

Az elektromos kölcsönhatás

Régi tapasztalat¹, hogy *megdörzsölt testek* különös *erőket* tudnak kifejteni. Így pl. megdörzsölt műanyagok (fésű), megdörzsölt üveg- vagy ebonitrúd papírdarabokat, apró porszemcséket, hajszálakat képes magához vonzani, de a tapasztalat szerint a megdörzsölt testek között taszítás is felléphet.

A dörzsöléssel ilyen különleges állapotba hozott testek által kifejtett erőket nem tudjuk megmagyarázni semmilyen mechanikai jellegű vagy gravitációs kölcsönhatással. A dörzsölés révén tehát az anyagnak egy új tulajdonsága válik érzékelhetővé, amely egy eddig ismeretlen kölcsönhatást okoz. Ezt a kölcsönhatást *elektromos- vagy elektrosztatikus kölcsönhatásnak*, az anyagnak az elektromos kölcsönhatást okozó sajátságát *elektromos töltésnek* nevezzük.

Elektromos erőhatások, az elektromos töltés

Az elektromos kölcsönhatás megismeréséhez először az elektromos állapotba hozott testek között fellépő erőhatásokat kell tanulmányozni, mert csak így ismerhetjük meg a kölcsönhatást okozó elektromos töltések sajátságait, és így juthatunk el az elektromos kölcsönhatás számszerű leírásához. A legegyszerűbb a nyugvó (sztatikus) elektromos töltések² között fellépő erőket vizsgálni. Értelmszerűen az elektromos jelenségek kutatásának ezt a területét *elektrosztatikának* nevezzük.

Az erőhatásokkal kapcsolatos alapkísérletek egyszerű eszközökkel végrehajthatók.

KÍSÉRLET_1:

- ◆ Bőrrrel megdörzsölt üvegrúd, szőrmével megdörzsölt ebonitrúd apró tárgyakat magához vonz, majd eltaszítja azokat.
- ◆ Az üvegrúd dörzsölésére használt bőr és az ebonitrúd dörzsölésére használt szőrme ugyanilyen erőhatásokat fejt ki.

KÍSÉRLET_2:

Üvegrudakat bőrrrel, ebonitrudakat szőrmével dörzsölünk meg, és megfigyeljük a megdörzsölt rudak illetve a dörzsölő anyagok között fellépő kölcsönhatásokat. Ehhez a üvegrudat és ebonitrudat vízszintes helyzetben felfüggesztünk egy cérnaszálra, majd ezek egyik végéhez egy másik megdörzsölt testet közelítünk. Ekkor a kölcsönhatás miatt a felfüggesztett rúd elfordul. A kölcsönható párok között az alábbi erőhatásokat tapasztaljuk:

- ◆ üveg - üveg kölcsönhatás: *taszítás*
- ◆ üveg - üveget dörzsölő bőr kölcsönhatása: *vonzás*
- ◆ ebonit – ebonit kölcsönhatás: *taszítás*
- ◆ ebonit – ebonitot dörzsölő szőrme kölcsönhatása: *vonzás*
- ◆ üveg - ebonit kölcsönhatás: *vonzás*
- ◆ üveg - ebonitot dörzsölő szőrme kölcsönhatása: *taszítás*
- ◆ ebonit – üveget dörzsölő bőr kölcsönhatása: *taszítás*

A kísérletek alapján a jelenségeket megpróbáljuk értelmezni:

¹ A görögök kb. 2500 évvel ezelőtt már tapasztalták, hogy a megdörzsölt borostyán könnyű tárgyakat (tollpihe, szalmaszál) magához vonz. A borostyán görög neve „elektron”: innen ered az elektron és az elektromosság elnevezés.

² A továbbiakban az „elektromos töltés” kifejezés helyett gyakran a rövidebb „töltés” kifejezést használjuk.

- ◆ A dörzsölés az összedörzsölt két testet olyan állapotba hozza, amely valami erő kifejtésre képes „anyag dolog” megjelenésével jár együtt, ezt nevezzük *elektromos töltésnek*.
- ◆ A kísérletek csak úgy értelmezhetők, ha *kétféle elektromos töltést* tételezünk fel: az egyik fajta töltés az összedörzsölt testek egyikén-, a másik fajta töltés a másikon jelenik meg.
- ◆ Megállapodás szerint a bőrrel megdörzsölt üvegrúdon megjelenő töltést *pozitív*nak, a szőrmével megdörzsölt ebonit töltését *negatív*nak nevezzük¹.
- ◆ Az azonos előjelű töltések *taszítják* egymást, az ellenkező előjelűek *vonzzák* egymást, ennek alapján feltételezhető, hogy az üvegrúdat dörzsölő bőrön negatív töltés van, az ebonitot dörzsölő szőrmén pedig pozitív.
- ◆ Mivel a magukra hagyott testek normális körülmények között (dörzsölés nélkül) általában elektromos erőhatásokat nem fejtenek ki egymásra, fel kell tételeznünk, hogy az anyagokban azonos mennyiségű pozitív és negatív töltés van, amelyek egymás hatását semlegesítik, ezért kifelé az anyagok elektromos töltései nem érzékelhetők. A dörzsölés hatására fellépő elektromos jelenségeket eszerint úgy értelmezhetjük, hogy a *dörzsölés szétválasztja* az anyagban azonos mennyiségben található pozitív és negatív töltéseket, így az összedörzsölt testek egyikén többlet pozitív-, a másikon többlet negatív töltés jelenik meg. A szétválasztott töltések között erőhatás lép fel, amit a töltést hordozó testek kölcsönhatásaként érzékelünk.
- ◆ Ma már azt is tudjuk, hogy az elektromos töltéseket a földi anyagot alkotó két elemi részecske, a proton és az elektron hordozza. Ezek közül a proton töltése pozitív (ez jelenik meg a megdörzsölt üvegrúdon), az elektroné pedig negatív (ez jelenik meg a megdörzsölt ebonitrúdon).

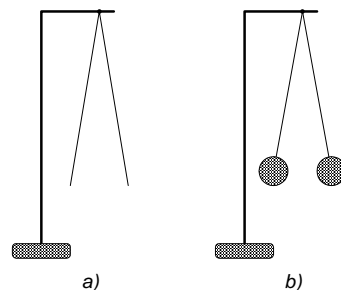
Az elektromos töltések további tulajdonságait szintén egyszerű kísérletekkel vizsgálhatjuk meg.

KÍSÉRLET_3:

- ◆ Cérnaszálra felfüggesztett sztaniollemezt (alumínium fóliát) a megdörzsölt üvegrúd vagy ebonitrúd magához vonzza, majd eltaszítja. A taszítás oka az, hogy a fémlemez a megdörzsölt rúd töltését átveszi, tehát a rúddal azonos töltésűre feltölthető.
- ◆ Azt, hogy a dörzsölésnél töltésszétválasztás történik, az is mutatja, hogy az üvegrúddal pozitívrá feltöltött sztaniollemezt a dörzsölő bőr vonzza (a bőrön tehát negatív töltés maradt), az ebonittal negatívrá feltöltött sztaniollemezt a dörzsölő szőrmé vonzza (a szőrmén pozitív töltés maradt).

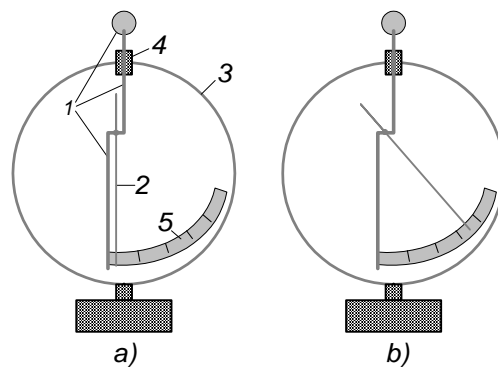
KÍSÉRLET_4:

- ◆ A töltések jelenlétének kimutatására szolgáló egyszerű eszközök az ábrán látható elektroszkópok. Ezek két vékony, hajlékony fémlemezéből (pl. alumínium fólia; a) ábra) vagy cérnaszálakra felfüggesztett két bodzabél (hungarocell) golyóból (b) ábra) állnak, amelyeket egyik végükön egy fém tartón egymáshoz rögzítünk. Ha a közös végre töltést viszünk, a lemezek illetve a bodzabél golyók – a közöttük fellépő taszítás miatt – egymástól eltávolodnak, szétágaznak.



