METROLÓGIA ÉS HIBASZÁMíTÁS

1. Metrológiai alapfogalmak

A **metrológia** a mérések tudománya, a mérésekkel kapcsolatos ismereteket foglalja össze.

Méréssel egy objektum valamilyen tulajdonságáról számszerű értéket kapunk. A **mérési eredményt** egy számmal (a **mértékszámmal**) és a **mértékegységgel** adjuk meg.

A mérés történhet mérőeszközzel vagy műszerrel. A **mérőeszközzel** való mérésnél az objektum valamilyen tulajdonságát közvetlen összehasonlítással kapjuk meg (pl. ha hosszúságot méterrúddal vagy tömeget kétkarú mérleggel mérünk). A **műszerrel** való mérés viszont közvetett, az objektum és a műszer valamilyen kölcsönhatásából kalibrálással adja meg a mérni kívánt mennyiség értékét. (Pl. az elektromos áram erősségét mérő Deprez-rendszerű ampermérőben a mutató szögelfordulása az áram, a mágneses tér és a rugó kölcsönhatásának az eredménye, de a műszer skálája már áramerősségre van kalibrálva.)

Sok esetben nem tudjuk a jellemezni kívánt mennyiséget közvetlenül mérni, hanem csak más, vele kapcsolatban álló egy vagy több mennyiséget, és az ezekre kapott mérési eredményekből számítással kapjuk a kívánt adatot. Ekkor **közvetett**, illetve **összetett mérésről** beszélünk.

A mérés hibája

A mérést megismételve általában nem kapunk azonos mérési eredményeket. Egyrészt, mert a mérendő mennyiség változhat az idővel. De ha a mérendő mennyiség állandó is, a mérési eredményt a műszer állapota és a megfigyelést végző ember is befolyásolhatja.
Jelöljük a mérni kívánt mennyiség valóságos értékét x_v-vel, a mérési eredményt x_m-mel.
A **mérés hibája**, Δx a mért érték és a valóságos érték különbsége:

$$\Delta x = x_m - x_v \,. \qquad (1)$$

Használatos még a relatív hiba:

$$\delta x = \Delta x / x_v \,. \qquad (2)$$

Hibatípusok

Véletlen hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől mindkét irányban azonos valószínűséggel, véletlenszerűen térnek el. Nagy számú mérés átlagát véve a véletlen hiba tetszőlegesen csökkenthető.
Rendszeres hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől eltérő érték körül ingadoznak. Oka a hibás vagy rosszul beállított műszer, de rendszeres hibát okoz az is, ha elhanyagolunk vagy rosszul veszünk figyelembe valamilyen, a mérést befolyásoló külső tényezőt (pl. hőmérsékletet vagy nyomást).

2. A hibaszámítás alapjai

A hibaszámítás a valószínűségszámítás és matematikai statisztika felhasználásával a mérés során fellépő <u>véletlen</u> hibák becslésére ad módot.

A valószínűségszámítás alapvető eszközei a valószínűségi sűrűség- és eloszlásfüggvény, melyekkel jellemezzük egy-egy sokaságon a vizsgált tulajdonság, a valószínűségi változó eloszlását. Ezen függvények mellett gyakran használt mennyiségek egyes eloszlásparaméterek, melyekkel rövidebben lehet jellemezni az adott sokaságot: ezek elsősorban a *várható érték*, mely a valószínűségi változónak a sokaságra leginkább jellemző értéke, és a *variancia*, mely azt adja meg, mennyire térnek el az egyes értékek a várható értéktől (ill. ugyanezt jellemzi a *szórás*, a variancia négyzetgyöke). Az eloszlásparaméterek ismeretében meg tudjuk mondani, hogy egy adott intervallumhoz mekkora valószínűség tartozik, de ezek az eloszlásparaméterek általában nem ismertek. A matematikai statisztika módszereket ad arra, hogy egy bizonyos számú mérésből álló méréssorozat alapján megbecsüljük ezeket a paramétereket adott valószínűségi (ún. „konfidencia-„) szinten a sokaság elemszámánál sokkal kisebb minta alapján.

