1. MECHANIKA

A gyakorlat célja egyrészt a mindennapi életben gyakran tapasztalt periodikus mozgások kísérleti tanulmányozása, másrészt az elméletben bevezetett modellek (rugó, inga) gyakorlati alkalmazhatóságának vizsgálata.

ELMÉLET: Periodikus mozgások: körmozgás, rezgések, lengések

1. Ideális rugó

1.1. Ideális rugó erőtörvénye (Hooke-törvény)

Egy ideális rugó alakváltozása (megnyúlása, összenyomódása) esetén a rugó végéhez rögzített testre kifejtett erő arányos a test megnyúlásával (Hooke-törvény):

$F_r = -k \cdot \Delta\ell$, (1)

ahol

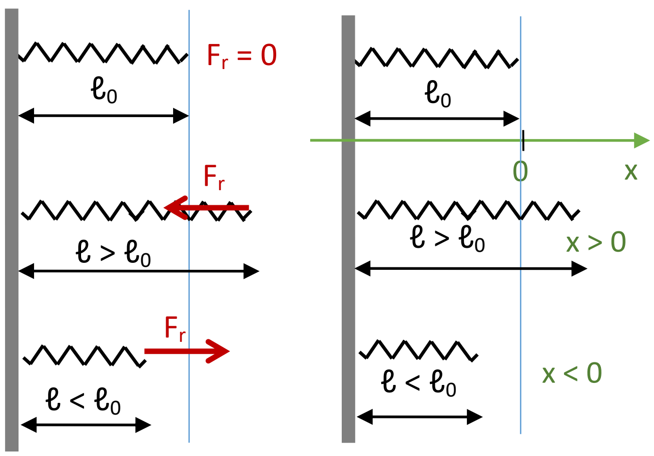
k a rugóállandó [N/m] = [kg/s^2],

$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ a rugó megnyúlása,

ℓ a rugó aktuális hossza,

ℓ_0 a nyugalmi hossza;

A testre kifejtett erő mindig a rugó nyugalmi hosszának megfelelő irányba mutat.



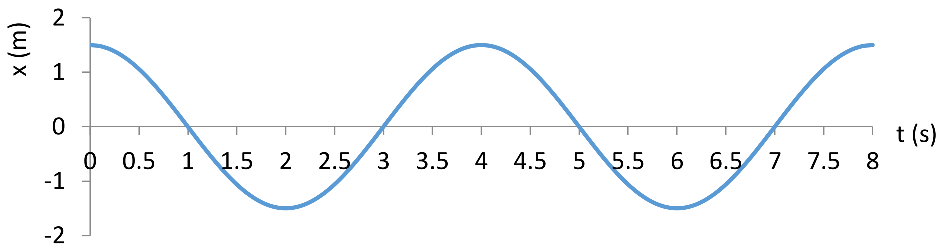
A rugó **megnyúlás**át x-szel jelölve

$F_r = -kx$. (2)

A megnyúlás előjeles mennyiség: $x>0$, ha a rugó megnyúlik, $x<0$, ha a rugó összenyomódik.

Ha egy rugó egyik végét rögzítjük, a másik végéhez egy testet erősítünk, és a testet elmozdítjuk az egyensúlyi helyzethez képest, akkor a test rezgőmozgást fog végezni, mert a rugó által kifejtett erő mindig ellentétes irányba mutat azzal, amerre a végéhez rögzített test elmozdul az egyensúlyi állapotnak megfelelő ponthoz képest.

1.2. Harmonikus rezgőmozgás



Harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő függvényében:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \quad \text{ahol} \tag{3}$$

A az amplitúdó (a maximális kitérés) [m],

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ a fázis [–],

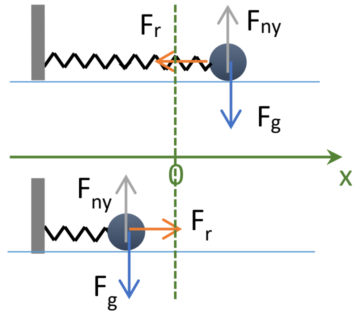
ω a harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciája [s^{-1}],

φ_0 a fázisállandó, más néven kezdőfázis [–].

A rezgőmozgás periódusideje T [s], frekvenciája ν [Hz].

