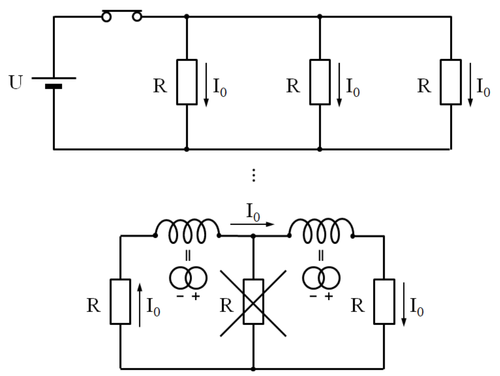
Fizika 2i, tavaszi félév, 6. gyakorlat - MEGOLDÁS

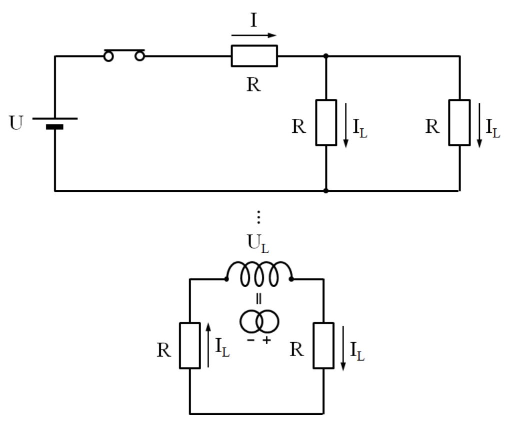
Otthoni gyakorlásra szánt feladatok

H1*. Kezdetben a kapcsoló már rég óta zárva van, így az áramok állandósultak az egyes ágakban, a tekercsek ideális vezetékeknek tekinthetők. Ilyenkor a kapcsolást az *ábra* felső paneljével helyettesíthetjük.



A három R ellenállás párhuzamosan van kapcsolva az U feszültségű teleppel, így az ellenállásokon átfolyó áram $I_0 = 3U/R$. Amikor a kapcsolót kinyitjuk, a főágban lévő telepet elvágjuk az áramkör többi elemétől, az áram elkezd csökkenni. Az önindukció miatt a tekercsekben feszültség indukálódik, ami megakadályozza az áram hirtelen változását (különben végtelen nagy feszültség keletkezne), így továbbra is I_0 áram folyik rajtuk, áramgenerátorként viselkednek. Ilyenkor az áramkört az *ábra* alsó paneljével írhatjuk le. A csomóponti törvény következtében a középső ellenálláson nem folyik áram, így az áramkört a két szélső ellenállás alkotja az *ábrán* bejelölt áramirányokkal, azaz a bal szélső ellenálláson átfolyó áram $-I_0 = -3U_0/R =$ $= -0{,}45$ A, ahol a negatív előjel a kezdetihez képest ellenkező áramirányt jelöl.

H2*. A zárt kapcsoló melletti állandósult áramerősségekkel rendelkező kapcsolást az *ábra* felső paneljével helyettesíthetjük.



A három R ellenállás közül 2 párhuzamos egymással, a harmadik pedig soros velük, így eredő ellenállásuk $3R/2$. Az Ohm törvény alapján a két párhuzamos ágban - és így a tekercsen - folyó áramok:

$$I_L = \frac{U - IR}{R} = \frac{U}{3R},$$

ahol U a telep feszültsége, I pedig a főág árama. A kapcsoló nyitása után az áram elkezd csökkenni, azonban a tekercsen átfolyó áram nem változhat hirtelen, az átkapcsolás pillanatában továbbra is I_L áram folyik rajta, áramgenerátorként viselkedik, hasonlóan a **H1*.** feladathoz. Ebben az esetben az áramkört az *ábra* alsó paneljével helyettesíthetjük. Alkalmazva a huroktörvényt, valamint az óramutató járásával megegyező körüljárást választva, kapjuk, hogy:

$$U_L - 2I_L R = 0,$$

ahol U_L a tekercsen eső, keresett feszültség. Figyelembe véve I_L változatlanságát, az előjelhelyes végeredmény $U_L = 2U/3 = 8$ V (vagyis az eredeti teleppel azonos "polaritású" a feszültség).

H3*. Amint az áramerősség állandósul az áramkörben, a tekercs egyszerű vezetőnek tekinthető, így kezdetben a rajta átfolyó áramerősséget a telep és az $R_1 = 20\ \Omega$ ellenállás határozza meg:

$$I_0 = \frac{U}{R_1} = \frac{24\text{ V}}{20\ \Omega} = 1.2\text{ A}.$$

Az áramkör baloldali részén folyó áramot hasonlóan számíthatjuk ki. Miután a kapcsolót hirtelen kinyitjuk, a tekercsen átfolyó áram nem tud ugrani, az folytonosan változik, így kezdetben $I_0 = 1.2$ A. Ez az idő függvényében exponenciálisan lecseng, aminek az időállandója függ az induktivitás nagyságától.

