál egy kúpfelületet súrol.
Levezethető, hogy a kúpinga keringési ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2-R^2}}{g}}\,,$$

ahol *L* az inga hossza, *R* pedig a kör sugara, melyen a tömegpont kering.



## **3. Torziós inga** (szorgalmi mérés)

Ha egy torziós szálhoz rögzítünk egy merev testet és azt forgásba hozzuk (a szálra merőleges síkban), akkor a torziós szál a test forgó mozgását ahhoz hasonlóan lassítja, ill. gyorsítja, mint ahogy egy rugó a végéhez rögzített test rezgőmozgását. Így a test a szálra merőleges síkban ide-oda forog, a nyugalmi helyzetétől mért $\alpha$ szögelfordulás az időben harmonikusan változik.

A torziós szál által kifejtett forgatónyomaték (amely vissza akarja állítani az elcsavarás előtti állapotot) nagysága arányos a szögelfordulással, és ellentétes irányú azzal, azaz

$$M = -D\alpha,$$

ahol $D$ egy, a torziós szálat jellemző arányossági tényező (számértékileg az 1 radián szögelforduláshoz tartozó forgatónyomaték), melynek neve direkciós vagy irányító nyomaték.

A test mozgásegyenletéhez írjuk fel az impulzusmomentum tételét:

$M = \Theta\beta$ , ahol

*M* a forgatónyomaték,

$\Theta$ a test tehetetlenségi nyomatéka a torziós szálra mint tengelyre vonatkoztatva,

$\beta$ pedig a szöggyorsulás: $\beta = \ddot{\alpha}$.

Ha az impulzusmomentum-tételbe beírjuk a fenti „nyomatéktörvényt” (ami az erőtörvény analogonja), akkor megkapjuk a torziós inga mozgásegyenletét:

$$\Theta\ddot{\alpha} = -D\alpha \ .$$

Ez a differenciálegyenlet a $D/\Theta = \omega^2$ jelöléssel az ismert alakba írható:

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha \ ,$$

aminek a megoldása analóg a síkingáéval:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \ .$$

Az $\alpha_0$ és a $\varphi_0$ értékét a kezdőállapot határozza meg,

**a periódusidő** pedig kifejezhető a $D/\Theta = \omega^2$ egyenletből:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}}} \ .$$

## JEGYZŐKÖNYV BEVEZETÉS

| a mérés elvégzésének tényleges dátuma | az együtt dolgozó hallgatók neve | | csoport-szám |
|---|---|---|---|
| **2. MECHANIKA** | a mérésvezető neve | | |
| | | | |

**1.1. Rugóállandó meghatározása különböző terhelések alkalmazásával**

**1.1.1. A rugó legalsó pontjának pozíciója különböző terhelések mellett**

**1.1.2. Terhelés az ismeretlen tömeggel**

Készítsen egy vázlatot a mérési elrendezésről és nevezze meg az egyes eszközöket.
A vázlaton rajzolja be a rugó végére akasztott PVC rúd + terhelés rendszerre ható erőket úgy, hogy a vektorok hossza arányos legyen az erők nagyságával.
Írja le röviden, hogy hogyan kell mérni, mit kell változtatni, és mi a leolvasandó mennyiség.

**1.2. Harmonikus rezgőmozgás vizsgálata**

**1.2.1. Rezgésidő mérése három különböző terhelésnél**

**1.2.2. A rezgésidő és az amplitúdó közötti összefüggés kimérése**

Készítsen egy vázlatot a mérési elrendezésről és nevezze meg az egyes eszközöket.
A vázlaton rajzolja be a rugó végére akasztott PVC rúd + terhelés rendszerre ható erőket a rezgőmozgás legfelső és legalsó pontjában, úgy, hogy a vektorok hossza arányos legyen az erők nagyságával.
Írja le röviden, hogy hogyan kell mérni, mit kell változtatni és mi a leolvasandó mennyiség.

**2.1. Matematikai inga - síkinga**

**2.1.1. Síkinga lengésidejének mérése kis kitérítéssel**

**2.1.2. Síkinga lengésidejének mérése nagyobb kitérítéssel**

Készítsen egy vázlatot a mérési elrendezésről és nevezze meg az egyes eszközöket.
Írja le röviden, hogy hogyan kell mérni, mit kell változtatni és mi a leolvasandó mennyiség.