Az ω körfrekvencia és a ν frekvencia, ill. T periódusidő összefüggése:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T \, .$$



<u>Vízszintes helyzetű rugó</u> végéhez rögzített *m* tömegű test esetén (csillapodásmentes esetben) levezethető, hogy a rezgőmozgás periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \tag{4}$$

és a rezgőmozgás *A* amplitúdóját és φ_0 kezdőfázisát a kezdeti feltételek – azaz az x_0 kezdeti kitérés és v_0 kezdősebesség – szabják meg:

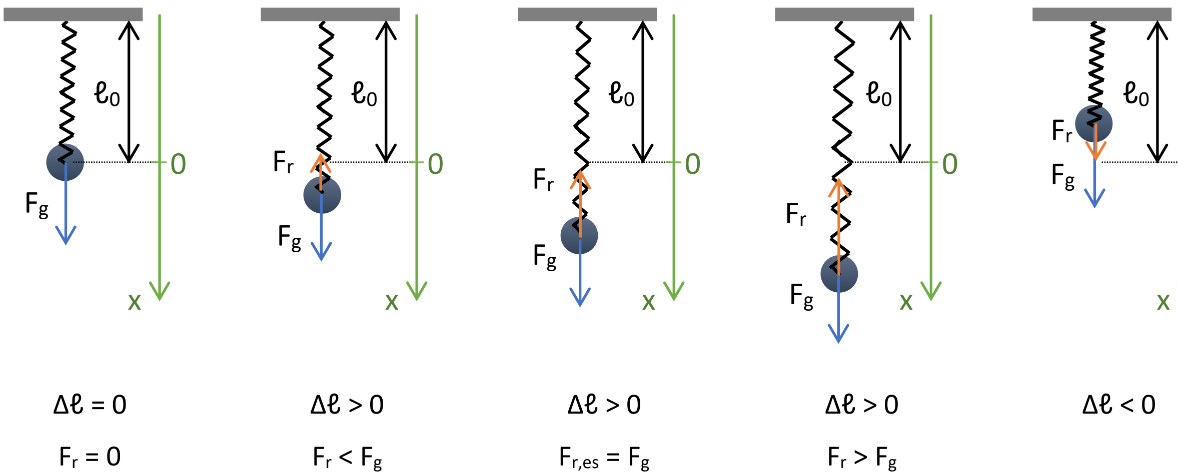
$$A = \sqrt{x_0^{\,2} + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\,, \quad \varphi_0 = arc\ tg\left(-\frac{v_0}{\omega\, x_0}\right). \tag{5}$$

Vízszintes helyzetű rugó esetén az egyensúlyi helyzet a rugó nyugalmi hosszánál van (a nyújtatlan állapotnál).

<u>Függőleges helyzetű rugó</u> esetén az egyensúlyi helyzet eltolódik, mert a nyújtatlan állapotú rugó függőlegesbe fordítva a testre ható nehézségi erő miatt elkezd megnyúlni, és akkor áll be egyensúlyi helyzet, amikor a rugó megnyúlása akkora lesz, hogy a rugó által a testre kifejtett felfelé mutató erő nagysága megegyezik a testre ható nehézségi erővel:

$mg = F_{r,es} = k \cdot x_{es} = 0$

$\rightarrow \quad x_{es} = mg/k$ az egyensúlyi megnyúlás. (6)



Függőleges helyzetű rugó esetén olyan rezgés jön létre, aminek az egyensúlyi helyzete az x_{es} egyensúlyi megnyúlásnál van, erre szimmetrikus a rezgőmozgás, ehhez a helyzethez képest értelmezendő az amplitúdó. Levezethető, hogy a periódusidő nem módosul a vízszintes helyzetű rugóhoz képest, tehát *k* rugóállandójú függőleges helyzetű rugó végéhez rögzített *m* tömegű test rezgésének periódusidejét is a (4) összefüggés írja le.

<u>Csillapított rezgőmozgás</u>: Csillapított esetben a csillapítási együttható nagyságától függően módosul a rezgőmozgás. Kis csillapításnál a periódusidő nő és az amplitúdó exponenciálisan csökken, nagy csillapításnál a mozgás aperiodikussá válik. Kísérleteinket függőleges helyzetű rugóval fogjuk végezni, ahol a csillapodás elhanyagolható mértékű.