¹ Az elnevezés *B. Franklintól* származik, aki a pozitív és negatív számokat tekintette mintának: az ellenkező előjelű töltések egymás hatását kioltják, ugyanúgy, ahogy a pozitív és negatív számok összeadva egymást „megsemmisítik”.

- ◆ Ezeknek az eszközöknek komolyabb – mérésre is alkalmas – változatai az elektrométerek. Ezek lényegében egy fémvázból (1) és a hozzá vízszintes tengellyel csatlakozó, mutatóként működő, vékony fémrúdból (2) állnak. Az eszközt a zavaró külső hatások kiküszöbölése érdekében egy fém házban (3) helyezik el, amelyet a fémvázról elszigetelnek (4). Az elektroszkóp töltetlen állapotában a 2 mutató függőlegesen lóg (a) ábra). Ha a fémváz tetején lévő fémgömbre töltést viszünk fel, akkor az 1 fémváz és a 2 mutató ugyanolyan előjelű töltést kap, így közöttük taszítás lép fel. Ennek következtében a mutató eltávolodik a fémvázról, elfordul a tengelye körül, és jelzi a töltés jelenlétét (b) ábra). A mutató kitérését egy mögötte elhelyezett skálán (5) leolvashatjuk, így az eszköz durván a felvitt a töltés nagyságát is jelzi.



KÍSÉRLET_5:

Két elektrométert egymás mellé helyezünk, és az alábbi kísérleteket végezzük el.

- ◆ Az egyik elektrométert feltöltjük, majd a töltött és töltetlen elektrométer gömbjeit fémrúddal összekötjük. Ekkor az eredetileg töltetlen elektrométer is töltést mutat, vagyis a töltés bizonyos anyagokkal egyik helyről a másikra *elvezethető*. Azokat az anyagokat, amelyek a töltést képesek elvezetni *vezetőknek* nevezzük (ilyenek pl. a fémek). Környezetüktől elszigetelt vezetők dörzsöléssel vagy a hozzájuk érintett, töltött állapotba hozott (megdörzsölt) anyagokkal *feltölthetők* (a környezettől való elszigetelés fontos, mert a felvitt többlet-töltések csak ekkor maradnak meg a vezetőkön).
- ◆ Ha a töltött- és töltetlen elektrométert farúddal kötjük össze, akkor a töltetlen elektrométer továbbra is töltetlen marad, nincs töltésvándorlás. Vannak tehát olyan anyagok, amelyek a töltést nem vezetik. Ezeket *szigetelőknek* nevezzük. Dörzsöléssel a szigetelőkön tudunk töltéseket könnyen felhalmozni, mert a szigetelőkről a szétválasztott töltések nem vezetődnek el.
- ◆ Ha a két elektrométerre ellenkező előjelű töltést viszünk, majd azokat vezetővel összekötjük, akkor mindkét elektrométer töltése csökken: a *kétféle töltés kompenzálja* egymás hatását.

KÍSÉRLET_6:

Elektromos megosztás:

- ◆ Két töltetlen elektrométert vezető rúddal kötünk össze, és az egyikhez feltöltött üvegrudat (pozitív töltés) közelítünk. Ekkor mindkét elektrométer töltést mutat. Ha az üvegrudat eltávolítjuk az elektrométer közeléből, akkor az elektrométerek töltése eltűnik.

Ezt a jelenséget annak a megfigyelésnek a segítségével érthetjük meg, hogy vezetőkben a töltések könnyen elmozdulhatnak: a két elektrométerből és az összekötő rúdból álló összefüggő vezetőben a pozitív töltésű üvegrúd a negatív töltéseket a rúdhoz közeli elektrométerre vonzza, a távoli elektrométeren pedig pozitív töltés marad. Így mindkét elektrométer töltést jelez. A vezetőkben a közelükben elhelyezett töltések által okozott ilyen töltésszétválást *elektromos megosztásnak* nevezzük.

A megosztó hatás megszűnése után a töltések visszarendeződnek eredeti állapotukba.

KÍSÉRLET_7:

A megosztott töltések szétválaszthatók, és újra egyesíthetők:

- ◆ Az összekötő vezető rudat a megosztott rendszerről levéve, a szétválasztott töltés megmarad az elektrométereken.
- ◆ A két elektrométert újra vezetővel összekötve, a megosztott töltések semlegesítik egymást, a töltés mindkét elektrométerről eltűnik.

KÍSÉRLET_8:

Töltés előjelének meghatározása elektrométerrel a megosztás jelensége alapján:

- ◆ Elektrométert ismert töltéssel látunk el, majd ismeretlen előjelű töltést közelítünk hozzá. Ekkor a megosztás miatt a kitérés nő, ha az ismeretlen töltés előjele megegyezik az elektrométerével, ellenkező előjelű töltésnél a kitérés csökken.

Az elektrosztatikus kölcsönhatás számszerűsítése, a Coulomb-törvény

Az elektromos töltések kölcsönhatásának számszerű vizsgálatát először Coulomb (1785) végezte el. A mérés során töltött vezető gömbök kölcsönhatását mérte az igen kis erők mérésére alkalmas *torziós mérleggel*.

A torziós mérleg vékony, rugalmas szárra súlyzószzerű elrendezésben, a "súlyzó" tömegközéppontjánál felfüggesztett két azonos méretű fémgömb (ábra). Ha a szár elég vékony, akkor a "súlyzó" egyik gömbjére ható igen kis erő esetén is mérhető módon elfordul. Az elfordulás során a rugalmas szárra egy visszatérítő nyomaték lép fel, amely arányos a szögelfordulással. Emiatt a visszatérítő nyomaték egy meghatározott szögelfordulásnál kompenzálja a súlyzóra ható erő nyomatékát, és egyensúly alakul ki. A visszatérítő nyomaték a szögelfordulásból meghatározható, abból pedig a súlyzóra ható ismeretlen erő kiszámítható.

A Coulomb-féle mérésnél a fémgömbök egyikére vitték fel (pl. megdörzsölt üvegrudat érintve hozzá) a kölcsönható töltések egyikét (Q_1), és ennek közelében helyezték el a másik töltött testet (Q_2 töltésű fémgömb). A torziós mérleg a gömbök elektromos kölcsönhatása miatt elfordul. Megmérve az elfordulás szögét, és ismerve a felfüggesztő szár rugalmas tulajdonságait, a gömbök között fellépő erő meghatározható.

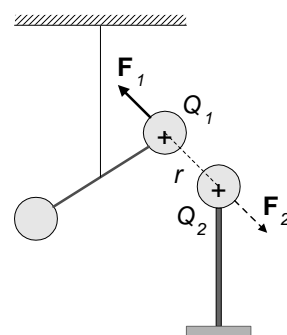
A *gömb* választása azért szerencsés, mert

- ◆ gömbszimmetrikus a töltéeloszlás, ami várhatóan leegyszerűsíti a mérés kiértékelését (később látni fogjuk, hogy a gömb egy pontszerű töltéssel azonos módon viselkedik)
- ◆ egy töltött gömböt ugyanolyan üres gömbhöz érintve a *töltés felezhető*, vagyis mód van a töltés nagyságának mérésére.

A berendezésben változtatható a kölcsönható testek egymáshoz viszonyított helyzete, vagyis tanulmányozható a vonzóerő távolságfüggése, és mód van arra is, hogy a mérést különböző nagyságú töltésekkel végezzük el.