3. Mérési sorozat kiértékelése, a mérés eredményének megadása

3.1. Az eloszlás paramétereinek becslése a mért értékek alapján

A várható érték, μ becslése: a sokaságból vett n elemszámú minta alapján az egész sokaságra vonatkozó várható értéket, μ-t az egyes x_i mért adatok átlagával becsüljük:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} . \qquad (3)$$

A variancia, azaz a szórásnégyzet becslése: az n számú mérés átlagának szórását $s_{\overline{x}}$ -gal, a középérték tapasztalati szórásával („standard deviációjával”) becsülhetjük:

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n\,(n-1)}} . \qquad (4)$$

3.2. Δx hibaintervallum megadása bizonyos konfidenciaszintre

Mivel az átlagérték a várható értéknek csak becslése, fontos kérdés az, hogy mennyire jó ez a becslés. Ezt úgy fogjuk jellemezni, hogy az átlagérték körül megadunk egy intervallumot, és megadjuk azt, hogy ebbe az intervallumba mekkora valószínűséggel (konfidenciaszinten) esik bele a tényleges várható érték. A számolásoknál a konfidenciaszintből szoktunk kiindulni, és ahhoz számoljuk ki az intervallum szélességét. Az intervallum szélességének kiszámításához $s_{\overline{x}}$ -ra, a középérték korrigált tapasztalati szórására és egy bizonyos paraméterértékre, az ún. Student-féle t-paraméter értékére van szükség, mely a minta elemszáma és a választott konfidenciaszint ismeretében kiolvasható az I. táblázatból. A hibaintervallum szélességét a t paraméter és $s_{\overline{x}}$ szorzata adja:

$$\Delta x = t\, s_{\overline{x}} . \qquad (5)$$

I. táblázat: A Student-féle t paraméter értékei P konfidenciaszintnél és n mérésszámnál

n \ P	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
2	3,078	6,314	12,706	25,452	63,657	127,32
3	1,886	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
4	1,638	2,353	3,182	4,176	5,841	7,453
5	1,533	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
6	1,476	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
7	1,440	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
8	1,415	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
9	1,397	1,860	2,306	2,752	3,355	3,832
10	1,383	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
20	1,328	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
∞	1,282	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807

3.3. Méréssorozat kiértékelésének lépései

A fentiek alapján egy n mérésből álló sorozat kiértékelése a következőképp történik.

Meghatározzuk a mérési eredmények számtani közepét:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} . \qquad (3)$$

Meghatározzuk a $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$ devianciákat (az egyes mérési eredmények eltérését a számtani középértéktől), és ezek négyzetét összegezve meghatározzuk a középérték korrigált tapasztalati szórását:

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n\,(n-1)}} . \qquad (4)$$

A mérések számához (n) és a kívánt konfidenciaszinthez (P) tartozó t paraméterértéket kikeressük a Student-táblázatból.

Meghatározzuk a konfidenciaintervallum (hibaintervallum) sugarát:

$$\Delta x = t\, s_{\overline{x}} . \qquad (5)$$

Megadjuk a mérési eredményt a következő formában:

$$\xi = (\ \overline{x} \pm \Delta x\ )\ [\text{mértékegység}] \qquad \text{P konfidenciaszinten.} \qquad (6)$$

A felírt végeredmény azt jelenti, hogy a mérendő mennyiség valóságos értéke *a P konfidenciaszintnek megfelelő valószínűséggel* az $[\ \overline{x} - t\, s_{\overline{x}}\ ,\ \overline{x} + t\, s_{\overline{x}}\ ]$ intervallumba esik.

A konfidenciaintervallum felírásánál figyeljünk arra, hogy hány értékes jegyet adunk meg a végeredményben! Nincs értelme a hibaintervallumot pontosabban megadni, mint az átlagértéket. Első lépésben a hibaintervallumot kerekítjük. A hibaintervallumot általában két értékes jeggyel adjuk meg, illetve 1-essel kezdődő értékeknél szokás 3 értékes jegyet használni. A hibaintervallumhoz igazítjuk azt, hogy a valódi értéket milyen pontossággal adjuk meg: olyan helyiértékkel, ami a hibaintervallum két értékes jegyének felel meg.

Példa

Van egy nagy kupac ismeretlen névleges értékű ellenállásunk. Kiveszünk belőle 6 db-ot és megmérjük azok ellenállását. A következő értékeket kapjuk:

98 Ω   100 Ω   101 Ω   99 Ω   101 Ω   101 Ω

Számoljuk ki ennek alapján az ellenállásaink névleges értékét, és a hibaintervallumot 99%-os konfidenciaszinten!

Megoldás:

A mért értékek átlaga $\bar{R} = 100\ \Omega$.

A középérték korrigált tapasztalati szórása

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{(98-100)^2 + (100-100)^2 + (101-100)^2 + (99-100)^2 + (101-100)^2 + (101-100)^2}{6 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{8}{30}} = 0{,}5164\ \Omega.$$

A táblázatból a Student-paraméter értéke n = 6 és P = 0,99 esetén $t = 4{,}032$.