2. Matematikai inga

A matematikai inga egy egyik végén rögzített *L* hosszúságú súlytalan, nyújthatatlan fonálból és a másik végéhez erősített *m* tömegű tömegpontból áll. A tömegpont általánosan a felfüggesztési pont körüli *L* sugarú gömbön mozoghat, és mozgása elég bonyolult lehet. Két speciális esetet szokás vizsgálni, amikor a mozgása könnyen leírható: a síkingát és a kúpingát.

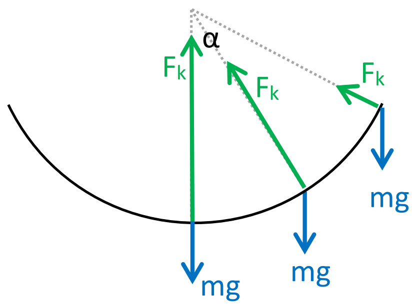
2.1. Síkinga

A tömegpont ebben az esetben függőleges síkban mozog.
Jelölje α a fonálnak a függőlegessel bezárt szögét. α az időnek harmonikus függvénye:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\ . \qquad (7)$$

Levezethető, hogy a mozgás periódusideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}\ . \qquad (8)$$



Ebben a levezetésben (ld. majd az előadásanyagban) alkalmazni kell a

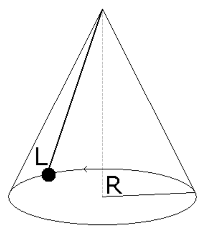
$sin\alpha \approx \alpha$ közelítést,

ami 5°-nál csak 0,05% eltérést okoz, 22°-nál azonban már 1%-ot, 90°-nál pedig 18% eltérést. A kísérletek végzésénél figyelni kell majd arra, hogy csak kis kitérítés esetén érvényes a (8) összefüggés.
Az α_0 maximális kitérés és a φ_0 fázisállandó értékét a kezdőállapot határozza meg.

2.2. Kúpinga

A tömegpont ebben az esetben vízszintes síkban mozog egy *R* sugarú körön, ennek megfelelően a fonál egy kúpfelületet súrol.
Levezethető, hogy a kúpinga keringési ideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{L^2-R^2}}{g}}\ , \qquad (9)$$



ahol *L* az inga hossza, *R* pedig a kör sugara, melyen a tömegpont kering.

MÉRÉSEK

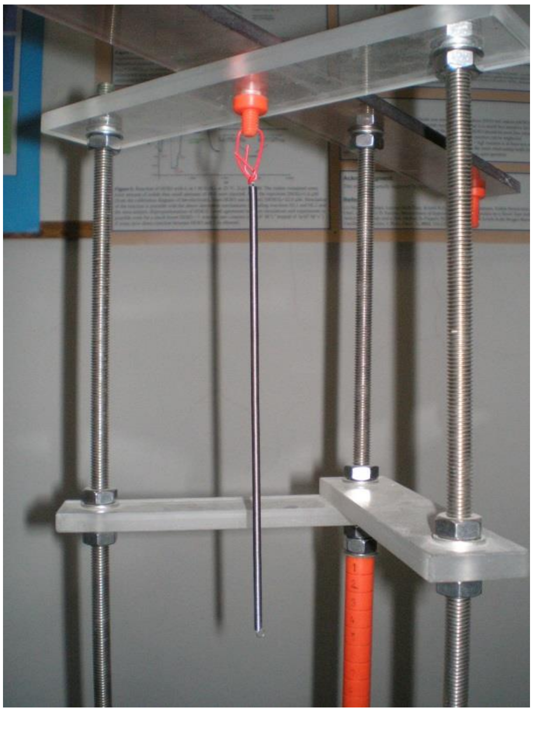
A mérésekhez a fotón látható állványt használjuk. Erre van felfüggesztve egy rugó, és ezen van egy skála, amiről le lehet olvasni a rugó végének a pozícióját.

Az állványon van egy damilra függesztett anyacsavar, amit síkingaként tudunk használni.

A kúpinga periódusidejének mérése csak szorgalmi feladat.