A mérések szerint a kölcsönhatásnál fellépő erők nagysága arányos a kölcsönható töltések nagyságával, és fordítva arányos a töltések távolságának négyzetével. Az ábra jelöléseivel:

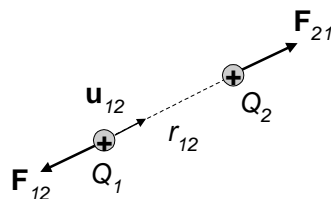
$$F_{12} = F_{21} \sim \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}.$$



Szigorúan véve a töltések r_{12} távolságának csak akkor van értelme, ha *pontszerű* töltésekről van szó, vagyis ha a töltések mérete sokkal kisebb, mint a köztük lévő távolság. Később látni fogjuk, hogy gömbszimmetrikus töltéeloszlásnál távolságként a gömbök középpontjainak távolsága használható.

Az arányossági tényezőt K_e -vel jelölve, az egyes töltésekre ható erő vektori alakban (ábra):

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12}$$



Ez a Coulomb-törvény, ahol r_{12} a két test távolsága, \mathbf{u}_{12} az 1 testtől a 2 testhez mutató egységvektor, Q_1 és Q_2 a testek elektrosztatikus kölcsönhatásának erősségét jellemző elektromos töltések, K_e pedig egyelőre ismeretlen arányossági tényező.

A törvény kifejezi azt a tapasztalatot is, hogy azonos előjelű töltések ($Q_1 \cdot Q_2 > 0$) taszítják, ellenkező előjelűek ($Q_1 \cdot Q_2 < 0$) pedig vonzzák egymást. A tapasztalat szerint a két kölcsönható töltésre ható erő ellentétes irányú és azonos nagyságú (Newton III. törvénye teljesül): $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Ez a törvény akkor érvényes, ha a két kölcsönható test környezetében nincs más, a kölcsönhatást zavaró – pl. elektromosan töltött – test. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a két töltés kölcsönhatását üres térben – vákuumban – kellene vizsgálnunk, hiszen az anyagokat töltött részecskék építik fel, s ezek a töltések módosítják a kölcsönhatást. Kimutatható azonban, hogy a levegő módosító hatása igen kicsi, így a méréseket levegőben végezve, igen jó közelítéssel megkapjuk a vákuumban érvényes törvényt¹.

A törvénnyel kapcsolatban két kérdés vetődik fel:

- ◆ mi a Q egysége?
- ◆ mennyi a K_e ?

Azt a problémát, hogy egyetlen összefüggésből két új mennyiséget, a töltést és az arányossági tényezőt kell meghatároznunk, kétféleképpen oldhatjuk meg (ugyanazzal a problémával találkoztunk már Newton II. törvényénél is, ahol a két mennyiség a tömeg és az erő volt):

- ◆ önkényesen rögzítjük a töltés egységét (pl. egységként egy reprodukálható módon feltöltött test töltését választjuk). Ekkor a K_e arányossági tényező mérés útján határozható meg: ha két, egymástól $r_{12}=d$ távolságban lévő, egységnyi töltésű (Q_{egys}) test által

egymásra kifejtett $F_{12}=F$ erőt megmérjük, akkor az arányossági tényezőt a $K_e = \frac{Fd^2}{Q_{egys}^2}$

összefüggésből kapjuk meg. A töltés ma használt, törvényben rögzített egysége (az ún. SI egység) $1 \text{ Coulomb} = 1C^2$. A töltés egységének ilyen választása esetén két $1C$ nagyságú töltés között $1m$ távolságban $F = 9 \cdot 10^9 N$ erő lép fel, ezért a Coulomb-törvényben szereplő arányossági tényezőre az SI rendszerben azt kapjuk, hogy

$$K_e = \frac{9 \cdot 10^9 N \cdot 1m^2}{1C^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}.$$

- ◆ a másik lehetőség az, hogy önkényesen rögzítjük a K_e állandót, ekkor Q egysége a Coulomb-törvényből származtatható. Ezt az eljárást követik a fizika bizonyos területein még ma is használatos elektrosztatikus CGS rendszerben. Itt önkényesen a $K_e=1$ egység nélküli értéket választják, amiből következik, hogy az elektromos töltés egysége: $1g^{1/2}cm^{3/2}s^{-1}$.

¹ A töltések kölcsönhatására vonatkozó Coulomb-törvényt eredetileg levegőben állapították meg. Csak később derült ki, hogy az anyag jelenléte módosítja a töltések kölcsönhatását. Az is kiderült azonban, hogy a levegőben kimért törvények a vákuumban érvényes törvényekkel gyakorlatilag azonosak.

² Az $1C$ egységet az SI rendszerben az áramerősség egységéből ($1A$) származtatjuk: $1C = 1As$.

Lényegében formai okokból (bizonyos alaptörvények egyszerűbb alakban írhatók fel) az *SI* rendszerben a K_e helyett egy új konstanst vezetnek be (ϵ_0):

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 = 8.855 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2.$$

Ezzel a Coulomb-törvény az

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{u}_{12}$$

alakot ölti. A törvény *nyugvó, pontszerű töltések* (vagy gömbszimmetrikus töltéeloszlások) között *vákuumban* fellépő kölcsönhatást ír le.

Az elektrosztatikus erők jellege, elektromos erőtér és elektromos térerősség

Ha egy Q ponttöltés környezetében bárhol elhelyezünk egy másik (q) ponttöltést, akkor arra a Coulomb-törvénynek megfelelő erő hat, vagyis egy töltés maga körül a térben olyan fizikai állapotot hoz létre, amelynek eredményeképpen bármilyen másik, odahelyezett töltésre elektrosztatikus erő hat. Rövidebben ezt úgy szokás megfogalmazni, hogy a Q elektromos töltés maga körül ún. elektrosztatikus- vagy elektromos *erőteret* hoz létre. Azt, hogy valahol van-e elektromos erőtér, eszerint úgy állapíthatjuk meg, hogy a kérdéses helyre egy mérőtöltést teszünk, és ha erre erő hat, akkor ott az erőtér jelen van, ha nem hat erő, akkor nincs jelen. A fenti módszerrel tehát az erőtér létezését akkor is meg tudjuk állapítani, ha az erőteret létrehozó töltést nem ismerjük. A kérdés az, hogy lehet-e ezt az erőteret számszerűen is jellemezni.

Azt, hogy egy töltés környezetében milyen "erősségű" erőtér jön létre, megpróbálhatjuk jellemezni például úgy, hogy a tér különböző pontjaiban meghatározzuk egy önkényesen kiválasztott pontszerű q pozitív *mérőtöltésre* ható erőt (ennek a mérőtöltésnek olyannak kell lennie, hogy jelenléte ne befolyásolja az eredeti viszonyokat). Vizsgáljuk meg, hogy milyen ez az erő különböző töltéselrendeződések által létrehozott elektromos erőtérben.

Először egy Q pozitív ponttöltés által létrehozott erőteret vizsgálunk. Alkalmazzuk a Coulomb-törvényt erre az esetre. A q mérőtöltésre ható erő eszerint

$$\mathbf{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \mathbf{u} = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u} \right),$$

ahol \mathbf{u} az erőteret létrehozó töltéstől a mérőtöltés felé mutató egységvektor, r a kölcsönható töltések távolsága. Látható, hogy ez az erőhatás nemcsak az erőteret létrehozó Q töltésre jellemző, hanem a q mérőtöltéstől is függ. Az is látható azonban, hogy az erőhatás nagysága arányos a mérőtöltés nagyságával:

$$F_q \sim q.$$

Következő lépésként vizsgáljuk meg, hogy több ponttöltés által létrehozott erőtérben milyen erő hat a q mérőtöltésre. Ezt az erőt megpróbálhatjuk elméleti úton, a *superpozíció elve* alapján kiszámítani. Eszerint az elv szerint a kiválasztott q mérőtöltésre az egyes töltések által kifejtett erőt nem befolyásolja a többi töltés jelenléte, vagyis minden egyes erő úgy számítható ki, mintha a többi töltés ott sem lenne. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez az elv – különleges esetektől eltekintve – teljesül. Ennek alapján a q töltésre ható eredő erőt úgy kaphatjuk meg, hogy az egyes töltések által egyenként kifejtett erőket vektorilag összeadjuk (ez látható az alábbi *a*) ábrán), vagyis a $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$ töltések által a mérőtöltésre kifejtett eredő erő (\mathbf{F}_e) az alábbi módon kapható meg:

$$\mathbf{F}_e = q \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i.$$

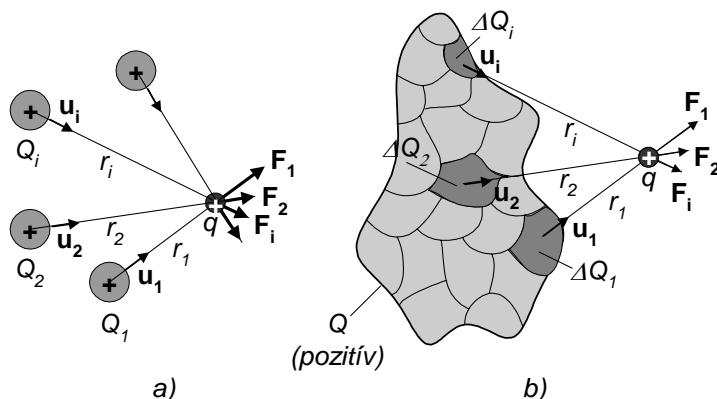
Látható, hogy az erő most is arányos a mérőtöltéssel, a

$$\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i$$

arányossági tényező pedig csak az erőteret létrehozó töltésektől, továbbá a helytől függ.

Hasonlóan járhatunk el, ha egy kiterjedt testhez tartozó folytonos töltéseloszlás által létrehozott erőteret akarunk jellemezni, csak

ekkor a kiterjedt testet fel kell osztani igen kicsi térfogatelemekre (b) ábra), és az ezekben foglalt töltések által a kiszemelt pontszerű töltésre kifejtett erőket kell összegezni. Könnyen belátható, hogy az erő ekkor is arányos lesz a mérőtöltéssel.



Ez azt jelenti, hogy a vizsgált esetekben, adott helyen az $\frac{\mathbf{F}_q}{q}$ mennyiség független a mérőtöltéstől, csakis az erőteret létrehozó töltésekre jellemző. A töltések által létrehozott erőter hatásait tehát ezekben az esetekben az

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_q}{q}$$

vektorral jellemezhetjük.

Azt, hogy ez a jellemző valóban mindig használható, kísérletileg kell megvizsgálni. A tapasztalat szerint az elektrosztatikus kölcsönhatásra a szuperpozíció elve érvényes, és az előbbi megfontolások általában is helyesek.

Mindezek alapján az elektromos erőter jellemzésére bevezethetünk egy vektormennyiséget, az alábbi definícióval: az elektromos töltések közelében létrejövő elektromos erőterbe elhelyezünk egy pontszerűnek tekinthető, az eredeti viszonyokat elhanyagolható mértékben zavaró q pozitív mérőtöltést, és meghatározzuk (megmérjük vagy kiszámítjuk) a rá ható \mathbf{F}_q elektromos erőt. Az elektromos erőter jellemzésére az adott pontban az

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_q}{q}$$

vektort használjuk, amelyet *elektromos térerősségnek* nevezünk, és ezt a definíciót *mindenféle eredetű elektromos erőter esetén érvényesnek tekintjük*.

A definíció alapján a térerősség mértékegységét is meghatározhatjuk, és arra azt kapjuk, hogy 1 N/C .

A fentiek alapján egy erőteret, amelyet valamilyen töltés maga körül létrehoz, úgy tudunk jellemezni, hogy az erőter minden pontjában megadjuk az elektromos térerősségvektort. Ha ezt megtettük, akkor ahhoz, hogy egy tetszőleges pontban elhelyezett töltésre ható erőt kiszámítsuk, nincs szükségünk az erőteret létrehozó töltött objektumok ismeretére, hiszen azoknak az "erőkifejtő hatását" a térerősségvektor egyértelműen jellemzi. (Például, egy \mathbf{E} térerősségű helyen elhelyezett q_1 töltésre ható erő $\mathbf{F}_e = q_1 \mathbf{E}$.) Ebben az értelemben tehát a térerősség-vektorokkal jellemzett erőter hordozza az erőteret létrehozó objektumok hatásait.

Ennek alapján két töltött test kölcsönhatását úgy is felfoghatjuk, hogy az egyik maga körül létrehoz egy elektromos erőteret, és ez az erőter hat a másikkra: *az erőter közvetíti a*

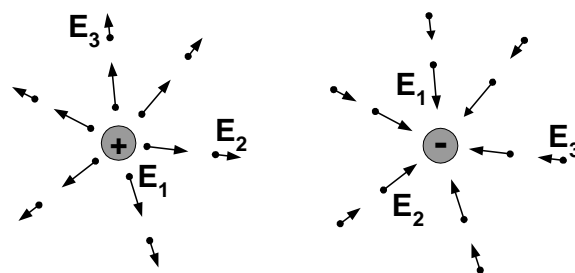
kölcsönhatást. Ez a felfogás szemben áll azzal a korábbi elképzeléssel, amely szerint az egymástól távol elhelyezkedő töltések közvetlenül és azonnal hatnak egymásra (ez volt az ún. *távolhatás* elképzelés). Ebben a kérdésben csak a tapasztalat dönthet, az pedig azt mutatja, hogy ha valahol töltés jelenik meg, akkor az erőter először a töltés közelében változik meg, és a változás véges sebességgel halad tovább, a hatásokat az erőter véges sebességgel közvetíti. A töltés tehát közvetlenül az erőterrel áll kapcsolatban, vagyis a korábbi távolhatás elképzeléssel szemben ez az ún. *közelhatás* működik.

A térerősséget a definíció alapján elvileg mérés segítségével határozhatjuk meg. Látni fogjuk azonban, hogy ismert töltéselrendeződések által létrehozott térerősség ki is számítható. Ha az erőteret pontszerű töltés hozza létre, akkor könnyű helyzetben vagyunk, hiszen ekkor a mérőtöltésre ható erőt a Coulomb-törvényből kiszámíthatjuk, és ebből – a korábban megismert módon – a térerősségvektor helytől való függését is megkapjuk. Bonyolultabb esetekben a számításhoz a térerősségvektor tulajdonságainak megismerése útján felállított általános törvényekre van szükség.

Az elektromos erőter szemléltetése, erővonalkép

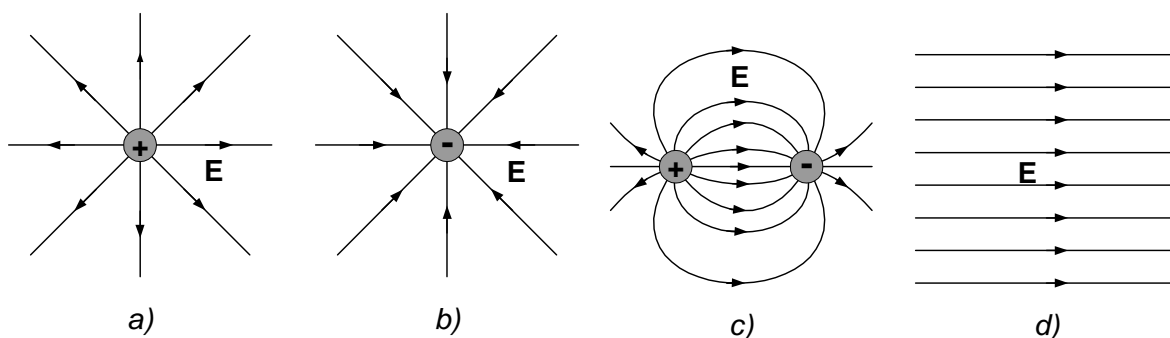
Az elektromos erőterben a tér minden pontjához tartozik egy vektor, az \mathbf{E} elektromos térerősségvektor, amely az elektromos erőteret (az ott fellépő erőhatást) jellemzi. Sok esetben nagyon hasznos, ha az erőter jellegét szemléletessé tudjuk tenni, vagyis azt valamilyen módon ábrázoljuk.

