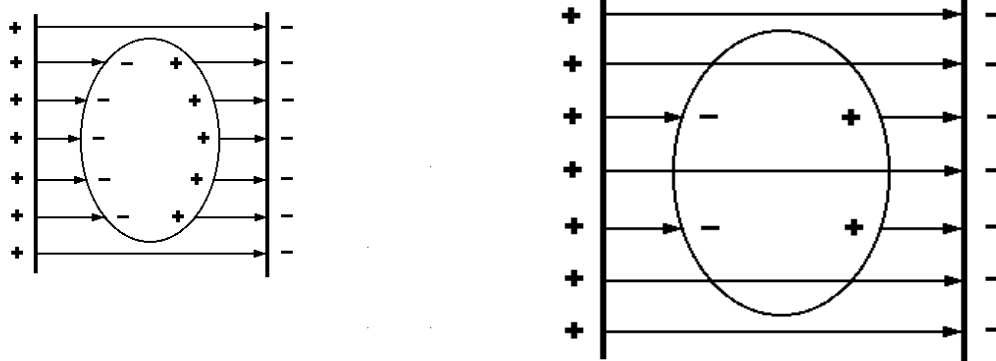


VI.2 A dielektromos polarizáció vektora

Vezető és szigetelő elektrosztatikus térben

Már az elektrosztatikus alapjelenségeknél láttuk, hogy az anyagok elektromos viselkedés szempontjából két nagy csoportra oszthatók: vezetőkre és szigetelőkre. Vezető belsejében elektrosztatikus tér nem létesíthető, mert az ott lévő töltéshordozók az ilyen tér hatására mozogni kezdenének. Azaz ebben az esetben áram indulna meg, és többé már nem beszélhetnénk sztatikáról. Ha tehát egy vezetődarabot elektrosztatikus térbe helyezünk (pl. kondenzátor lemezei közé, ahogy az ábrán látható), akkor a tér nem hatolhat a vezető belsejébe. Mi az, ami megakadályozza ezt a behatolást? Ez az induált töltés. Az eredetileg elektromosan semleges vezető felületén ugyanis az elektromos megosztás révén éppen akkora induált felületi töltés jön létre, amekkora a külső teret a vezető belsejében tökéletesen leárnyékolja.



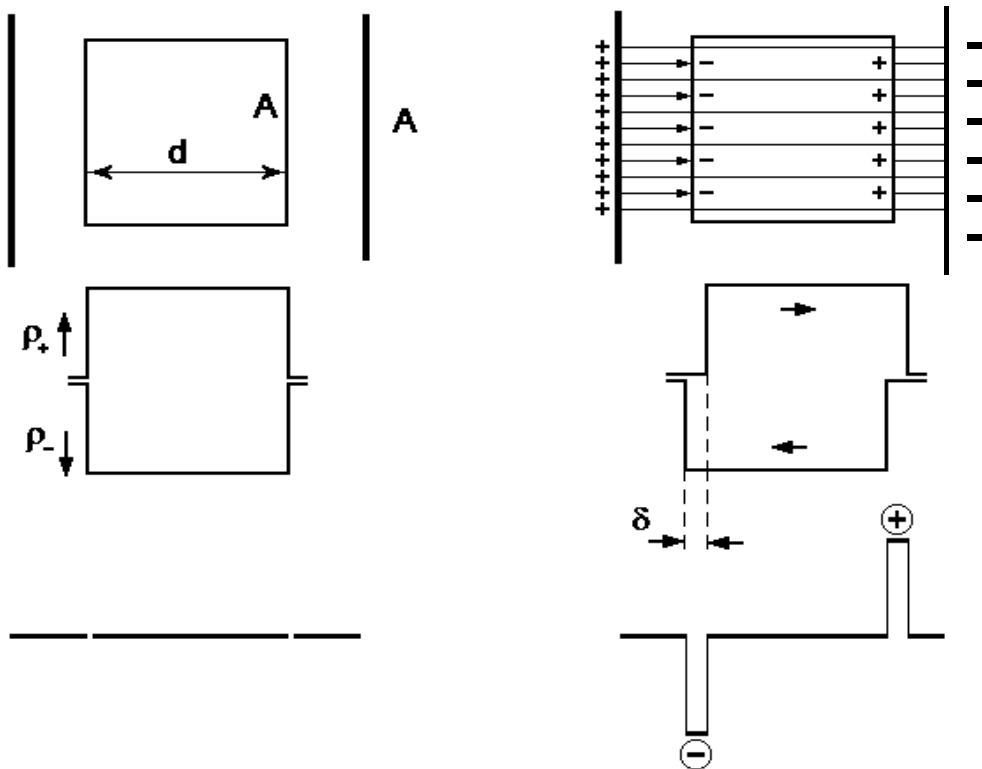
*Elektrosztatikus megosztás kondenzátor lemezei közé helyezett
a) vezetőben* *b) szigetelőben*