A stoppert a jobb oldali gombbal lehet indítani és megállítani, és a bal oldali gombbal lehet nullázni.

1.1. Rugóállandó meghatározása különböző terhelések alkalmazásával



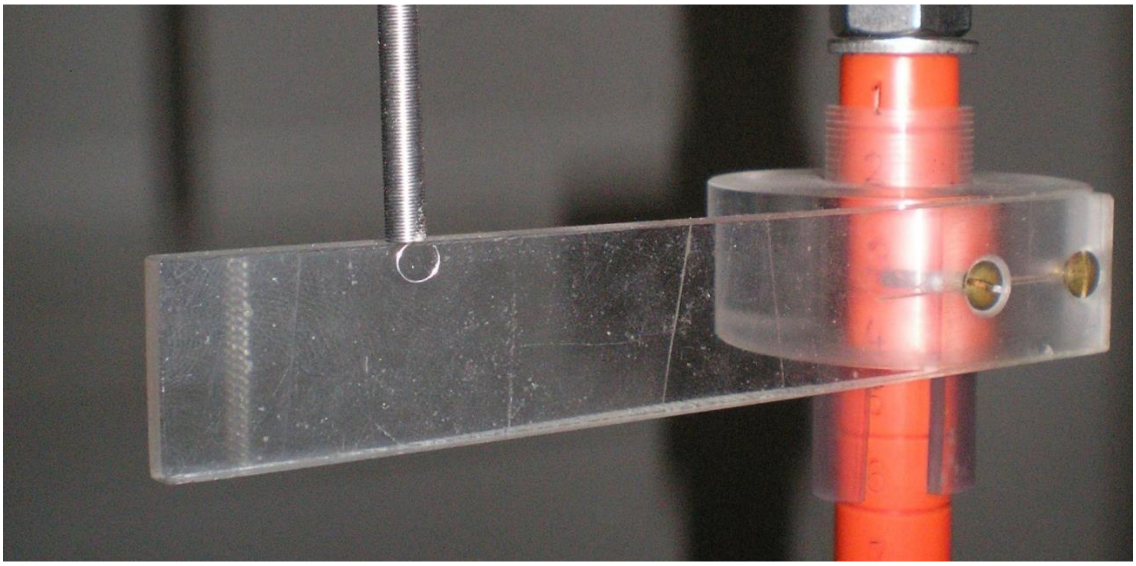
Eszközök:

- állvány, mm-es leolvasásra alkalmas skálával
- rugó
- anyacsavarok mint ismert tömegek
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:

Mérjük meg a piros PVC rúd tömegét a mérlegen.

A rugó legalsó pontja pozíciójának leolvasása:



A rugó alsó pontjának pozícióját úgy tudjuk leolvasni, hogy a skálán le-fel csúsztatható plexi gyűrűről kinyúló jelölő felső síkját a rugó alsó végéhez állítjuk (az alatta levő csődarabbal tudjuk rögzíteni, hogy ne kelljen végig fogni), majd leolvassuk, hogy a plexi gyűrű teteje a skála milyen értékénél áll. A skála 1 cm magas hengerekből áll. Leolvassuk a számot arról a hengerről, ami teljes egészében a plexi gyűrű fölött van: ezen a fotón ez az 1. A millimétereket pedig úgy olvassuk le, hogy a plexi gyűrű fölött van egy 1 cm magas kis vékony gyűrű, ami milliméterenként be van karcolva. Erről leolvassuk, hogy hány mm van a még teljesen látszó cm-es gyűrű alja és a plexi gyűrű teteje között: ezen a fotón 7 mm (ill. elfogadható az is, ha 8 mm-nek olvassuk le). Tehát a fotón látható esetben a leolvasandó érték 1,7 cm. (Figyelem, van olyan állvány, ahol a plexi gyűrűk két oldalán eltérő számok vannak, figyeljünk arra, hogy ebben az esetben mindig ugyanarról az oldaláról olvassuk le.)
A rugó legalsó pontjaként választhatjuk az alján levő kis hurok alját, de választhatjuk a menetek végét is, lényeg, hogy mindig azonos pontot mérjünk.