Az erőter szemléletes megjelenítésének egy lehetséges módja az, hogy különböző pontokhoz tartozó térerősségvektorokat lerajzoljuk, ahogy az pontszerű negatív- és pozitív elektromos töltés által létrehozott erőterben az ábrán látható. Így egy térerősség-térképet kapunk, amely az egyes pontokban mutatja a térerősség nagyságát és irányát.



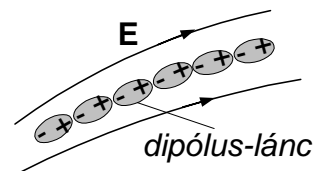
Ennél áttekinthetőbb és hasznosabb ábrázolást kapunk a *térerősségvonalak* (másik szokásos elnevezéssel *elektromos erővonalak*) bevezetésével. A térerősségvonalakat úgy kapjuk, hogy a berajzolt térerősségvektorokhoz olyan görbéket szerkesztünk, amelyekhez egy pontban húzott érintő az adott ponthoz tartozó térerősségvektor irányába mutat. A térerősségvonalnak irányt is adunk, ami megegyezik a hozzátartozó térerősségvektorok irányával. Más szóval, a térerősségvonal az elektromos erőter "irányváltozásait" követi és szemlélteti.

Az alábbi ábrán vázlatosan bemutatjuk az előző ábrán is szereplő ponttöltések (a) és (b) ábra és egymáshoz közel elhelyezett pozitív és negatív elektromos töltés – egy ún. *dipólus* (c) ábra) – által létrehozott erőter térerősségvonalait. A dipólus esetén a térerősségvektor egy adott pontban a két töltés által létrehozott térerősségek vektori összegeként kapható meg



(alkalmazzuk a szuperpozíció elvét). Bemutatunk továbbá egy fontos szerepet játszó speciális esetet, amikor egy bizonyos térrészben a térerősségvektor nagysága és iránya minden pontban azonos (*d*) ábra). Az ilyen erőteret, (vagy egy erőter ilyen tartományát) *homogén erőtérrnek* nevezik. Homogén erőtérben a térerősségvonalak párhuzamos egyenesek.

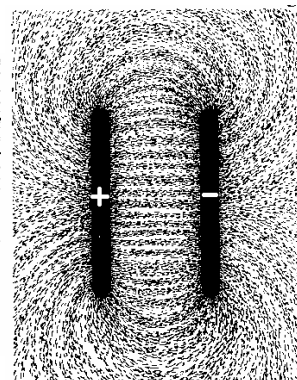
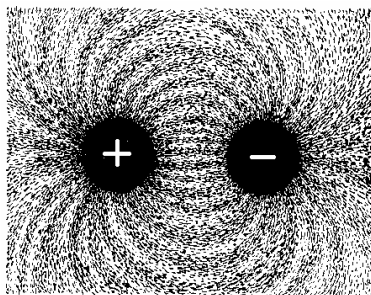
Ezeket az erővonalakat egyszerűbb esetekben (pl. ponttöltés vagy ponttöltésekből álló töltésrendszerek) esetén meghatározhatjuk a térerősségvektorok kiszámításával, de az erővonalak kép kísérletek segítségével is megvizsgálható. Erre az ad lehetőséget, hogy szigetelő anyagszemcsék elektromos erőtérben dipólusokká válnak. Ha ezeket a dipólusokat folyadékba betéve mozgásképesé tesszük, akkor kölcsönhatásuk miatt rendeződnek: a dipólusok beállnak a térerősség irányába, ugyanakkor ellentétes végükkel egymáshoz csatlakoznak, és láncokat képezve, kirajzolják az elektromos erőtér erővonalait (ábra).



KÍSÉRLET:

Egy üvegedénybe daraszemcséket tartalmazó olajat teszünk, majd az edény aljára ponttöltést, dipólust, síklapot vagy kondenzátort modellező fém elektródokat helyezünk el, és azokat feltöltjük (feszültséget kapcsolunk rájuk). Ekkor a daraszemcsék megmutatják a különböző töltések körül kialakuló elektromos erőtér erővonalait. Az üvegedényt vetítő gépre téve, a kapott térerősség-ábra jól láthatóvá tehető. Az alábbi ábrákon a valóságos képhez hasonló grafika látható, amely egy dipólus és két ellentétes töltésű, párhuzamos síklap elektromos erőterét mutatja.

Az ábrákon bemutatott esetek azt sugallják, hogy a térerősségvonalak sűrűségével az elektromos térerősség nagysága is jellemezhető. Az erővonalábrákon ugyanis világosan látható, hogy a térerősségvektor nagyságának csökkenése irányában haladva (pl. a ponttöltéstől távolodva) a térerősségvonalak ritkulnak.



A térerősségvonal-képbe elvileg tetszőleges számú térerősségvonalat berajzolhatunk, de célszerűnek látszik, hogy a térerősség nagyságának egyértelmű jellemzése érdekében valamilyen megállapodást fogadjuk el a berajzolt erővonalak sűrűségére vonatkozóan. Az általánosan elfogadott megállapodás a következő: a térerősségvonal-képet mindig úgy szerkesztjük meg, hogy bármely pontban *a térerősségvonalakra merőleges egységnyi felületet annyi térerősségvonal metsze át, amennyi ott a térerősségvektor számértéke*. Ez más szóval azt jelenti, hogy a térerősség számértéke az egységnyi (térerősségre merőleges) felületen átmenő erővonalak számát adja meg. Eszerint a megállapodás szerint egy elektromos erőtérben az \mathbf{E} térerősségű helyen a térerősségvonalakra merőleges ΔA_N nagyságú felületen át rajzolható erővonalak $N_{\Delta A}$ számát az

$$(E)_{\text{számért.}} = \frac{\Delta N_{\Delta A}}{(\Delta A_N)_{\text{számért.}}}$$

összefüggésből kaphatjuk meg:

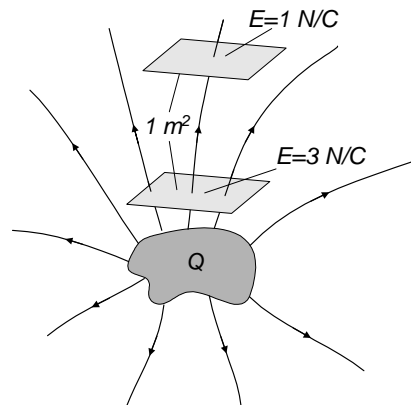
$$\Delta N_{\Delta A} = (E)_{\text{számért.}} \cdot (\Delta A_N)_{\text{számért.}}$$

Az ilyen módon elkészített térerősségvonal-képről a térerősség nagysága az ábrán látható módon olvasható le.

Nyilvánvaló, hogy homogén erőterben egy adott helyen a fenti szabály szerint megrajzolt erővonalasűrűség a tér bármelyik pontjában ugyanaz lesz, és a térerősségre merőleges felületet átmetsző erővonalak száma a fenti módon tetszőleges méretű felület esetén kiszámítható.

Felmerül azonban a kérdés, hogy nem homogén erőterben (pl. egy ponttöltés erőterében) igaz-e az, hogy ha egy adott helyen a szabály szerint megrajzoljuk az erővonalakat, majd ezeket meghosszabbítjuk, akkor az erővonalaképmásutt is meg fog felelni a szabálynak?

Próbáljuk megrajzolni a fenti definíció alapján egy pontszerű, pozitív Q ponttöltés körül kialakuló erőter erővonalképét. Ehhez meg kell határoznunk, hogy a töltés elektromos erőterét szemléltető sugárirányú erővonalakat milyen sűrűn kell berajzolnunk, hogy az erővonal-ábra a térerősség nagyságát is tükrözze. Ebben az erőterben a térerősség sugárirányú és gömbszimmetrikus, a töltéstől r távolságban a térerősség mindenütt azonos nagyságú. Ha az egyszerűség kedvéért a térerősségre merőleges felületként a töltés körül elképzelt r sugarú gömbfelületet vesszük fel, akkor ennek a felületnek minden egyes pontján a térerősség nagysága



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Mivel a felület nagysága $\Delta A_N = 4r^2\pi$, a berajzolandó erővonalak száma

$$\Delta N_{\Delta A} = (E\Delta A_N)_{\text{számért.}} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} 4r^2\pi \right)_{\text{számért.}} = \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}}.$$

Vegyük észre, hogy a szükséges erővonalak száma nem függ r -től, ezért a berajzolandó erővonalak száma a ponttöltéstől mért tetszőleges távolságban ugyanannyi.