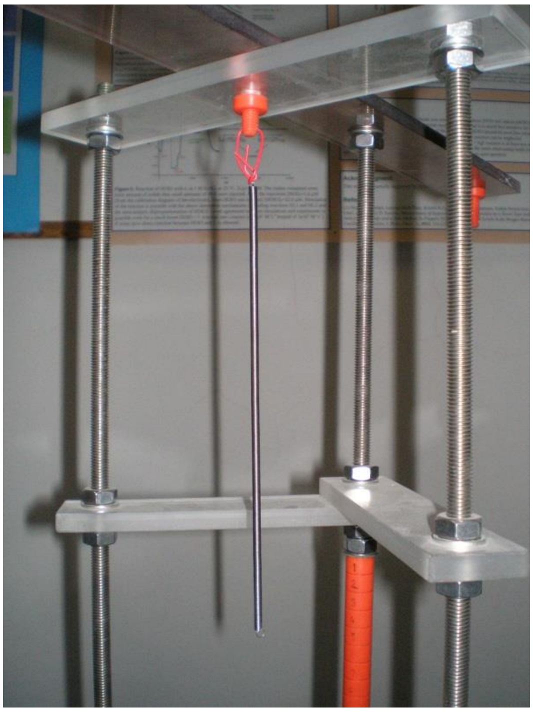
Ha a szorgalmi feladatként megjelölt méréseket is elvégzi, készítsen azokhoz is hasonló bevezetést.
(A szorgalmi feladatok leírását nem kell előre elkészíteni.)

## MÉRÉSEK

A mérésekhez a fotón látható állványt használjuk. Erre van felfüggesztve egy rugó, és ezen van egy skála, amiről le lehet olvasni a rugó végének a pozícióját.
A rugót fogjuk használni torziós szálként is.
Az állványon van egy damilra függesztett anyacsavar, amit síkingaként tudunk használni.
A kúpinga periódusidejének mérése csak szorgalmi feladat, meg lehet mérni a laborban is, vagy otthon is, pl. egy anyacsavart egy fonál végére rögzítve.

A stoppert a jobb oldali gombbal lehet indítani és megállítani, és a bal oldali gombbal lehet nullázni.

### *1.1. Rugóállandó meghatározása különböző terhelések alkalmazásával*

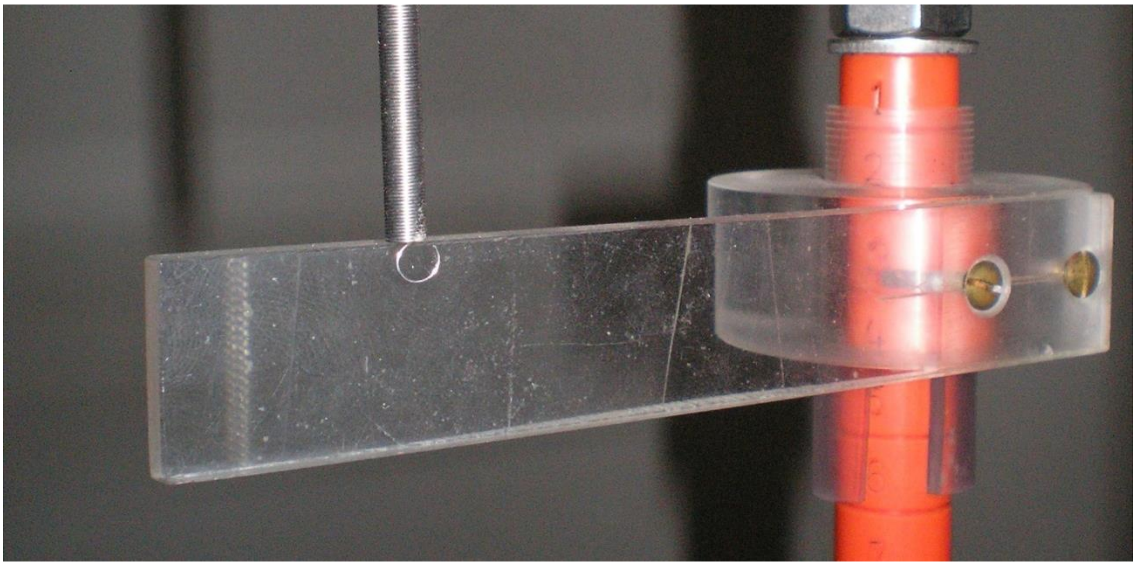


Eszközök:
- állvány, mm-es leolvasásra alkalmas skálával
- rugó
- anyacsavarok mint ismert tömegek
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- elektronikus mérleg

**Mérési feladatok:**

Mérje meg a piros PVC rúd tömegét a mérlegen.