A rugó terhelése:
A piros PVC rúd a tetején levő gemkapocs segítségével akasztható a rugóra.
Az anyacsavarok áthúzhatók ezen a gemkapcson, fentről kell őket ráhúzni a PVC rúdra.
Az anyacsavarok tömegét nem kell megmérni, a tömegük a dobozuk tetejéről olvasható le.

Az ismeretlen tömeg egy szürke henger, amit szintén rá lehet húzni a PVC tartóra.

1.1.1. A rugó legalsó pontja pozíciójának leolvasása különböző terhelések mellett

Az adatlapon levő táblázatba mindig csak azt írjuk fel, hogy mi van a rugón, nem kell kiszámolni a terhelő tömegeket.

Végezzük el a mérést

- először a PVC rúd nélkül,
- azután az üres PVC rúddal,
- majd 1, 2, 3, … anyacsavarral terhelve, amíg a skála engedi!

Szükség esetén – ha a rugó gyengébb vagy erősebb – módosítsunk a terhelő anyacsavarok számán!

1.1.2. Terhelés az ismeretlen tömeggel

Tegyük a PVC rúdra az ismeretlen tömeget, és olvassuk le a rugó legalsó pontjának pozícióját! Akinek erős a rugója, tegyen néhány anyacsavart is az ismeretlen tömeg mellé, és azt a pozíciót jegyezze fel. Annyi anyacsavart tegyünk az ismeretlen tömeg mellé, hogy a rugó megnyúlása a lineáris szakaszra essen, azaz oda, ahol egy-egy csavar feltételekor kb. ugyanannyival nyúlik meg a rugó.

<u>**Kiértékelés:**</u>

1.1.1. <u>A kiértékelés elve:</u> Ideális rugó esetén egyensúlyban azt írhatnánk fel, hogy

$mg = k\,\Delta\ell$, vagyis $(m_{PVC} + n\,m_{cs})\,g = k\,(\ell - \ell_0)$.

ℓ a rugó hossza, ℓ_0 a nyugalmi hossz.

A kísérletben nem a rugó hosszát mérjük, hanem a rugó legalsó pontjának z pozícióját olvassuk le, ezzel

$(m_{PVC} + n\,m_{cs})\,g = k\,(z - z_0)$

z a rugó végének pozíciója n anyagcsavar esetén, z_0 a terhelés nélküli pozíció.

Azt tapasztaljuk a legtöbb rugónál, hogy a kezdeti terheléseknél – amikor a PVC-rudat üresen, esetleg 1-2 anyacsavarral terhelve tesszük a rugóra – a rugó megnyúlásának változása kisebb, mint amit a nagyobb terheléseknél mérünk. A rugó tehát nem ideális rugó, nem követi a Hooke-törvényt, nem teljesül az, hogy a nyugalmi hossznál nem ébred erő a rugóban.

A rugóban nyugalmi állapotban is fellépő F_0 erőt is figyelembe véve azt írhatjuk fel, hogy

$$(m_{PVC} + n\,m_{cs})\,g = k\,(z - z_0) + F_0\,. \qquad (10)$$

Fejezzük ki ebből a mért z-t:

$$z = (m_{cs}\,g/k)\,n + [\,z_0 + m_{PVC}\,g/k - F_0/k\,]\,. \qquad (11)$$

Látjuk, hogy z(n) egy olyan $y = ax+b$ egyenes egyenlete, aminek

a meredeksége $a = m_{cs}\,g/k$,

a tengelymetszete $b = z_0 + m_{PVC}\,g/k - F_0/k$.

A meredekségből tehát kifejezhető a rugóállandó:

$$a = m_{cs}\,g/k \quad \rightarrow \quad k = m_{cs}\,g/a\,. \qquad (12)$$

<u>A kiértékelés lépései:</u>

- Készítse el a rugó kalibrációs diagramját (z – n diagram), azaz ábrázolja a rugó legalsó pontjának pozícióját az anyacsavarszám függvényében!
- A z – n diagramon nézze meg, mekkora terheléstől kezdődően illeszkednek a pontok egy egyenesre. Húzza meg a lineáris szakaszon a legjobban illeszkedő egyenest!
- Számolja ki az egyenes meredekségét! A mértékegységről ne feledkezzen meg.
- A meredekségből számolja ki a rugóállandót!