Ez azt jelenti, hogy egy adott helyen a szabály szerint berajzolt erővonalak megszakítás nélkül továbbrajzolhatók, nem kell új erővonalakat beiktatni vagy erővonalakat megszakítani.

Érdeemes megjegyezni, hogy ez az eredmény annak a speciális körülménynek a következménye, hogy pontszerű töltések elektrosztatikus kölcsönhatása – és ennek következtében egy ponttöltés térerőssége – $1/r^2$ -es távolságfüggést mutat. Ezért esik ki a számolásból az r^2 , vagyis az erővonalaszámnak az r -től való függése.

További megfontolásokból (és a tapasztalatból) az is kiderül, hogy a fenti megállapítás nem csak ponttöltések, hanem tetszőleges töltéseloszlások erőterére is igaz: *az elektrosztatikus erőter erővonalai megszakítás nélkül, folytonos vonalakként rajzolhatók fel.*

A fenti számításból kiderült, hogy egy pozitív Q ponttöltésből összesen

$$N_e = \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}}$$

számú erővonalnak kell kiindulni az erővonalak ábrázolására elfogadott szabály szerint, vagyis a gömbfelületet metsző erővonalak száma arányos a gömbfelületen belül található Q töltés nagyságával. Ebből az a fontos következtetés adódik, hogy ha a Q ponttöltést nem gömb alakú, zárt felülettel vesszük körül, a felületet metsző erővonalak száma akkor is ugyanannyi lesz, tehát a fenti összefüggés általában is érvényes. (A zárt felületre vonatkozóan itt annyi megszorítás van, hogy az állítás csak olyan felületre igaz, amelyet a töltésből kiinduló bármely erővonal csak egyszer metsz.)

Ha a töltés negatív, akkor az erővonalak száma ugyanennyi, csak most az erővonalak nem a töltésből indulnak ki, hanem abba érkeznek meg.

Ha ugyanabban a pontban $Q_1 > 0$ pozitív- és $Q_2 < 0$ negatív töltést helyezünk el, akkor az eredő térerősség nagyságát a töltésektől r távolságban az

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 - |Q_2|}{r^2}$$

összefüggés adja meg. Ilyenkor a töltéselrendezésből kiinduló, és a töltéseket körülvevő zárt felületet metsző erővonalak száma

$$N_e = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}} = \left(\frac{Q_1}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}} + \left(\frac{Q_2}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}} = \left(\frac{Q_1}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}} - \left(\frac{|Q_2|}{\epsilon_0} \right)_{\text{számért.}}$$

Ez a szám úgy is felfogható, hogy a zárt felületből kifelé haladó erővonalak számát pozitívnak-, a zárt felületbe befelé haladó erővonalak számát negatívnak tekintjük, és kiszámítjuk az erővonalszámok algebrai összegét (a kifelé- és befelé haladó erővonalak számának különbségét). Ellenkező előjelű ponttöltések egyidejű jelenléte esetén tehát a töltéseket körülvevő felületet metsző *erővonalak előjeles összege* arányos a felületbe bezárt *eredő töltéssel*.

Ha a zárt felületet metsző erővonalak számát nem pontszerű töltések esetén vizsgáljuk, akkor kiderül, hogy a fenti megállapítás tetszőleges töltéeloszlások erőterére is igaz. Ezt a tapasztalatot érdemes valamilyen praktikusán használható matematikai formában megfogalmazni. Ehhez azonban szükség van egy olyan mennyiségre, amelynek segítségével automatikusan megkapható egy felületet egyik- illetve másik oldalról átmetsző erővonalak számának különbsége. Ez a mennyiség a fluxus, amit a következő pontban vezetünk be.

Fluxus elektromos erőterben, az elektrosztatikus erőter II. alaptörvénye

A felületet metsző erővonalakat előjelesen összeszámlálva a mennyiséget az egyszerűség kedvéért először homogén elektromos erőterben vezetjük be. Az E homogén erőterben a térerősségre merőleges A felületet (ábra) átmetsző erővonalak számát megadó EA mennyiség az *elektromos erőternek az A felületre vonatkozó fluxusa*, és jelölésére rendszerint a Φ_E^A szimbólumot használják:

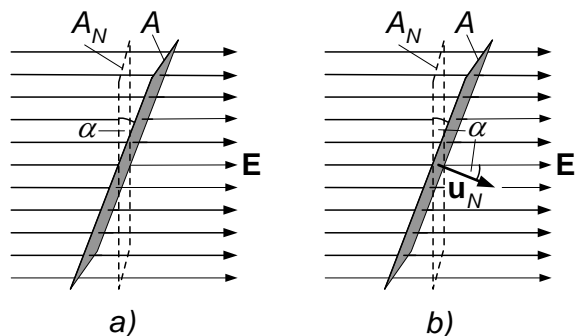
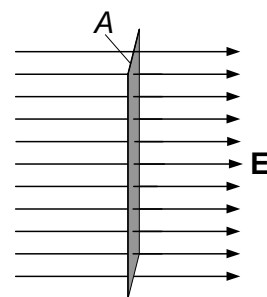
$$\Phi_E^A = EA$$

Az alsó index arra utal, hogy ez az elektromos térerősség fluxusa, a felső index pedig azt mutatja, hogy a fluxus az A felületre vonatkozik. Az így definiált fluxus – a szemléletes jelentését megadó erővonalszámtól eltérően – nem dimenzió nélküli szám, hanem Nm^2/C egységben megadott *fizikai mennyiség*.

A vizsgált felület azonban nem mindig merőleges a térerősségre. Ilyenkor a fluxust (és a felületet metsző erővonalak számát) úgy kapjuk meg, hogy a felületnek a térerősségre merőleges A_N vetületét szorozzuk meg a térerősséggel (a) ábra)

$$\Phi_E^A = EA_N = EA \cos \alpha$$

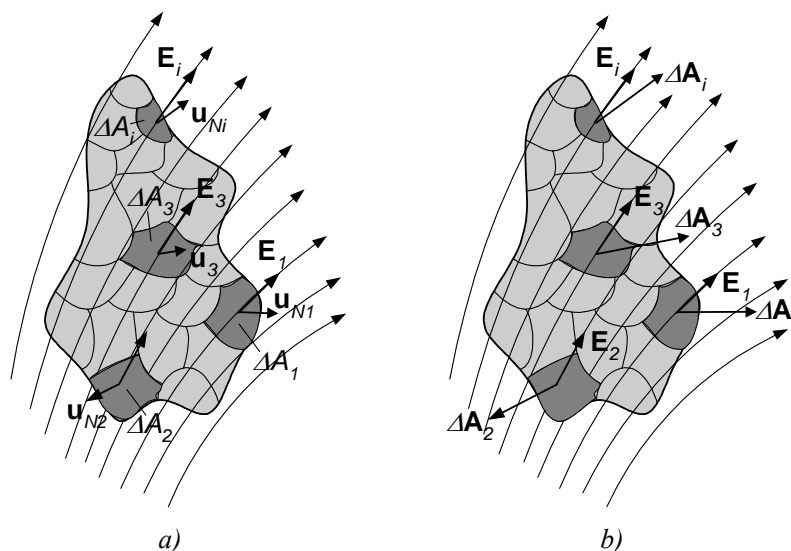
Ebben az esetben a fluxus kiszámítása úgy is történhet, hogy a felület állását a felületre merőleges \mathbf{u}_N *egységvektorral* adjuk meg (b) ábra). Ekkor a fenti kifejezés úgy is



felfogható, mint az \mathbf{E} vektor és az $A\mathbf{u}_N$ vektor skaláris szorzata (ugyanis α éppen e két vektor által bezárt szög):

$$\Phi_E^A = \mathbf{E}A\mathbf{u}_N = EA \cos \alpha .$$

A legáltalánosabb – és eléggé gyakori – eset az, hogy az erőter nem homogén, tehát a térerősség helyről-helyre változik, és a felület sem sík. Ilyenkor a szokásos eljárást követjük: a felületet olyan kis elemi részekre (ΔA_i) osztjuk, amelyeken belül a térerősség (\mathbf{E}_i) már



közelítőleg állandónak tekinthető, és amely közelítőleg sík, tehát az állása megadható a rá merőleges \mathbf{u}_{Ni} egységvektorral (a) ábra). Az egyes felületelemekre vonatkozó fluxust így a $\Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i \Delta A_i \mathbf{u}_{Ni}$ kifejezés adja meg.