Ha egy szigetelő darabot helyezünk a kondenzátor lemezei közé, akkor a kísérletek tanúbizonysága szerint itt is létrejön egy felületi töltéssűrűség, az úgynevezett polarizációs töltés, és ez a töltés ez esetben is a külső tér lerontására törekszik. Azonban két fontos különbség jelentkezik a vezetőhöz képest. Egyrészt, mint tudjuk, a szigetelő felületéről a polarizációs töltés nem vezethető el. Másrészt ebben az esetben a felületi töltés nem képes a külső tér tökéletes leárnyékolására, és így az elektrosztatikus tér részben behatol a szigetelő anyag belsejébe. Azért, hogy ezeket a tapasztalati tényeket elméletileg értelmezni tudjuk, szükségünk van a szigetelő anyag valamilyen egyszerűsített modelljére. Továbbá pontosan meg kell határozni, hogy mit értsünk azon a meghatározáson, hogy "az anyag belsejében" mérés-technikai szempontból. A továbbiakban ezekkel a kérdésekkel foglalkozunk.

A szigetelő anyag folytonos modellje. A dielektromos polarizáció vektora

Kiindulási pontunk az a kísérletek által igazolt feltételezés, hogy az anyagi közeg a benne lévő dipólusok illetve dipólusláncok révén fejti ki a hatását. Ez a molekuláris kép igen szemléletes. Tudjuk például, hogy egyes molekulák -ilyen például a vízmolekula is- állandó dipólusok, és ezek a külső tér hatására mintegy "felsorakoznak". Más molekulák pedig -melyek eredetileg nem dipólusok, mint például a benzol molekulák- éppen a külső tér hatására válnak dipólussá, mivel a külső tér a pozitív és negatív töltések súlypontját elmozdítja e molekulákon belül. Ezen szemléletes molekuláris kép közvetlen alkalmazása azonban statisztikus fizikai módszereket igényel. Ehelyett most az anyagi közeg egyszerűbb,

kontinuum modelljét kívánjuk alkalmazni. A szigetelő anyagot -vagy más szóval a dielektrikumot- tehát az egyszerűség kedvéért folytonosnak tételezzük fel, ahol a töltésszétválás, vagyis a dipólus karakter tetszés szerinti kis térfogatban lokálisan is értelmezhető. A folytonos modell feltételezi, hogy akármeddig is darabolunk, akármilyen kis részre is bontunk egy dielektrikumot, mindig ugyanolyan irányú, csak kisebb dipólust kapunk, mint amilyen irányú dipólust a kiindulási szigetelő anyag darabka képviselt (Ez persze csak homogén dielektrumok esetén igaz. De feltételezhetjük, hogy a térfogat csökkentésével egyre jobb közelítés a homogén közeg.). Ez egyrészt azt jelenti, hogy az anyagban jelenlévő tényleges molekuláris dipólusok véges méreteivel nem számolunk. Másrészt a darabolás nem eredményezheti a dipólus pozitív és negatív töltéseinek egymástól való elválasztását: a dipólust nem lehet pozitív és negatív töltésre "kettévágni", hanem mindig csak két újabb dipólusra. (A molekuláris képben ez megint igen szemléletes: a molekuláris dipólust tilos elvágni, a pozitív és negatív töltést pedig egymástól elválasztani -szigetelő anyagot feltételezve- másként nem lehet. Egy valóságos dipólusmolekula elvágása ugyanis a benne lévő kémiai kötés valamiféle felbontását jelentené, azaz kémiai reakciót. Így tulajdonképpen azt tételezzük fel, hogy a darabolás nem jár kémiai reakcióval, ami általában igen jó közelítés.) Most nézzük meg, hogy miként is működik ez a folytonos modell. Egy homogén, izotróp dielektrikum hasábot helyezünk egy kezdetben feltöltetlen síkkondenzátor lemezei közé. A kondenzátor fegyverzeteinek a területe, valamint a hasáb alapterülete egyaránt legyen A . A dielektrikum vastagsága legyen d . Amíg a kondenzátor nincs feltöltve, addig a pozitív és negatív töltések sűrűsége a dielektrikum belsejében mindenütt azonos, és így az eredő töltéssűrűség mindenütt zérus. Ezt ábrázolja sematikusán az alábbi ábra *a)* része.