1.1.2. A kalibrációs diagram alapján határozza meg az ismeretlen tömeget!

Az ismeretlen tömeget úgy határozzuk meg, hogy a rugó kalibrációs diagramján leolvassuk, hogy az adott tömeggel mért hossz hány anyacsavarnak felel meg, és ezt a darabszámot szorozzuk egy anyacsavar tömegével. (Természetesen, ha volt mellette néhány anyacsavar is, akkor azokat levonjuk.)

***1.1.3.** Szorgalmi feladat: Becsülje meg a tömegmérés hibáját abból kiindulva, hogy a leolvasás hibája 1 mm!*

1.2. Harmonikus rezgőmozgás vizsgálata

Eszközök:

- állvány
- rugó
- anyacsavarok
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- stopper

Feladatok:

1.2.1. Rezgésidő mérése három különböző terhelésnél

Három mérést végzünk három különböző terheléssel, pl. 4, majd 7, majd 10 anyacsavarral terhelve, illetve a rugó terhelhetőségének megfelelően válasszunk három különböző terhelést, amivel stabil rezgést tudunk létrehozni.

Ügyeljünk arra, hogy a függőleges rezgés mellett oldalirányú ingamozgás és csavarodó rezgés minél kevésbé lépjen fel. Ezt a legjobban úgy lehet elérni, ha a piros PVC rudat függőlegesen lefelé meghúzva engedjük el. Az amplitúdó ne legyen annyira nagy, hogy a rezgés tetején a rugó menetei egymáshoz érjenek (ezt kattogó hang, és szemmel láthatóan nem harmonikus mozgás jelzi). Nagy amplitúdónál a PVC rúd akár le is ugorhat a rugóról a rezgőmozgás tetején.

Hozzuk rezgésbe a rugót és mérjük meg 10 rezgés idejét mindhárom terhelés esetén!

Szorgalmi feladatok:

***1.2.2.** Végezzük el az **1.2.1.** mérést az ismeretlen tömeggel is! (Szükség esetén az ismeretlen tömeg mellé tegyünk néhány anyacsavart is.)*

1.2.3. A rezgésidő és az amplitúdó közötti összefüggés kimérése

A legnagyobb terhelésnél végezzük el ezt a kísérletet. A mérést három különböző amplitúdóval kell elvégezni, amiket a következőképpen számolunk ki: Először keressük meg az adott terheléshez tartozó egyensúlyi helyzetet, és mérjük meg, mekkora ekkor a távolság a PVC rúd alja és az állvány alja között és vonjunk le belőle 3 cm-t: ez lesz a legnagyobb amplitúdó. A második és harmadik amplitúdó ennek a harmada ill. kétharmada legyen. Számoljuk ki, milyen helyzetből kell elindítani a rezgőmozgást ezekben az esetekben. Mindhárom amplitúdóval mérjük meg 10-10 rezgés idejét.

1.2.4. Csillapított rezgőmozgás

Mérjük meg két különböző terhelésnél is, hogy kb. mennyi idő alatt csökken a felére a rezgés amplitúdója!

Kiértékelés:

1.2.1. Számoljuk ki a rugóállandót a három különböző terheléssel mért rezgőmozgás periódusidejéből a (4) összefüggés alapján, és hasonlítsuk össze ezeket az értékeket az **1.1.1.** mérésben kiszámolt értékkel! A terhelő tömeg kiszámolásánál ne feledkezzünk meg a PVC rúd tömegéről!

Szorgalmi feladatok:

***1.2.2.** A mért periódusidőből számoljuk ki az ismeretlen tömeget!*

***1.2.3.** Értelmezzük a méréseket!*

***1.2.4.** Magyarázzuk meg az eredményt! Melyik terhelésnél csillapodik gyorsabban? Miért?*

2.1. Matematikai inga - síkinga

Eszközök:

- damilra kötött anyacsavar az állványon
- mérőszalag
- stopper

Mérési feladatok:

Mérjük meg az inga L hosszát: a mérőszalag elejét tegyük a damil felfüggesztési pontjához (a damilt tartó gemkapocs aljához), és olvassuk le az anyacsavar tömegközéppontjának helyét (a lyuk közepénél).
Hozzuk lengésbe az ingát! Figyeljük meg, hogy a gemkapocs is mozog-e. Ha igen, akkor a pontos mérés érdekében mérés közben meg kell fogni, vagy meg kell keresni azt a lengési síkot, amikor nem mozog. Az inga lengési síkja kerülje el az állvány lábait. Próbáljuk úgy elindítani az ingát, hogy lengési síkja ne, vagy csak lassan forduljon el (a 10 lengés alatt még ne ütközzön bele az állvány lábaiba).