Ez a kifejezés rövidebben is felírható, ha bevezetjük a *felületvektort*: ezt olyan vektorként definiáljuk, amely merőleges a felületre, és nagysága a felület nagyságával egyenlő. Eszerint a ΔA_i felületelem felületvektora $\Delta\mathbf{A}_i = \Delta A_i \mathbf{u}_{Ni}$. Ezzel a felületelemre vonatkozó fluxus (b) ábra)

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i .$$

A teljes felületre vonatkozó fluxus közelítőleg az elemi $\Delta\Phi_i$ fluxusok összege, vagyis:

$$\Phi_E^A \approx \sum \Delta\Phi_i = \sum \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i .$$

ahol i a felületelem sorszáma.

Az A felületre vonatkozó fluxus pontos értékét úgy kapjuk meg, hogy a felület felosztását egyre finomabbá tesszük (ekkor egyre inkább igaz lesz, hogy a felületelemen belül a térerősség már nem változik, és a felületelem síknak tekinthető), és megkeressük az így kiszámított összeg határértékét:

$$\Phi_E^A = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta\Phi_i = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{E}_i \Delta\mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{E} d\mathbf{A} .$$

A matematikában az ilyen határérték neve: az \mathbf{E} vektornak A felületre vett *felületi integrálja*, amelynek jelölésére az egyenlet jobboldalán álló integrál-szimbólumot használják. Kiszámításának módszereivel a matematika foglalkozik, az általunk vizsgálandó egyszerű

esetekben azonban ezekre az ismeretekre nem lesz szükségünk: ezt az integrál-szimbólumot a továbbiakban egy igen finom felosztáson végrehajtott összegzésként kezelhetjük.

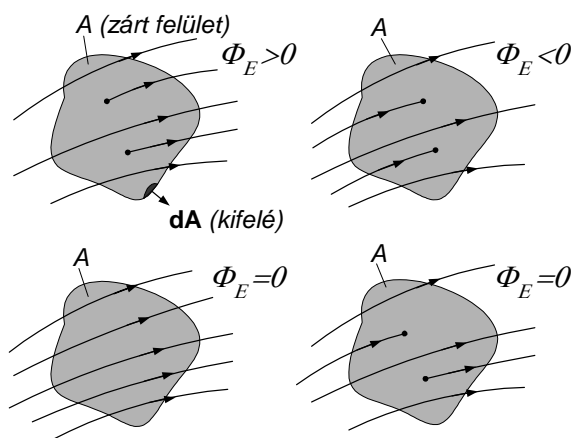
Ha a térerősségvonal-képet a tárgyalt megállapodás szerint rajzoljuk meg, akkor egyszerű esetekben az így definiált fluxus számértéke valóban megadja a ΔA felületelemet átmetsző térerősségvonalak számát. A fluxus azonban több, mint egyszerű térerősségvonal-szám:

- ♦ egyrészt azért, mert a fluxus láthatóan dimenzióval és egységgel rendelkező fizikai mennyiség, amely az elektromos erőteret jellemzi (tehát nem darabszám, mint a metsző erővonalak száma),
- ♦ másrészt azért, mert a fluxusnak előjele van, hiszen ha a térerősség és a felületvektor szöge α , akkor skaláris szorzat ismert tulajdonsága miatt a fluxus az $\alpha < 90^\circ$ esetben pozitív, az $\alpha > 90^\circ$ esetben pedig negatív (az előző ábrán pl. az 1 felületelemre vonatkozó fluxus pozitív, a 2 felületelemre vonatkozó fluxus pedig negatív).

Eddig a fluxust hallgatólagosan mindig nyílt (tehát egy görbével határolt, pl. téglalap alakú) felületekre értelmeltük. Vizsgáljuk meg most, hogy egy *zárt felületre* (pl. egy krumpli héjára) hogyan lehet a fluxust kiszámítani. A definíció és az eljárás most is ugyanaz, mint egy nyílt felület esetén, csak el kell döntenünk, hogy az egyes felületelemek felületvektorait a zárt felületbe befelé (a krumpli belseje felé) vagy onnan kifelé irányítjuk. Ettől függni fog a kiszámított fluxus előjele, de a nagysága nem. A szokás az, hogy a felületvektort a zárt felületből kifelé mutató vektornak tekintik. Eszerint a definíció szerint a zárt felületbe befelé mutató elektromos térerősség esetén a fluxus negatív, a felületből kifelé mutató térerősség esetén pedig pozitív. A teljes zárt felületre vonatkozó fluxust ezek után a korábbiakhoz hasonlóan (elemi felületekre vonatkozó fluxusok összegeként) kaphatjuk meg. A *zárt felület* tényét a jelölésben is kiemelik, a fluxust jelölő felületi integrálban az integrál jelre egy *kört* rajzolnak:

$$\Phi_E^{\text{zárt}} = \oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A}.$$

A fluxus geometriai jelentésének megfelelően ennek a mennyiségnek a számértéke a zárt felületet átmetsző erővonalak összegét adja meg. Ez az összeg azonban előjeles összeg: a zárt felület által határolt térfogatból (a krumpliból) kifelé mutató erővonalakat a fluxusban pozitív előjellel, a térfogatba (a krumpliból) kívülről befelé mutató erővonalakat pedig negatív előjellel vesszük figyelembe. Ezért a zárt felületre vett fluxus számértéke a felület belsejéből kilépő és a felület belsejébe belépő erővonalak számának a különbségét



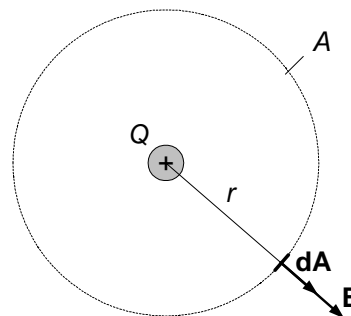
adja meg. Ez azt jelenti, hogy egy zárt felületre vett fluxus csak akkor különbözhet nullától, ha a felületen belül erővonalak kezdődnek vagy végződnek, és a kezdődő és végződő erővonalak száma különböző.

Szemléltetésül a mellékelt sematikus ábrán bemutatjuk a zárt felületre vett fluxus néhány esetét.

Érdeemes ezt a szemléletes – de egyelőre csupán elméleti érdekességnek tűnő – eredményt összevetni az elektromos erővonalakra vonatkozó tapasztalatokkal.

Mind a térerősségre vonatkozó számítások (pl. ponttöltések esetén), mind pedig a kísérletek azt mutatják, hogy az elektrosztatikus erőterben az erővonalak töltéseken kezdődnek és töltéseken végződnek. Vagyis egy zárt felületre vonatkozó fluxus akkor lesz nullától különböző, ha a felület töltést zár körül. A kérdés az, hogy ez a fluxus hogyan függ a bezárt töltés nagyságától.

Erre a kérdésre egy speciális esetben már tudjuk a választ: láttuk, hogy egy Q ponttöltésből a Q/ϵ_0 számértékével megegyező számú erővonal indul ki, tehát a töltést körülvevő felületet metsző erővonalak száma és a fluxus számértéke is ennyi. A fluxus kiszámításának gyakorlása kedvéért azonban most határozzuk meg, hogy egy pozitív Q ponttöltés által keltett elektromos erőterben mennyi a fluxus egy olyan r sugarú gömbfelületen, amelynek középpontja a töltéssel esik egybe (ábra).