A rugó legalsó pontja pozíciójának leolvasása:



A rugó alsó pontjának pozícióját úgy tudjuk leolvasni, hogy a skálán le-fel csúsztatható plexi gyűrűről kinyúló jelölő felső síkját a rugó alsó végéhez állítjuk (az alatta levő csődarabbal tudjuk rögzíteni, hogy ne kelljen végig fogni), majd leolvassuk, hogy a plexi gyűrű teteje a skála milyen értékénél áll. A skála 1 cm magas hengerekből áll. Leolvassuk a számot arról a hengerről, ami teljes egészében a plexi gyűrű fölött van: ezen a fotón ez az 1. A millimétereket pedig úgy olvassuk le, hogy a plexi gyűrű fölött van egy 1 cm magas kis vékony gyűrű, ami milliméterenként be van karcolva. Erről leolvassuk, hogy hány mm van a még teljesen látszó cm-es gyűrű alja és a plexi gyűrű teteje között: ezen a fotón 7 mm (ill. elfogadható az is, ha 8 mm-nek olvassuk le). Tehát a leolvasandó érték 1,7 cm. (Figyelem, van olyan állvány, ahol a plexi gyűrűk két oldalán eltérő számok vannak, figyeljünk arra, hogy ebben az esetben mindig ugyanarról az oldaláról olvassuk le.)
A rugó legalsó pontjaként választhatjuk az alján levő kis hurok alját, de választhatjuk a menetek végét is, lényeg, hogy mindig azonos pontot mérjünk.

A rugó terhelése:
A piros PVC rúd a tetején levő gemkapocs segítségével akasztható a rugóra.
Az anyacsavarok áthúzhatók ezen a gemkapcson, fentről kell őket ráhúzni a PVC rúdra.
Az anyacsavarok tömegét nem kell megmérni, a tömegük a dobozuk tetejéről olvasható le.

Az ismeretlen tömeg egy szürke henger, amit szintén rá lehet húzni a PVC tartóra.

**1.1.1. A rugó legalsó pontja pozíciójának leolvasása különböző terhelések mellett**

Az adatlapon levő táblázatba mindig csak azt írja fel, hogy mi van a rugón, nem kell kiszámolni a terhelő tömegeket.

Végezze el a mérést

- először a PVC rúd nélkül,
- azután az üres PVC rúddal,
- majd 1, 2, 3, … anyacsavarral terhelve, amíg a skála engedi!

Szükség esetén – ha a rugó gyengébb vagy erősebb – módosítson a terhelő anyacsavarok számán!

**1.1.2. Terhelés az ismeretlen tömeggel**

Tegye a PVC rúdra az ismeretlen tömeget, és olvassa le a rugó legalsó pontjának pozícióját! Akinek erős a rugója, tegyen néhány anyacsavart is az ismeretlen tömeg mellé, és azt a pozíciót jegyezze fel. Annyi anyacsavart tegyen az ismeretlen tömeg mellé, hogy a rugó megnyúlása a lineáris szakaszra essen, azaz oda, ahol egy-egy csavar feltételekor kb. ugyanannyival nyúlik meg a rugó.

**<u>Kiértékelés:</u>**

**1.1.1. A rugóállandó meghatározása különböző terhelések alkalmazásával**

Készítse el a rugó kalibrációs diagramját, azaz ábrázolja a rugó legalsó pontjának $x$ pozícióját az $n$ anyacsavarszám függvényében! A diagram készülhet A4-es mm-papíron vagy Excelben.

Az $x$ – $n$ diagramon nézze meg, mekkora terheléstől kezdődően illeszkednek a pontok egy egyenesre. A kezdeti nem illeszkedő pontokat hagyja ki a számolásból, és írja le az adatlapra, hogy mely pontokat használja fel a számításhoz!

A rugóállandó kiszámolása: kifejezzük az egyensúlyi egyenletből a rugó végének $x$ pozícióját a terhelő anyacsavarok számának függvényében ($n$), meghatározzuk az egyenes meredekségét, és abból kiszámoljuk a rugó $k$ rugóállandóját.

Ideális rugó esetén azt írhatnánk fel, hogy

$(m_{\mathrm{PVC}} + n \cdot m_{\mathrm{cs}})\, g = k\,(x – x_0)$ , ahol

$x – x_0$ a rugó megnyúlása,

$x$ a rugó hossza, $x_0$ a nyugalmi hossz, ill. a leolvasott pozíciók.