A hibaintervallum, azaz a konfidenciaintervallum sugara

$$\Delta R = t \cdot s_{\bar{R}} = 4{,}032 \cdot 0{,}5164 = 2{,}082\ \Omega.$$

Tehát az ellenállások értéke P = 99%-os konfidenciaszinten

$R = (\,100{,}0 \pm 2{,}1\,)\ \Omega$ intervallumba esik.

(A hibát 2 értékes jegyre kerekítettük, és mivel így egy tizedes jegye van, ezért az átlagértéket is kiírtuk egy tizedesjeggyel.)

Gyakorló feladatok:

2. Megmérjük ötször egy gyertya magasságát. A mért értékek:

3,8 cm 3,6 cm 3,8 cm 3,8 cm 4,0 cm

Adjuk meg a gyertya magasságát és annak hibáját 80%-os konfidenciaszinten!

Megoldás:

Az átlagérték

$\bar{h}$ = 3,8 cm;

a középérték korrigált tapasztalati szórása

$$s_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{(3{,}8-3{,}8)^2 + (3{,}6-3{,}8)^2 + (3{,}8-3{,}8)^2 + (3{,}8-3{,}8)^2 + (4{,}0-3{,}8)^2}{5\cdot 4}} = 0{,}06325 \text{ cm.}$$

A Student-táblázatból t(n=5, P=0,8) = 1,533.

A hibaintervallum

$\Delta h = t \cdot s_{\bar{h}} = 1{,}533 \cdot 0{,}06325 = 0{,}09696$ cm.

Tehát P = 80%-os konfidenciaszinten a gyertya magassága

$h = (3{,}80 \pm 0{,}100)$ cm.

3. Hatszor megmérjük egy telep elektromotoros erejét, a kapott eredmények:

12,1 12,2 11,9 12,2 11,7 11,9 V.

Adjuk meg azt az intervallumot, melybe a telep elektromotoros ereje 95% valószínűséggel esik!

Megoldás:

Az átlagérték

$\bar{E}$ = 12,0 V;

a középérték korrigált tapasztalati szórása

$$s_{\bar{E}} = \sqrt{\frac{(12{,}1-12{,}0)^2 + (12{,}2-12{,}0)^2 + (11{,}9-12{,}0)^2 + (12{,}2-12{,}0)^2 + (11{,}7-12{,}0)^2 + (11{,}9-12{,}0)^2}{6\cdot 5}} = 0{,}08165 \text{ V.}$$

A Student-táblázatból t(n=6, P=0,95) = 2,571.

A hibaintervallum

$\Delta E = t \cdot s_{\bar{E}} = 2{,}571 \cdot 0{,}08165 = 0{,}2099$ V.

Tehát P = 95%-os konfidenciaszinten az elektromotoros erő

$E = (12{,}00 \pm 0{,}21)$ V.

Emelt szintű anyag:

4. Közvetett mérés hibája, Gauss-féle hibaterjedés

Tegyük fel, hogy meg akarjuk határozni egy ϕ mennyiség értékét, amelyet nem tudunk közvetlenül mérni, de ϕ függ az x,y,z,... mennyiségektől és az utóbbiak viszont közvetlenül mérhetők. Hogyan függ ϕ várható értéke és hibája az x,y,z,... mennyiségek várható értékétől és hibájától?

Ha ismert a ϕ(x,y,…) függvény és a mérési eredmények alapján ismertek az x,y,z,... mért mennyiségek várható értékének becslésére szolgáló középértékek ($\bar{x}$, $\bar{y}$, …) és egy adott P konfidenciaszintre vonatkozó hibaintervallumok (Δx, Δy, …), akkor ezek felhasználásával

a **ϕ mennyiség várható értéké**nek becslése

$$E[\phi(x,y,..)] = \overline{\phi} = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \ldots), \tag{7}$$

és az adott konfidenciaszinten a **ϕ mennyiség hibaintervallumára** szolgáló becslés:

$$\Delta\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \ldots} \;. \tag{8}$$

A ϕ függvény parciális deriváltjainak kiszámításakor a $\bar{x}$, $\bar{y}$, … átlagokat kell behelyettesíteni.

A mechanika mérésnél a *g* értékét a *T* periódusidő és az *l* fonálhossz mérésével számoljuk ki, ezért a *g* hibáját (*Δg*-t) a *T* és az *l* mérésének a hibája (*ΔT* és *Δl*) szabja meg. A mérésleírásban megadott (13)-as képlet a fenti (8) alapján írható fel.