A kapcsoló kinyitása után az áramkör már csak egy kört tartalmaz, amiben a két ellenállás sorosan van kapcsolva, így Kirchhoff csomóponti törvényének megfelelően az egész áramkörben $I_0 = 1.2$ A az áramerősség (az R_2 ellenálláson a kapcsoló kinyitását követően az áramerősség nagysága ugrásszerűen éri el ezt az értéket).

A tekercs kezdeti feszültségét Kirchoff huroktörvénye alapján számolhatjuk, annak meg kell egyeznie az ellenállásokon eső feszültségek összegével (előjelesen számolva ennek mínusz egyszerese):

$$U_0 = I_0 R_1 + I_0 R_2 = 1.2\text{ A} \cdot (20\ \Omega + 30\ \Omega) = 60\text{ V}.$$

H4*. A kondenzátorlemezek között nem folyik valós áram, viszont az időben változó elektromos tér által ún. eltolási áram keletkezik, így az Ampere–Maxwell-törvényt tudjuk a feladat megoldásához használni. A kondenzátorlemezek között kialakuló elektromos tér homogén, míg az indukált mágneses tér indukcióvonalai az elrendezés hengerszimmetriának köszönhetően koncentrikus körök, a tér nagysága pedig csak r-től függ. Alkalmazva az ismert törvényt

$$2\pi r B = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt},$$

melyből átrendezéssel kapjuk a mágneses indukció nagyságát:

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \cdot \beta = 2.2 \times 10^{-14}\ \mathrm{T},$$

itt végeztünk a feladattal de érdemes megjegyezni, hogy miért kaptunk ilyen rendkívül kicsi mennyiséget eredményül. A kondenzátoron átfolyó eltolási áramot kiszámolva,

$$I = \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} = 8.9 \times 10^{-9}\ \mathrm{A},$$

láthatjuk, hogy ez is kicsi mennyiség. Ugyanis a kondenzátor egy szakadás az áramkörben, így a fegyverzeteken felgyűlnek töltött részecskék, a Coulomb-kölcsönhatásról pedig tanultuk, hogy az mennyire nagy. Jelen esetben nanoamperes áramerősségek is hamar több ezer kilovolt per centiméteres térerősségeket hoznak létre.

H5*. a) A kibocsátott fénynyaláb elektromágneses hullámként terjed a levegőben (ami jó közelítéssel vehető vákuumnak), így a nyaláb fénysebességgel terjed ($c = 3 \cdot 10^8 m/s$). A kibocsájtott impulzus időtartama ($\Delta t = 4$ ns) azt fejezi ki, hogy a kibocsájtó eszköz mennyi ideig sugározta az energiát. Ennyi ideje halad már az impulzus eleje, mikorra a vége elhagyja az eszközt. Az impulzus eleje és vége közti távolság, az impulzus hossza, nem más mint az impulzus időtartama beszorozva a fénysebességgel: $l = \Delta t \cdot c = 4 \cdot 10^{-9} s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s = 1{,}2m$.
b)
A teljes energiasűrűség az impulzusban lévő teljes energia ($E = 2J$) osztva az impulzus térfogatával (V), ahol a térfogatot henger alakúnak képezeljük el $d = 3mm$ átmérővel, és $l = 1{,}2m$ hosszal ($V = l \cdot \pi R^2$):

$$w = w_E + w_B = E/V = E/(l\pi(d/2)^2)$$

$$= 2J/(1{,}2m \cdot \pi(0.003m/2)^2) = 235.8kJ/m^3.$$

Természetesen itt az átlagos enerigasűrűséget számoltuk ki, hiszen az impulzus egy hullámcsomag, azaz az energiasűrűsége a hullámon belül változik a hullám alakjától függően.
c)
Ha feltételezzük, hogy ez a hullámcsomag jól közelíthető síkhullámként, akkor használhatjuk a síkhullámról szerzett ismereteinket, miszerint:

$$w = w_E + w_B = \frac{1}{2}\cos^2(kz \pm \omega t)\left(\epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0} B_0^2\right) =$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz \pm \omega t) \to \langle w \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \left\langle \cos^2(kz \pm \omega t) \right\rangle,$$

ahol $\langle w \rangle$ az átlagos energiasűrűséget jelöli. Felhasználva, hogy a hullámhossz félegész számú többszörösére nézve a $\cos^2(kz \pm \omega t)$ átlaga $1/2$, az átlagos energiasűrűség $\langle w \rangle = \epsilon_0 E_0^2/2$. Itt persze feltételeztük, hogy egy ilyen impulzus a hullámhossz felének egész számú többszörösét tartalmazza, de ez általában teljesül. Az eredményt egyenlővé téve az előző részfeladat eredményével

$$\langle w \rangle = \epsilon_0 E_0^2/2 = E/V \to |E_0| = \sqrt{2E/(\epsilon_0 V)} =$$

$$\sqrt{2J/(8.85 \cdot 10^{-12} C^2/(Nm^2))m^3} \approx 2.31 \cdot 10^{-4} \frac{N}{C}$$