A méréshez használt rugó nem ideális rugó, nem követi a Hooke-törvényt, nem teljesül az, hogy a nyugalmi hossznál nem ébred erő a rugóban.

A rugóban nyugalmi állapotban is fellépő $F_0$ erőt is figyelembe véve azt írhatjuk fel, hogy

$(m_{\mathrm{PVC}} + n \cdot m_{\mathrm{cs}})\, g = k\,(x – x_0) + F_0$ .

Fejezzük ki ebből a mért x-et:

$x = (m_{\mathrm{cs}} \cdot g/k) \cdot n + [\, x_0 + m_{\mathrm{PVC}} \cdot g/k – F_0/k \,]$ .

Látjuk, hogy $x(n)$ egy olyan egyenes egyenlete, aminek

a meredeksége $m_{\mathrm{cs}} \cdot g/k$, a tengelymetszete $x_0 + m_{\mathrm{PVC}} \cdot g/k – F_0/k$.

A meredekség meghatározása többféleképpen végezhető:

- Excelben a trendvonal egyenletéből kiolvasva (min. 4 értékes jegyre);
- az Excel beépített függvényét használva;
- egyéb függvényillesztő programmal;
- a honlapon található lineáris regressziós képlet felhasználásával, a számításokat számológéppel vagy Excellel végezve.

Segítség a lineáris regressziós képlet alkalmazásához:

az $y = ax + b$ egyenes meredeksége: $a = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$

Jelen esetben $x := n$, $y := x$, és $a = m_{cs} \cdot g/k$,

tehát $a = \dfrac{\overline{n \cdot x} - \overline{n} \cdot \overline{x}}{\overline{n^2} - \overline{n}^2} = m_{cs} \cdot g/k$ $\rightarrow$ ebből kiszámolható $k$ értéke.

Számológéppel számolva az adatlap végén található táblázatba kell írni a számolásokat.
Excelt használva a fájlt kérjük feltölteni a Moodleba, úgy, hogy minden cellánál legyen követhető, hogy az milyen értéket tartalmaz. (Nem elég a fájlról készült képernyőfotó!) A meredekség értékét másolja be az adatlapra.
Ne feledkezzen el a mértékegységekről!

**1.1.2. Terhelés az ismeretlen tömeggel**

Az ismeretlen tömeget úgy határozzuk meg, hogy a rugó kalibrációs diagramján leolvassuk, hogy az adott tömeggel mért hossz hány anyacsavarnak felel meg, és ezt a darabszámot szorozzuk egy anyacsavar tömegével. (Természetesen, ha volt mellette néhány anyacsavar is, akkor azokat levonjuk.) A diagramon jelölje be a leolvasott pozíciót és az ahhoz tartozó *n* értéket.

***1.1.3.*** *Szorgalmi feladat:*

*Becsülje meg a tömegmérés hibáját abból kiindulva, hogy a leolvasás hibája 1 mm! (A számolást a jegyzőkönyvbe írja.)*

## *1.2. Harmonikus rezgőmozgás vizsgálata*

Eszközök:

- állvány
- rugó
- anyacsavarok
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- stopper

**Mérési feladatok:**

**1.2.1. Rezgésidő mérése három különböző terhelésnél**

Három mérést végezzen három különböző terheléssel, pl. 4, majd 7, majd 10 anyacsavarral terhelve; illetve a rugó terhelhetőségének megfelelően válasszon három különböző terhelést, amivel stabil rezgést lehet létrehozni.
Ügyeljen arra, hogy a függőleges rezgés mellett oldalirányú ingamozgás és csavarodó rezgés minél kevésbé lépjen fel. Ezt a legjobban úgy lehet elérni, ha a piros PVC rudat függőlegesen lefelé meghúzva engedjük el. Az amplitúdó ne legyen annyira nagy, hogy a rezgés tetején a rugó menetei egymáshoz érjenek (ezt kattogó hang, és szemmel láthatóan nem harmonikus mozgás jelzi). Nagy amplitúdónál a PVC rúd akár le is ugorhat a rugóról a rezgőmozgás tetején.
Hozza rezgésbe a rugót és mérje meg 10 rezgés idejét mindhárom esetben!