A pozitív és negatív töltések elhelyezkedése a dielektrikumban
 a) *külső elektromos tér nélkül,* b) *külső elektromos tér jelenlétében.*
 ρ_+ *külön a pozitív, ρ_- pedig külön a negatív töltések sűrűségét mutatja, mint a hely függvényét. δ a külső tér által okozott töltésseltolódás mértéke*

Ha azonban feszültséget kapcsolunk a kondenzátor fegyverzeteire, a helyzet megváltozik. Ekkor a negatív töltésfelhő kissé elmozdul a pozitív, a pozitív töltésfelhő pedig a negatív fegyverzet felé. Ezekután a két töltésfelhő már nem fedi egymást pontosan, mivel δ távolsággal elmozdultak egymáshoz képest. Az ábrából leolvasható, hogy a dielektrikumnak a pozitív fegyverzet felé néző oldalán

$$Q_{pol}^- = -|\rho_0|A\delta$$

negatív, a negatív fegyverzet felé néző oldalon pedig ugyanekkora, de természetesen pozitív ún. polarizációs töltés jön létre. Itt $|\rho_0|$ a szigetelőben mindig jelenlévő, de polarizálatlan állapotban egymást mindig tökéletesen semlegesítő pozitív, illetve negatív töltések sűrűségének az abszolút értéke. Molekuláris szinten ez a térfogategységben lévő protonok, illetve elektronok töltését jelenti. Mivel a töltésseltolódás a molekulákon belül történik, ezért δ rendkívül kicsi, a molekulaméretnél semmiképpen sem lehet nagyobb. Így tehát makroszkópikus szempontból a polarizációs töltést jó közelítéssel felületi töltésnek tekinthetjük, amelynek felületi töltéssűrűsége a fenti példában:

$$|\sigma_{\text{pol.}}| = \frac{|Q_{\text{pol.}}|}{A} = |\rho_0| \delta.$$

Ezen előkészületek után vezessük be a dipólusmomentum-sűrűség fogalmát, melyet folytonos anyagmodellünkkel a következőképpen értelmezhetünk:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0, \varnothing_{\Delta V} \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta V}$$

ahol $\Delta \mathbf{P}$ a ΔV térfogatelem dipólusmomentuma. \mathbf{P} a térfogategységre jutó dipólusmomentum, amit a dielektrikus polarizáció vektorának nevezünk. Homogéne polarizált anyagban \mathbf{P} kifejezhető a felületi polarizációs töltéssűrűséggel. Ehhez tekintsük az előbbi A alapterületű és d oldalélű szigetelő hasábot. Ennek dipólusmomentuma

$$\Delta \mathbf{P} = |Q_{\text{pol.}}| \cdot d \cdot \mathbf{e}_P,$$

ahol \mathbf{e}_P a dipólusmomentum irányába mutató egységvektor (azaz a *negatív* polarizációs töltésből a *pozitív* polarizációs töltés felé mutató irány). A hasáb dipólusmomentum-sűrűsége

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta V} = \frac{|Q_{\text{pol.}}| d \mathbf{e}_P}{A d} = \frac{|Q_{\text{pol.}}|}{A} \mathbf{e}_P = |\sigma_{\text{pol.}}| \mathbf{e}_P.$$

