

Kényszerrezgés, rezonancia

Gyakorlatilag is igen fontos eset az, amikor egy rezgésre képes rendszer rezgése valamilyen külső, periodikus hatás (kényszer) működése közben zajlanak le. Az ilyen rezgéseket – szemben a korábban tárgyalt szabad rezgésekkel – *kényszerrezgéseknek* nevezik.

A külső kényszer sokféle lehet, itt a legegyszerűbb esetet vizsgáljuk, amikor a külső hatás mértéke időben szinusz vagy koszinusz függvény szerint változik.

Kényszerrezgés elektromos rezgőkörben

Egy rezgőkörben úgy lehet kényszerrezgést létrehozni, hogy a körbe beiktatunk egy $U_k(t)$ váltakozó feszültséget adó generátort (ábra). Gyakorlati szempontból a legfontosabb az az eset, amikor a kényszert jelentő generátorfeszültség harmonikus rezgés, ezért itt is ezzel az esettel foglalkozunk. Ennek megfelelően a kényszert az

$$U_k = U_0 \sin \omega_k t$$

függvénnyel adjuk meg.

A rendszert leíró egyenlet abban különbözik a csillapodó rezgést leíró egyenlettől, hogy megjelenik benne az $U_k(t)$ generátorfeszültség:

$$U_L + U_C + U_R = U_k(t),$$

amivel a kondenzátor töltésének változására felírt egyenlet így alakul

$$L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q_C(t)}{C} + RI = U_0 \sin \omega_k t.$$

Az egyenletet differenciálva, és felhasználva a $\frac{dQ_C}{dt} = I$ összefüggést kiküszöbölhető a töltés:

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = U_0 \omega_k \cos \omega_k t.$$

Az egyenletet L -lel végigosztva, és bevezetve a $2\beta = \frac{R}{L}$ és az $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ jelöléseket

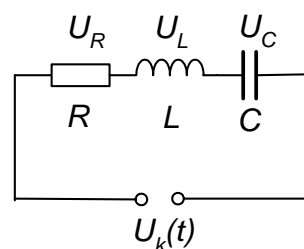
$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{U_0}{L} \omega_k \cos \omega_k t$$

egyenletet kapjuk.

A tapasztalat szerint egy ilyen áramkörben egy kezdeti berezgési folyamat elhalása után *harmonikus rezgés* jön létre a generátorfeszültség ω_k körfrekvenciájával, tehát a töltés időfüggését harmonikus függvénnyel írhatjuk le. Ilyen lehet például a

$$I(t) = I_m \sin(\omega_k t - \varphi)$$

függvény. Itt egyelőre ismeretlen a rezgés I_m amplitúdója, továbbá a generátorfeszültség és az áram fáziseltolódását megadó φ fázisszög.



Az ismeretlen állandókat ugyanúgy határozhatjuk meg, mint a csillapodó rezgés esetén tettük: a feltételezett megoldást behelyettesítjük a rezgés differenciálegyenletébe, és megvizsgáljuk, hogy ez az említett mennyiségek milyen értékeinél lesz valóban megoldás. A számolásból kiderül, hogy a fent feltételezett

$$I(t) = I_m \sin(\omega_k t - \varphi)$$

kifejezés csak akkor megoldása az egyenletnek, ha az amplitúdó és a fáziskülönbség is függ az ω_k kényszerfrekvenciától, az alábbi módon:

$$I_m(\omega_k) = \frac{U_0 \omega_k}{L \sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_k^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega_k^2}{2\beta \omega_k}$$

Ha ω_0 -t és β -t az áramkör adataival fejezzük ki, akkor rövid számolás után az áramerősség-amplitúdó frekvenciafüggésére az

$$I_m(\omega_k) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C}\right)^2}},$$

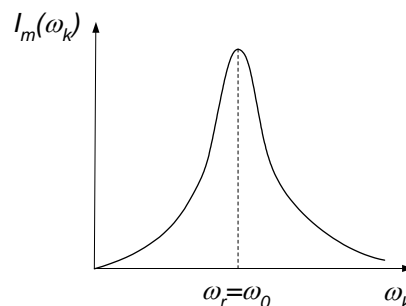
a fázisszögre pedig a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{C\omega_k} - L\omega_k}{R}$$

kifejezést kapjuk.

Az amplitúdófüggvényt szematikusan a mellékelt ábra mutatja. Látható, hogy – a mechanikai kényszerrezgéshez hasonlóan – itt is van rezonancia, ami az $\omega_k = \omega_0 = \omega_r$ körfrekvencián következik be

(ekkor I_m maximális, mert $\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C} = 0$).



Az itt tárgyalt áramkör (szinuszosan változó feszültségforrás R , L és C elemeket tartalmazó körben) tulajdonképpen a váltakozó áramú áramkörök egyik alaptípusa, az ún. soros RLC kör. Láttuk, hogy az áram és a feszültség maximális értékei között az

$$I_m = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C}\right)^2}}$$

összefüggés érvényes.

A váltakozó áram tárgyalásánál ezt az összefüggést az $I_m = \frac{U_0}{Z}$ alakban írják fel, ahol

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C}\right)^2}$. Ezt a frekvenciafüggő Z mennyiséget az itt tárgyalt áramkör *impedanciájának* nevezik.

Hasonló módon – egy impedancia bevezetésével – adható meg az áram és feszültség maximális értékei közötti összefüggés más váltakozó áramú áramkörök esetén is (a tárgyalás komplex számokkal a legegyszerűbb).

A rezonanciának az elektromágneses rezgések esetén is komoly gyakorlati jelentősége van. Alkalmazásának egyik legismertebb példája a rádió vevőkészülék működése: ahhoz, hogy egy rádióadást fogni tudjunk, a készülékünket „rá kell hangolnunk” az adó frekvenciájára, vagyis (pl. a kapacitás változtatásával) a rezgőkör sajátfrekvenciáját úgy kell beállítanunk, hogy azonos legyen az adó frekvenciájával.