**1.2.2. A rezgésidő és az amplitúdó közötti összefüggés kimérése**
A legnagyobb terhelésnél végezze el ezt a kísérletet. A mérést három különböző amplitúdóval kell elvégezni, amiket a következőképpen számoljon ki: Először keresse meg az adott terheléshez tartozó egyensúlyi helyzetet, mérje meg, mekkora ekkor a távolság a PVC rúd alja és az állvány alja között és vonjon le belőle 3 cm-t: ez lesz a legnagyobb amplitúdó. A második és harmadik amplitúdó ennek a harmada ill. kétharmada legyen. Számolja ki, milyen helyzetből kell elindítani a rezgőmozgást ezekben az esetekben. Mindhárom amplitúdóval mérje meg 10-10 rezgés idejét.

***1.2.3.*** *Végezze el az 1.2.1. mérést az ismeretlen tömeggel is! (Szükség esetén az ismeretlen tömeg mellé tegyen néhány anyacsavart is.)*

***1.2.4.*** *Szorgalmi feladat: Mérje meg két különböző terhelésnél is, hogy kb. mennyi idő alatt csökken a felére a rezgés amplitúdója!*

**Kiértékelés:**
**1.2.1. Rezgésidő mérése három különböző terhelésnél**
Számolja ki a rugóállandót a három különböző terheléssel mért rezgőmozgás periódusidejéből, és hasonlítsa össze ezeket az értékeket az **1.1.1.** mérésben kiszámolt értékkel! A terhelő tömeg kiszámolásánál ne feledkezzen meg a PVC rúd tömegéről!

**1.2.2. A rezgésidő és az amplitúdó közötti összefüggés kimérése**
Értelmezze a megfigyelt összefüggést (1-2 mondat).

***1.2.3.*** *Szorgalmi feladat:*
*A mért periódusidőből számolja ki az ismeretlen tömeget!*

***1.2.4.*** *Szorgalmi feladat:*
*Magyarázza meg az eredményt! Melyik terhelésnél csillapodik gyorsabban, miért?*

## *2.1. Matematikai inga - síkinga*

Eszközök:
- damilra kötött anyacsavar az állványon
- mérőszalag
- stopper

**Mérési feladatok:**
Mérje meg az inga hosszát: a mérőszalag elejét tegye a damil felfüggesztési pontjához (a damilt tartó gemkapocs aljához), és olvassa le az anyacsavar tömegközéppontjának helyét (a lyuk közepét).
Hozza lengésbe az ingát! Figyelje meg, hogy a gemkapocs is mozog-e. Ha igen, akkor a pontos mérés érdekében mérés közben meg kell fogni, vagy meg kell keresni azt a lengési síkot, amikor nem mozog. Az inga lengési síkja kerülje el az állvány lábait. Próbálja úgy elindítani az ingát, hogy lengési síkja ne, vagy csak lassan forduljon el (a 10 lengés alatt még ne ütközzön bele az állvány lábaiba).

### 2.1.1. Síkinga lengésidejének mérése kis kitérítéssel

Hozza lengésbe az ingát kis kitéréssel! (Azért kell kis kitéréssel mérni, mert az elméletből tudjuk, hogy a $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítés miatt a periódusidő képlete csak kis kitérítésre érvényes képlet, $5^\circ$-nál csak 0,05% az eltérés, de $22^\circ$-nál már 1%.)

Mérje meg 10 periódus idejét!

Ismételje meg a mérést ötször (azonos, kis kitéréssel).

### 2.1.2. Síkinga lengésidejének mérése nagyobb kitérítéssel

Mérje meg a periódusidőt háromszor, úgy, hogy egyre nagyobb kitéréssel indítja az ingát! Itt is 10 periódus idejét mérje, de mindegyiket csak egyszer.

*Szorgalmi feladat:* Végezzen összesen 5 kitérésnél mérést, úgy, hogy minden kísérletnél megbecsüli a legnagyobb kitérés szögének nagyságát is.

**<u>Kiértékelés:</u>**

### 2.1.1. Síkinga lengésidejének mérése kis kitérítéssel

Számolja ki a periódusidőt ($\overline{T}$), és a periódusidő hibáját ($\Delta T$) 95%-os konfidenciaszinten!

A periódusidőből számítsa ki a $\overline{g}$ értékét!

Számolja ki a Gauss-féle hibaterjedést alkalmazva, hogy mekkora $\Delta g$ hibával lehet meghatározni $g$ értékét! A hosszmérés hibájára becsült értéket vegyen! Az 1 mm-es skálaosztásnál nagyobb a mérési hiba, mert a leolvasandó érték az anyacsavar közepénél egy képzeletbeli pont, a mérőszalag elejének helyzete is bizonytalan, és a damil egy kissé rugalmas, ezek miatt a reális érték 3–5 mm.