Ha a dielektrikum hasábunkat az eredeti hasábbal párhuzamos oldalélű, egyre kisebb kicsi hasábokra vágjuk, a \mathbf{P} -re kapott eredmény ezekre is ugyanaz lesz, mint a teljes nagy hasábra. Darabolás közben ugyanis olyan kis dipólus-hasábocskákat kapunk, amelyek alapterülete és oldaléle ugyan egyre kisebb, de amelyeknek az alap- és fedőlapján a polarizációs felületi töltéssűrűség, valamint a dielektrikus polarizáció iránya is mindig ugyanaz. (Mégegyszer hangsúlyozzuk, hogy ez csak homogén dielektrikumra igaz. Itt eleve ilyen tételeztünk fel, de kellően kis térfogat esetén ez mindig igaznak tekinthető. Vagyis a \mathbf{P} így lokálisan értelmezhető.) Vagyis, ha a határátmenetet elvégezzük, ebben a homogén esetben a \mathbf{P} lokális értéke is ugyanakkora lesz, mint az eredeti teljes hasábra nézve. A $|\sigma_{\text{pol.}}| = |\rho_0| \delta$ összefüggést felhasználva a dielektrikus polarizáció vektora a töltés elmozdulással egyszerű kapcsolatba hozható:

$$\mathbf{P} = |\sigma_{\text{pol.}}| \mathbf{e}_P = |\rho_0| \delta \mathbf{e}_P = |\rho_0| \delta_{\pm},$$

ahol δ_{\pm} a pozitív töltések elmozdulásvektora a negatív töltésekhez viszonyítva. Tehát ha az elektromosan semleges szigetelő anyagot úgy képzeljük el, hogy benne egy $|R|$ töltéssűrűségű pozitív, valamint egy ugyanakkora és ugyanolyan töltéssűrűségű negatív töltésfelhő található, de a pozitív töltésfelhő minden pontja $\vec{\delta}_{\pm}$ -al elmozdult a negatív töltésfelhő megfelelő pontjaihoz képest, akkor a dielektrikus polarizáció vektora a két mennyiség szorzata:

$$\mathbf{P} = |\rho_0| \delta_{\pm}.$$

Persze a polarizáció úgy is létrejöhet, hogy egy molekula különböző részeiben $|R|$ és δ_{\pm} más és más, végülis az eredő \mathbf{P} , ami tengelyesen számít. Érdemes továbbá megjegyezni, hogy egy szigetelő anyag felszínén a felületi induktált töltéssűrűség általában úgy fejezhető ki, hogy

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n},$$

ahol \mathbf{n} a szigetelő belsejéből kifelé irányuló felületi normálvektor. Ha \mathbf{P} és \mathbf{n} párhuzamos, azaz ha a szigetelő anyag felszíne *éppen merőleges* a dielektrikus polarizáció vektorára, úgy mint az előbbi hasábos példánkban, akkor igaz, hogy

$$|\mathbf{P}| = |\sigma_{\text{pol.}}|,$$

de egyébként természetesen az általános képlet alkalmazandó. Például a hasábunk oldallapjain, ahol \mathbf{P} és \mathbf{n} egymásra merőleges, és így skalárszorzatuk nulla, ott a polarizációs felületi töltéssűrűség is zérus.

VI.3 A dielektromos eltolás vektora szigetelő anyagban

D jelentése vákuumban és szigetelőben

A dielektromos eltolás, avagy megosztás \mathbf{D} vektorát már elektrosztatikai tanulmányaink kezdetén bevezettük, még akkor, amikor az anyagi közegekről szó sem volt, hiszen az elektrosztatikai jelenségeket először vákuumban (illetve az azt igen jól közelítő levegőben) kezdtük el tanulmányozni. \mathbf{D} ekkor (mivel vákuumban $\mathbf{P}=\mathbf{0}$)

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} .$$

Vákuum esetén a \mathbf{D} vektor bevezetése eléggé formális, használatának egyedüli előnye az \mathbf{E} vektorhoz képest, hogy míg az \mathbf{E} tér forrassűrűsége egy adott pontban csak arányos az ottani elektromos töltéssűrűséggel (az arányossági tényező $1/\epsilon_0$), addig a \mathbf{D} tér forrassűrűsége éppen egyenlő azzal. Szigetelő közegben a \mathbf{D} ennél jóval fontosabb szerepet kap. Mint azt a bevezetőben említettük a \mathbf{D} vákuumban és szigetelőben egyaránt érvényes kifejezése:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} .$$