2.1.1. Síkinga lengésidejének mérése kis kitérítéssel

Hozzuk lengésbe az ingát kis kitéréssel! (Az elméletből tudjuk, hogy a sinα ≈ α közelítés miatt a periódusidő képlete csak kis kitérítésre érvényes képlet, 5°-nál csak 0,05% az eltérés, de 22°-nál már 1%.)
Mérjük meg 10 periódus idejét!
Ismételjük meg a mérést ötször (azonos, kis kitéréssel).

Szorgalmi feladat:

2.1.2. Síkinga lengésidejének mérése nagyobb kitérítéssel

Mérjük meg a periódusidőt 5, egyre nagyobb kitérítéssel indítva, úgy, hogy minden kísérletnél megbecsüljük a legnagyobb kitérés szögének nagyságát is. Itt is 10 periódus idejét mérjük, de mindegyiket csak egyszer.

Kiértékelés:

2.1.1.

- Számolja ki az 5 párhuzamos mérés alapján a periódusidőt ($\overline{T}$), és a periódusidő hibáját (ΔT) 95%-os konfidenciaszinten!
- Az átlagos periódusidőből számolja ki a $\overline{g}$ értékét a (8) összefüggés alapján!
- Számolja ki az alábbi képlettel, hogy mekkora Δg hibával tudjuk meghatározni g értékét!

$$\Delta g = \overline{g}\sqrt{\left(2\frac{\Delta T}{\overline{T}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2} \qquad (13)$$

  $\overline{g}$ értékére az előbb kiszámolt értéket helyettesítse be. $\overline{T}$ az átlagos periódusidő, ΔT a hibája. L az inga megmért hossza. A hosszmérés ΔL hibájára vegyen fel egy becsült értéket. Ez a hiba biztosan nagyobb az 1 mm-es skálaosztásnál, mert a leolvasandó érték az anyacsavar közepénél egy képzeletbeli pont, a mérőszalag elejének helyzete is bizonytalan, és a damil egy kissé rugalmas. A reális érték 3–5 mm.
- Ellenőrizze, hogy a g = 9,81 m/s^2 érték beleesik-e a kiszámolt $\overline{g} \pm \Delta g$ intervallumba. Ha nem, keressen rá elfogadható magyarázatot!

Szorgalmi feladat:

***2.1.2.** Hogyan változik a periódusidő a maximális kitérés függvényében?*
Ábrázolja a mért periódusidőt a maximális kitérés szögének függvényében!

2.2. Matematikai inga – kúpinga

A kúpingát csak kvalitatíve vizsgáljuk meg, mivel ezt a mozgást nehéz létrehozni.

<u>Eszközök:</u>

- *damillal összekötött két anyacsavar*
- *mérőszalag*
- *stopper*

Vizsgáljuk meg kísérletileg, miért okoz problémát, hogy pontosan egy kúpfelületen mozogjon a kötél! A kísérletet két hallgató végezze: az egyik tartsa az ingát, a másik próbálja meg megfelelő mozgásba hozni.

<u>Kötelező jegyzőkönyvi feladat nincs.</u>

Szorgalmi feladat:

Két hallgató végezze a mérést: az egyik pörgesse a kúpingát kicsi, ill. nagy sugarú körön, a másik pedig végezze az időmérést! Mindkét esetben a 10 kör megtételéhez szükséges időt mérjük meg. Mérjük meg az inga L hosszát: a mérőszalag elejét tegyük ahhoz a jól definiált ponthoz, ahol a damil rögzítve van, és olvassuk le a másik anyacsavar tömegközéppontjának helyét.

<u>Kiértékelés:</u>

A 10 kör megtételéhez szükséges időkből számoljuk ki a periódusidőket, majd a (9) képlet segítségével a kisebb, ill. nagyobb kör sugarát.