Ellenőrizze, hogy a $g$ = 9,81 m/s$^2$ érték beleesik-e a kiszámolt $\overline{g} \pm \Delta g$ intervallumba; ha nem, keressen rá elfogadható magyarázatot!

### 2.1.2. Síkinga lengésidejének mérése nagyobb kitérítéssel

Írja le és értelmezze, hogy mit tapasztalt: hogyan változik a periódusidő a maximális kitérés függvényében, és miért?

*Szorgalmi feladat:*

*Ábrázolja a mért periódusidőt a maximális kitérés szögének függvényében! A diagram készíthető Excelben is.*

## *2.2. Szorgalmi feladat:  Matematikai inga - kúpinga*

*Eszközök:*

- *damillal összekötött két anyacsavar, vagy otthon végzett mérésnél egy fonálra kötött nagyjából pontszerűnek tekinthető test*
- *mérőszalag*
- *stopper*

***Mérési feladat (szorgalmi):***

*Mérje meg az inga hosszát: a mérőszalag elejét tegye ahhoz a jól definiált ponthoz, ahol a damil, ill. a fonál rögzítve van (a laborban ahhoz a ponthoz, ahol az egyik anyacsavarra rá van kötve), és olvassa le a másik test (a laborban a másik anyacsavar) tömegközéppontjának helyét.*
*Hozzon létre stabil körpályát, és mérje meg a kúpinga keringési idejét „kis”, ill. „nagy” sugarú körön! Mindkét esetben a 10 kör megtételéhez szükséges időt mérje meg.*

***Kiértékelés:***

*2.2. Számolja ki a „kis”, ill. „nagy” kör sugarát!*

## 3. Torziós inga

Eszközök:

- állvány
- rugó
- hengeres műanyag doboz
- textilbakelit korongok
- stopper
- mérőszalag
- elektronikus mérleg

**Demonstráció**: komplex periodikus mozgás.

***Mérési feladatok (szorgalmi):***

### *3.1. A torziós inga periódusidejének mérése (szorgalmi)*

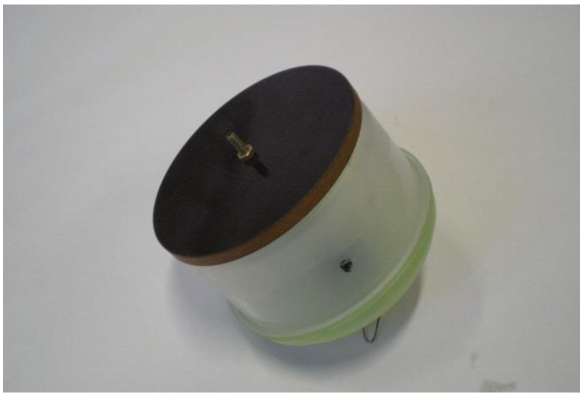
*Akassza a műanyag dobozt a rugóra, majd tekerje 3 fordulatot jobbra vagy balra a dobozt. Úgy engedje el, hogy a doboz ne rugózzon (vagyis elengedéskor meg kell találni azt a magasságot, ami a dobozzal terhelt rugó egyensúlyi helyzete), és ne is lengjen, mint egy inga (vagyis a rugó legyen függőleges).*
*Mérje meg a periódusidőt! Itt a hosszabb periódusidő miatt elég 1 periódus idejét mérni. A félperiódusnál a doboz egy pillanatra megáll, majd a másik irányba kezd forogni, és a második megállásnál érkezik vissza a kiindulási állapotba.*
*Ismételje meg a mérést úgy, hogy indításkor a dobozt 5 fordulattal tekeri meg!*

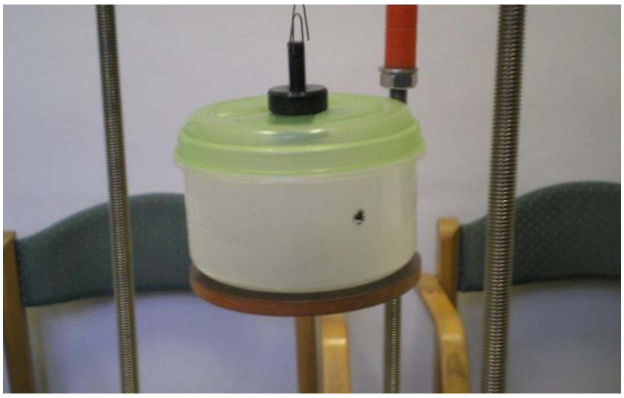
***3.2. A műanyag doboz tehetetlenségi nyomatékának meghatározása (szorgalmi)***