Mivel a ponttöltés erőterében a térerősség sugárirányú, és a gömbfelület bármely elemi részének felületvektora is sugárirányú, a térerősség és a felületvektor a felület minden helyén párhuzamos egymással. Ebből – a skaláris szorzatra vonatkozó szabály szerint – következik, hogy $\mathbf{E}d\mathbf{A} = E dA$. Másrészt a térerősség nagysága a gömbfelület minden pontján ugyanakkora, tehát E kiemelhető, így a gömbfelületre vett fluxus:

$$\Phi_E^{zárt} = \oint_A \mathbf{E}d\mathbf{A} = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4r^2 \pi.$$

Az utolsó lépésben azt használtuk ki, hogy a gömbfelület felületelemeinek összege a gömb felületével egyenlő.

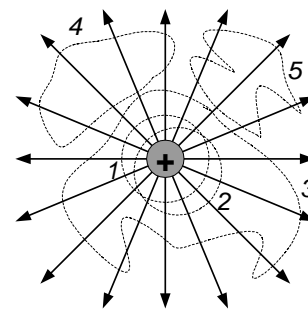
A fenti kifejezésbe a ponttöltés ismert térerősségét beírva a várakozásnak megfelelően a

$$\Phi_E^{zárt} = \oint_A \mathbf{E}d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} 4r^2 \pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

eredményt kapjuk. Vagyis ebben a speciális esetben a zárt felületre vett fluxus arányos a felület által bezárt ponttöltés nagyságával. (Itt látszik az ϵ_0 állandó bevezetésének egyik formai előnye: a törvényből kiesett a 4π szorzó.)

Korábban láttuk, hogy a szabályosan megrajzolt erővonalképen egy ponttöltésből kiinduló erővonalak száma csak a ponttöltés nagyságától függ. Ebből következik, hogy a zárt felületet metsző erővonalak száma – és így a fluxus – akkor sem változik meg, ha a töltést bezáró zárt felület alakját vagy elhelyezkedését megváltoztatjuk.

Ezt szemlélteti a mellékelt ábra, amelyen jól látható, hogy az eredeti, koncentrikus gömbfelületet (1), az eltolt gömbfelületet (2) és egy tetszőleges alakú, a töltést körülvevő zárt felületet (3) metsző erővonalak előjeles összege (az ábrán 16), és így a fluxus is ugyanaz. Vagyis a fenti összefüggés *tetszőleges alakú, a ponttöltést körülvevő felület esetén érvényes*.



Ha a zárt felület úgy vesszük fel, hogy nem zárja körül a ponttöltést (4,5), akkor a térfogatba bemenő és az abból kimenő erővonalak száma megegyezik, és a fluxus nulla lesz.

Itt már valóban tetszőleges alakú lehet a zárt felület. A fluxus bevezetésével ugyanis megszűnik az a probléma is, hogy bonyolultabb felület esetén egy erővonal kettőnél többször is metszheti a felületet: a zárt felület által határolt térfogathoz kilépő majd oda újra belépő erővonalak a fluxusban nem adnak járulékot. Ez látható a fenti

ábra 3 felületénél, ahol a metszések előjeles összege a gömbfelületekhez hasonlóan $1/6$, és az 5 felületnél, ahol ez az összeg nulla (nincs bezárt töltés).

Az is könnyen belátható, hogy több ponttöltés esetén az egyes töltések által keltett erőterekben a metsző erővonalak számai és így a fluxusok is összeadódnak, így a zárt felületre vett fluxus kifejezésében a zárt felület belsejében lévő töltések összege szerepel. Mivel pedig bármilyen töltésalakzat felosztható pontszerű töltésekre, az állítás tetszőleges töltésekre igaz.

Ha a felületen belül negatív töltések is vannak, akkor azok a térfogatba befelé mutató térerősséget keltenek, és ennek az erőternek az erővonalai a térfogatba befelé mutatnak. A fluxus kiszámításánál ezek negatív járulékot adnak, így végül megállapíthatjuk, hogy a zárt felületre vett fluxusban a felületen *belül elhelyezkedő töltések előjeles összege* ($\sum Q$) szerepel, ezért érvényes az alábbi összefüggés

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}.$$

Az összefüggés *tetszőleges zárt felületre, és tetszőleges töltéeloszlásra* igaz. Ezt a törvényt gyakran az *elektrosztatika Gauss-törvényének*, vagy az *elektrosztatikus erőter II. alaptörvényének* nevezik.

Ha a zárt felület nem zár be töltést vagy a bezárt töltések előjeles összege nulla, akkor a jobboldalon nulla áll: a zárt felületre vett fluxus nulla.

A törvény lényegében azt a tapasztalatot foglalja össze matematikai formában, hogy az elektrosztatikus erőterben az erővonalak töltéseken kezdődnek és végződnek, kezdő- és végpontjuk között pedig folytonos vonalak. Ez a megállapítás úgy is megfogalmazható, hogy *az elektrosztatikus erőter forrása a töltés*.

Az elektrosztatikus erőterben egy zárt felületre vonatkozó $\Phi_E^{\text{zárt}}$ fluxust gyakran a zárt felület által határolt térrész *forráserősségének* nevezik. Az elnevezés a fluxus geometriai jelentésével hozható összefüggésbe. Ha a felület belsejében lévő eredő töltés pozitív, akkor a forráserősség számértéke a térrészből kilépő – ott „keletkező” – erővonalak számát adja meg, negatív eredő töltés esetén pedig a térrészbe bemenő – ott „eltűnő” – erővonalak számával egyenlő.

Ha a zárt felületen belül folytonos eloszlású töltés van, akkor a teljes töltést a *térfogati töltéssűrűség* segítségével határozhatjuk meg. Ha egy elemi ΔV térfogatban ΔQ töltés van, akkor ott a térfogati töltéssűrűség közelítő

értéke $\rho \approx \frac{\Delta Q}{\Delta V}$. A töltéssűrűség egy pontban érvényes értékét úgy kapjuk meg, hogy a pont körül felvett

térfogatot egyre csökkentjük, és meghatározzuk a $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$ határértéket. Ez az adott pontban a térfogati töltéssűrűség, amely előjeles mennyiség, előjele az adott helyen lévő töltés előjelével egyezik meg.

Ha a töltéssűrűséget a zárt felület által határolt térfogat minden pontjában ismerjük, akkor a zárt felület által körülzárt Q töltés meghatározására a szokásos eljárást alkalmazzuk: a teljes V térfogatot elemi ΔV_i térfogatokra osztjuk, a $\Delta Q_i = \rho_i \Delta V_i$ összefüggés segítségével kiszámítjuk a töltést az egyes térfogatelemekben, majd az így kapott töltéseket összeadjuk (előjelesen):

$$Q \approx \sum_i \Delta Q_i = \sum_i \rho_i \Delta V_i.$$

Ezzel megkaptuk a töltés közelítő értékét. A töltés pontos értékét úgy határozhatjuk meg, hogy a V térfogat felosztását egyre finomítjuk (az elemi térfogatokot egyre kisebbre választjuk), és kiszámítjuk a fenti összeg határértékét, amelynek jelölésére az alábbi egyenlet jobboldalán álló szimbólumot használják:

$$Q = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \rho_i \Delta V_i = \int_V \rho dV.$$

Az itt használt integrált a benne szereplő, helytől függő $\rho(x, y, z)$ függvény V térfogatra vett térfogati integráljának nevezik. Egy ilyen integrál kiszámításának részletes szabályaival itt nem foglalkozunk, számunkra elegendő az integrál szemléletes, igen finom felosztáson elvégzett összegzésként történő értelmezése. A folytonos töltéeloszlásból származó töltésnek térfogati integrállal történő kiszámításával az elektrosztatika Gauss-törvénye az általánosabb

$$\oint_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

alakba írható.