Az mindjárt látható, hogy ez a kifejezés vákuum (azaz $\mathbf{P} = 0$ esetében) valóban visszaadja a jólismert formulánkat, de nem ez a legfontosabb tulajdonsága. Az így definiált \mathbf{D} azért hasznos a számunkra, mert lehetővé teszi a valódi, illetve a polarizációs töltések könnyű megkülönböztetését. Amíg ugyanis az \mathbf{E} -térnek a valódi és a polarizációs töltés egyaránt forrása, addig a \mathbf{D} -térnek egyedül és kizárólagosan csak a valódi töltés a forrása, a polarizációs töltés pedig nem. A továbbiakban \mathbf{D} -nek ezt a tulajdonságát fogjuk lépésről lépésre bizonyítani.

Vezetési (átvihető) és polarizációs (testhez kötött) töltés

Bevezetőben még egyszer hangsúlyozzuk, hogy polarizációs töltésen azt a töltést értjük, amely szigetelő felületén, avagy annak belsejében jön létre polarizáció révén. Ez a töltés nem vihető át más testre, ellentétben pl. a vezető felületén elhelyezkedő töltésekkel, amely töltések az egyik testről a másik testre átvihetők. A dipólus-molekula megbonthatatlan egységnek tekintendő, a benne lévő pozitív illetve negatív töltéseket egymástól szeparáltan nem vihetjük át egy másik testre. A töltéseket ennek megfelelően két nagy csoportra oszthatjuk: az egyik testről a másik tesre az ellentétes töltéstől függetlenül átvihető, vagy **vezetési**, a helyükről elvezethető töltésekre, és **polarizációs**, azaz egy dielektrikum polarizációja révén létrejövő, és ezért ehhez a testhez kötött, onnan külön el nem vezethető töltésekre. (Az anyag kémiai átalakításával, pl. egy elektronnak egy molekulából való kiszakításával természetesen lehetséges egy dipólusmolekula töltéseit egymástól elválasztani, de ilyen kémiai átalakulásokkal itt nem foglalkozunk.)

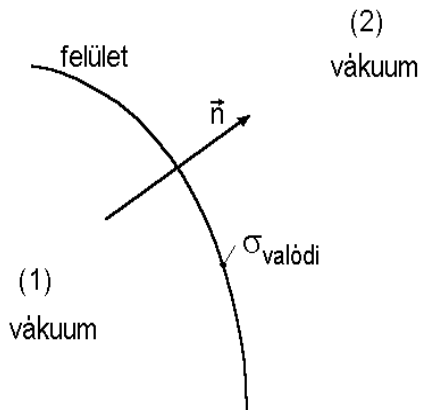
Az elektrosztatika első alaptörvénye dielektrikumban felületi töltéseloszlás esetén

Kiindulási pontunk az elektrosztatika első alaptörvénye vákuumban, felületi töltéseloszlás esetén. A levezetés alap gondolata az lesz, hogy amennyiben a felület két oldalán vákuum helyett egy-egy dielektrikum van, akkor a vákuumbeli tér azért módosul, mert az eredeti, avagy valódi felületi töltéshez most még a két dielektrikumtól származó felületi polarizációs töltések is csatlakoznak.

Tehát idézzük fel az elektrosztatika első alaptörvényének felületi töltéseloszlásra megfogalmazott alakját:

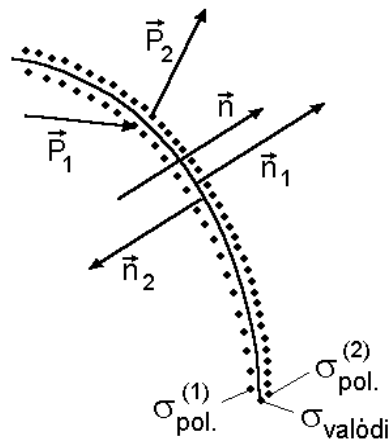
$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \sigma .$$

$$\sigma_{eredo} = \sigma_{valodi}$$



a) vákuumban,

$$\sigma_{eredo} = \sigma_{valodi} + \sigma_{pol.}^{(1)} + \sigma_{pol.}^{(2)}$$



b) két szigetelőanyag határfelületén.