***3.2.1.** A tehetetlenségi nyomaték meghatározása két mérés alapján*

*Erősítsen egy textilbakelit korongot a doboz aljához, és mérje meg így is a periódusidőt! Indításkor 3 fordulatot tekerjen a dobozon.*

*Mérje meg a korong tömegét elektronikus mérleggel, a sugarát pedig mérőszalaggal.*





***3.2.2.** A tehetetlenségi nyomaték meghatározása nemlineáris illesztéssel*

*Erősítsen egy vagy több eltérő sugarú korongot is a doboz aljára és mérje meg azokkal is a periódusidőt! Legalább még két mérést végezzen.*

***<u>Kiértékelés:</u>** Szorgalmi feladatok!*

***3.1.** Hasonlítsa össze a két periódusidőt, és értelmezze a megfigyelést!*

*A **3.2.1.** vagy a **3.2.2.** mérési feladatok közül elegendő csak az egyik módon kiértékelni.*

*Számolja ki a korong(ok) tehetetlenségi nyomatékát a korong(ok) adataiból!*

*Korong tehetetlenségi nyomatéka:*

$\Theta_{korong} = ½\, m\, R^2$.

***3.2.1.** Számítsa ki a doboznak a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát a két mért periódusidőből! Írja fel a*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}}\ .$$

*összefüggést a két mérés adatait behelyettesítve:*

*az üres dobozzal mért idő esetén $\Theta = \Theta_{doboz}$,*

*a dobozra erősített koronggal mért idő esetén $\Theta = \Theta_{doboz} + \Theta_{korong}$ ,*

*majd rendezze az egyenletrendszert, és fejezze ki $\Theta_{doboz}$ értékét.*

*A torziós szál D direkciós nyomatékát nem szükséges kiszámolni.*

***3.2.2.** Ábrázolja a $T – \Theta$ függvényt, és határozza meg a doboz tehetetlenségi nyomatékát nemlineáris függvényillesztéssel!*

## KÉRDÉSEK, GYAKORLÓ FELADATOK

Az alábbi kérdésekre, feladatokra, ill. hasonlóakra lehet számítani a beugró kiszárthelyiben.

**MINIMUMKÉRDÉSEK:**
a kötelező mérések felsorolása, a szükséges eszközök, a mérendő és a kiszámítandó mennyiségek.

---

**FOGALMAK, KÉPLETEK**

- harmonikus rezgőmozgás kitérés – idő függvénye;
- frekvencia, körfrekvencia, amplitúdó;
- lineáris rugalmas erő, rugóállandó;
- rugó végéhez rögzített csillapítatlan rezgőmozgást végző test periódusideje;
- síkinga periódusideje;
- a képletekben szereplő mennyiségek mértékegysége.

**RÖVID ELMÉLETI KÉRDÉSEK**

- egy rugós erőmérő rugójának a hossza (bizonyos határokon belül) arányos a rá ható erővel?
- ha van két egyforma hosszú és egyforma $k_1$ rugóállandójú rugónk és az egyiket a másik végéhez toldjuk, akkor az így kapott rugó $k$ rugóállandója az egyes rugókénak kétszerese lesz ($k = 2\,k_1$)?
- a rugóállandót kétszeresére növelve, a rugó végén lévő tömegpont tömegét pedig felére csökkentve harmonikus rezgőmozgás esetén a periódusidő is a felére csökken?
- síkinga periódusideje egyenesen arányos az inga hosszával?
- síkinga periódusideje függ a kitéréstől?

**A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

**SZÁMOLÁSI FELADATOK**

**1.** Egy rugós erőmérő rugóállandója 5,0 N/m. A rugómérőt 6 anyacsavarral terhelve a rugó végének pozíciója 6,2 cm. Most ráfüggesztünk a mérlegünkre egy Túró Rudit is (a 6 anyacsavar mellé) és azt tapasztaljuk, hogy a rugó végének pozíciója 12,1 cm-re változott.
**a)** Mennyi a Túró Rudi tömege?
**b)** A 6 anyacsavar és a rugó végén levő tartószerkezet tömege együttesen 60 g.
Mennyi a rezgésideje ennek a rendszernek,
és mennyire nő meg ez a Túró Rudi hatására?