Felületi töltésseloszlás

Az első alaptörvény, ha a felület mindkét oldalán vákuum van, részletesen az alábbi formába írató:

$$\epsilon_0 E_n^{(2)} - \epsilon_0 E_n^{(1)} = \sigma .$$

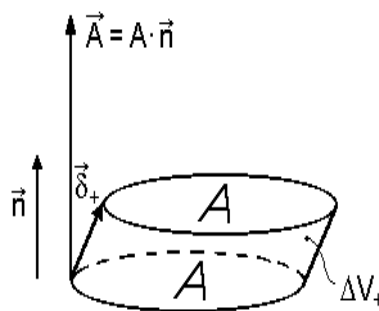
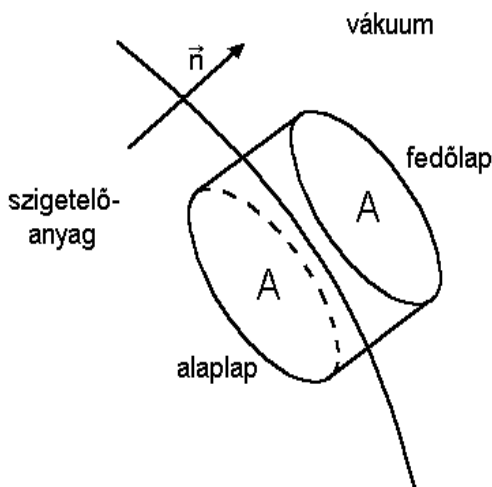
Úgy képzeljük, hogy a fenti alaptörvény akkor is igaz, ha a felület két oldalán szigetelő közegek vannak, csak ekkor σ_{eredo} egy eredő töltéssűrűségnek tekintendő, ami nem más, mint az átvihető és a polarizációs töltéssűrűség algebrai összege, azaz

$$\sigma = \sigma_{eredo} = \sigma_{vez} + \sigma_{pol.} ,$$

ahol σ_{vez} a vezetési, $\sigma_{pol.}$ pedig a polarizációs felületi töltéssűrűség. Már volt róla szó, hogy egy szigetelő anyag felületén a felületi polarizációs töltéssűrűség a következő formulával adható meg:

$$\sigma_{pol.} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ,$$

ahol \mathbf{n} a szigetelő belsejéből a külső tér felé irányuló felületi normálvektor. Ezt az összefüggést most egy ábra segítségével részletesebben is indokoljuk.



A felületi polarizációs töltéssűrűség kialakulása. A felület egyik oldalán szigetelő anyag, a másik oldalon viszont csak vákuum található. A töltésmérleget egy olyan

képzeltbeli igen lapos korongra írjuk fel, amelynek alaplapja a szigetelő anyagába merül, fedőlapja azonban már a szigetelő anyag felszíne felett van a vákuumban. Így a polarizáció következtében a korongnak csak a szigetelő anyagba merülő alaplapján áramlanak át töltések, a vákuumban lévő fedőlapon át nincs töltéstranszport. A pozitív és a negatív töltéseket folytonos fluidumnak képzelhetjük el, amelyek kezdetben tökéletesen fedik egymást. A külső polarizáló tér hatására a pozitív fluidum elmozdulása legyen δ_+ , a negatívé pedig δ_- . Ekkor a korong alaplapján át a korongba beáramló pozitív fluidum térfogata $\Delta V_+ = \mathbf{A} \cdot \delta_+$, az ideáramló negatív fluidum térfogata pedig $\Delta V_- = \mathbf{A} \cdot \delta_-$. (Kiráramlás esetén ezek a térfogatok természetesen negatívak.)

Az ábrán látható "felületi korong"-ba áramó polarizációs töltés:

$$Q_{\text{pol.}} = \Delta V_+ |\rho_0| - \Delta V_- |\rho_0| ,$$

ahol a ΔV_+ , ΔV_- jelentését az ábraszövegben találhatjuk meg. Ennek alapján

$$Q_{\text{pol.}} = A \mathbf{n} \cdot \delta_+ |\rho_0| - A \mathbf{n} \cdot \delta_- |\rho_0| = A |\rho_0| \cdot (\delta_+ - \delta_-) \cdot \mathbf{n}$$

$$\sigma_{\text{pol.}} = \frac{Q_{\text{pol.}}}{A} = |\rho_0| (\delta_+ - \delta_-) \cdot \mathbf{n} = |\rho_0| \cdot \delta_{\pm} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n},$$

tehát állításunkat sikerült bizonyítani. Két szigetelő érintkezési felületén a polarizációs töltéssűrűség a két felületi polarizációs töltéssűrűség összege, vagyis

$$\sigma_{\text{pol.}} = \sigma_{\text{pol.}}^{(1)} + \sigma_{\text{pol.}}^{(2)} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n} = P_n^{(1)} - P_n^{(2)} .$$

A polarizációs töltéssűrűségekre kapott kifejezést ezekután behelyettesítjük az elektrosztatika első alaptörvényének felületi töltéseloszlásra érvényes alakjába:

$$\epsilon_0 \cdot E_n^{(2)} - \epsilon_0 \cdot E_n^{(1)} = \sigma_{\text{val.}} + P_n^{(1)} - P_n^{(2)} .$$

Ezt a kifejezést átrendezhetjük, és a dielektromos eltolás vektorának a szigetelőre érvényes alakjának a felhasználásával igen egyszerű formában írhatjuk fel:

$$(\epsilon_0 \cdot E_n^{(2)} + P_n^{(2)}) - (\epsilon_0 \cdot E_n^{(1)} + P_n^{(1)}) = \sigma_{\text{vez.}}$$

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \sigma_{\text{vez.}}$$

Látható tehát, hogy felületi töltéseloszlás esetén szigetelőben nagyonis "megéri" bevezetni a \mathbf{D} elektromos megosztás vektorát, hiszen az elektrosztatika első alaptörvénye formailag ugyanolyan, mint a vákuum esetében. Nézzük meg ezekután igen röviden a térfogati töltéseloszlás esetét!

Az első alaptörvény térfogati töltéseloszlás esetén

Eddigi vizsgálataink során a polarizációs töltés mindig mint felületi töltés jelent meg. Vajon ez egy általános érvényű szabály, avagy lehetne másként is? Másszóval van-e olyan szituáció, amelyben a polarizációs töltés, mint térfogati polarizációs töltéssűrűség jelentkezik egy szigetelőanyag belsejében? És ha a válasz - mint sejthető – igen, miért nem talákoztunk eddig evvel az általánosabb esettel? E két kérdés közül a másodikkal kezdünk. A megoldás kulcsa az, hogy egészen eddig homogén szigetelőket vizsgáltunk. Ez azt jelenti, hogy \mathbf{P} , a dielektromos polarizáció vektora a szigetelő belsejében mindenütt ugyanaz, vagyis a helytől független állandó volt. Ha arra a demonstrációra gondolunk, ahol a szigetelő anyag pozitív és negatív töltését sárga és kék műanyag fóliákkal reprezentáltuk - a polarizációt pedig e fóliák elcsúsztatása hozta létre - akkor ott a töltésfelhők sűrűsége ugyancsak homogén volt. Továbbá a műanyag fóliák mint merev testek mozdultak el, tehát nem deformálódtak. Ennek eredményeként a szigetelő belseje elektroneutrális maradt, csak a szigetelő peremén jelentkezték olyan kék és sárga zónák, amelyek az ott megjelenő polarizációs töltést mutatták. Más a helyzet egy inhomogén szigetelőnél, ahol pl. a kék és sárga fóliák „színmélysége”