*Megoldás:*

**a)** $m_{\text{TúróRudi}}\, g = k\, \Delta\ell \;\rightarrow\; m_{\text{TúróRudi}} = k\, \Delta\ell \,/\, g = 5{,}0 \cdot (12{,}1 – 6{,}2) \cdot 10^{-2} / \, 9{,}81 = 3{,}007 \cdot 10^{-2}$ kg = 3,007 dkg

**b)** $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ $\quad m_{\text{6 anyacsavar + tartó}} = 0{,}06$ kg $\rightarrow$ $T_1 = 0{,}6883$ s

$m_{\text{6 anyacsavar + tartó + TúróRudi}} = 0{,}09$ kg $\rightarrow$ $T_2 = 0{,}8430$ s

**2.** Kísérleteinkhez egyforma *k* erőállandójú súlytalan rugók és *m* tömegű csavarok állnak a rendelkezésünkre. Ha egy rugó végére 1 db csavart helyezünk, akkor a mért rezgésidő *T*.

**a)** Hányszorosa ennek a *T* időnek egy olyan rendszer periódusideje, amelyben *N* darab csavart teszünk a rugó végére?

**b)** 2 rugót párhuzamosan kötünk egyetlen csavarra (a csavart két rugóval függesztjük fel). Mekkora lesz így a rezgés periódusideje? Indokoljuk a választ!

**c)** *N* darab rugót összekötünk úgy, hogy az egyik rugó végét a másik rugó elejébe akasztjuk, azaz egy "rugó lánc" jön így létre. E lánc végére egyetlen csavart teszünk. Mennyivel hosszabb vagy rövidebb ennek a rendszernek a periódusideje, mint az egy rugót és egy csavart tartalmazó rendszeré?

*Megoldás:*

**a)** Mivel $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, a tömeget *N* -szeresére növelve a periódusidő $\sqrt{N}$-szeresére nő.

**b)** Párhuzamosan kötött rugók eredő rugóállandója az egyes rugóállandók összege, vagyis a két párhuzamosan kötött egyforma rugó eredőjét egy kétszer akkora rugóállandójú rugónak tekinthetjük, így a periódusidő $\sqrt{2}$-ed részére csökken.

**c)** Sorosan kötött rugók eredő rugóállandójának reciproka az egyes rugóállandók reciprokának összege, ezért az *N* db egymás után kötött egyforma rugó soros eredője egy olyan rugónak tekinthető, melynek rugóállandója *N*-ed része egy rugóénak; így a periódusidő $\sqrt{N}$-szeresére nő.

**3.** Egy $\ell_0$ = 22 cm hosszú, $k$ = 4,2 N/m rugóállandójú rugóra *m* tömegű testet akasztunk, meghúzzuk lefelé $\Delta\ell$ = 12 cm-t, elengedjük, és megmérjük 10 rezgés idejét: $t_{10}$ = 8 s.

**a)** Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?

**b)** Mennyi lenne 10 rezgés ideje, ha kétszer akkora tömeget akasztanánk a rugó végére? (A rugót kezdetben ugyanannyival húzzuk ki.)

*Megoldás:*

**a)** $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 8/10 = 0{,}8\ \text{s} \quad \rightarrow \quad m = k\ (T / 2\pi)^2 = 0{,}06809\ \text{kg}$.

( $mg = k\,\Delta\ell$ itt nem érvényes, mert a feladatban megadott $\Delta\ell$ nem egyensúlyi megnyúlás.)

**b)** $t_{10,\,2m} = 10 \cdot 2\pi\sqrt{2m/k} = \sqrt{2} \cdot t_{10} = \sqrt{2} \cdot 8 = 11{,}31\ \text{s}$.

**4.** Neil Armstrong a Hold felszínén egy *L* = 26,0 cm hosszú matematikai inga periódusidejét 2,50 s-nak mérte. Mekkora nehézségi gyorsulás számítható ebből?

*Megoldás:* $T = 2\sqrt{L/g} \quad \rightarrow \quad g_{\text{Hold}} = L\ (2\pi / T)^2 = 1{,}642\ \text{m/s}^2$

**5.** Kísérleteinkhez egyforma *k* erőállandójú súlytalan rugók és *m* tömegű csavarok állnak a rendelkezésünkre. Ha egy rugó végére 1 db csavart helyezünk, akkor a mért rezgésidő *T*. Hányszorosa ennek a *T* időnek egy olyan rendszer periódusideje, amelyben 8 darab csavart helyezünk 2 párhuzamosan kötött rugó végére (a 8 csavart két rugóval függesztjük fel)?

*Megoldás:* $m' = 8\,m$; $k' = 2\,k$; $T' = 2\pi\sqrt{8m/(2k)} = 2\,T$, kétszerese.