pontról pontra változik. Ha a fóliák az eredeti helyükön vannak, akkor a sötétebb kék tartományok felett elhelyezkedő ugyancsak sötétebb sárga zónák mindenütt elektroneutralitást biztosítanak, és sem felületi, sem térfogati polarizációs töltés nem jelentkezhet. Ha azonban elcsúsztatjuk ezeket az inhomogén fóliákat, akkor már nem csak felületi, de térfogati polarizációs töltéssűrűség is létrejöhet, mivel eltérő színmélységű tartományok kerülhetnek fedésbe egymással. Ebben a példában a polarizáció iránya állandó (mivel a fóliák relatív elmozdulása mindenütt ugyanolyan irányú), csak a nagysága függ a helytől. Egy általánosabb lehetőség, ha például a kezdetben egymást fedő homogén sárga és kék fóliák közül a kék fólia kicsit összehúzóódik (ekkor már a lokális elmozdulások és így a polarizáció iránya is függ a helytől). Ezután a perem körbe-körbe sárga lesz – azaz felületi pozitív töltés jön létre – a térfogatban azonban már a kék szín fog dominálni, vagyis térfogati negatív töltéssűrűség jön létre. Fontos hangsúlyozni, hogy a pozitív és negatív polarizációs töltések összegének még a „legvadabb” deformációk után is nullának kell maradnia, hiszen eredetileg töltetlen, azaz elektromosan semleges szigetelő anyagból indultunk ki.

E kis bevezető után írjuk fel az elektrosztatika első alaptörvényét lokális alakban térfogati polarizációs töltéssűrűség esetére. Ismét az alaptörvénynek a vákuumra érvényes globális formájából indulunk ki, amely szerint

$$\oint_A \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q$$

Az alapgondolat megint az, hogy feltételezzük, hogy a fenti formula szigetelőkre is érvényes, csak ebben az esetben a Q töltés két részre bontható: az A felület által körülölelt vezetési (más tesztre átvihető) és ugyanezen térfogat belsejében található polarizációs (más tesztre nem átvihető) töltésre

$$Q = Q_{Vez} + Q_{Pol}.$$

(Vagyis a szigetelő anyag hatását polarizációs töltései révén fejt ki, az anyagnak más hatása nincs az elektrosztatikus térre. Ez azt jelenti, hogy amennyiben vákuumban lennénk, és az eredeti töltésekhez még egy olyan töltéseloszlást vennénk hozzá, mint amilyen a szigetelő anyag polarizációs töltéseloszlása, akkor ez ugyanolyan teret hozna létre a vákuumban, mint amelyet polarizációs töltés a szigetelő anyagban.) Ennek alapján

$$\oint_A \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho_{Vez} dV + \int_V \rho_{Pol} dV$$

A V térfogatban lévő polarizációs töltést mint tudjuk az A felületen lévő polarizációs töltés éppen kompenzálja mivel a szigetelő eredetileg elektroneutrális volt:

$$\int_V \rho_{Pol} dV + \oint_A \sigma_{Pol} dA = 0.$$

Innen a térfogati polarizációs töltés kifejezhető:

Már korábbról tudjuk, hogy

$$\int_V \rho_{Pol} dV = - \oint_A \sigma_{Pol} dA.$$

$$\sigma_{Pol} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n},$$

valamint

$$\mathbf{n} dA = d\mathbf{A},$$

és így

$$\int_V \rho_{Pol} dV = - \oint_A \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}.$$

Ha ezt beírjuk az alaptörvénybe, akkor amit az alábbi alakra rendezhetünk:

$$\oint_A \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho_{Vez} dV - \oint_A \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}.$$

$$\oint_A (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho_{Vez} dV.$$

Innen már látható, hogy miért célszerű a

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

vektor bevezetése térfogati polarizációs töltéseloszlás esetén is, hiszen ekkor az elektrosztatika alaptörvénye az alábbi általánosan érvényes globális formában írható

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho_{\text{vez}} dV.$$

ami a Gauss tétellel alakítható át a már ismerős lokális formává:

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{vez.}}$$

Így tehát beláttuk, hogy a IV Maxwell egyenlet a fenti alakban érvényes mind vákuumban, mind szigetelőben. (A ρ_{vez} töltéssűrűség mellől annak átvihetőségét jelző „Vez” indexet általában el szokás hagyni. De természetesen ez mindig mozgatható, egyik testről a másikra átvihető, vagyis nem polarizációs töltést jelent.)