H6*. a) $\mathbf{E}(z,t) = 9\mathbf{e}_y \sin(kz - \omega t)\frac{N}{C}$ alapján a hullám a pozitív z irányba halad ($+\omega t$ esetén negatív z irányba haladna). Hogy ezt belássuk, tekintsük a hullám egy adott fázisát, azaz rögzítsük a fázist valamilyen ϕ_0 fázisra, ami legyen mondjuk a hullám azon fázisa, amit t_0 időpillanatban z_0 helyen látunk: $\phi_0 = kz_0 - \omega t_0$. Ahogy telik az idő $t > t_0$-ban a hullám mozgása miatt ez a fázis arrébb mozdul, és z_0-ban már más fázisban lesz a hullám. A kérdés hogy merre mozdult el a ϕ_0 fázis, $z > z_0$ vagy $z < z_0$ helyre? Ehhez fejezzük ki ϕ_0-t mindkét időpillanatban:

$$kz_0 - \omega t_0 = \phi_0 = kz - \omega t.$$

Most vonjuk ki a bal oldalt mindkét oldalból:

$$0 = k(z - z_0) - \omega(t - t_0) \to k(z - z_0) = \omega(t - t_0) > 0$$

Azaz a fázis amit tekintünk a pozitív z irányba mozdult el. Mivel a fenti érvelés a hullám bármely fázisára igaz (rögzített t_0 időben minden z koordinátára), így az egész hullám ebbe az irányba mozog.
b)
A síkhullámokról tudjuk, hogy:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ és } \omega = ck = \frac{c2\pi}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} 2\pi}{600 \cdot 10^{-9} m} = 31.4\frac{1}{s}$$

c)
A mágneses indukcióvektor azonos fázisban halad az elektromos mezővel, azaz az alakja: $\mathbf{B}(z,t) = B_0 \mathbf{e}_? \sin(kz - \omega t)$. $\mathbf{e}_?$ meghatározásához vegyük alapul, hogy a poynting vektor ($\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$) a hullám terjedési irányába kell hogy mutasson ($+\mathbf{e}_z$), és $\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_y \to \mathbf{B} \propto -\mathbf{e}_x$. Továbbá tudjuk, hogy egy síkhullámban az elektromos mező és a mágneses indukció amplitúdóit az alábbi összefüggés köti össze: $|E_0| = c|B_0|$. Az abszolút érték elhagyható, hiszen a hullámok fázisait és a vektorok irányát már rögzítettük. Egy relatív előjel E_0 és B_0 között olyan mintha $-\mathbf{e}_x$ helyett $\mathbf{e_x}$-et vennénk, vagy eltolnánk a szinusz függvényt π-vel. Összegezve:

$$\mathbf{B}(z,t) = \frac{E_0}{c}(-\mathbf{e}_x)\sin(kz - \omega t)$$

d)

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \left\langle \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin^2(kz - \omega t) \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} =$$

$$\frac{9^2 N^2/C^2}{2 \cdot 1.26 \cdot 10^{-6} Ns^2/C^2 \cdot 3 \cdot 10^8 m/s} = 0.11\frac{J}{m^2 s},$$

ahol kihasználtuk, hogy $\left\langle \sin^2(kz - \omega t) \right\rangle = \langle 1/2 - 1/2 \cdot \cos(2(kz - \omega t)) \rangle = 1/2 - 0 = 1/2$.

H7*. a) $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} \to |S_0| = |\frac{E_0 B_0}{\mu_0}| = \frac{E_0^2}{c\mu_0} = \frac{cB_0^2}{\mu_0}$. Ez alapján $|E_0| = \sqrt{c\mu_0 S_0} \approx 6.02\frac{N}{C}$ és $|B_0| = \sqrt{\mu_0 S_0/c} = |E_0|/c \approx 2.01 \cdot 10^{-8} T$.

b)
$\omega = kc$ és $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ alapján $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \approx 6.28 \cdot 10^{-7} m$
c)
A teljes energiasűrűség és a Poynting vektor közti kapcsolat alapján:

$$|\mathbf{S}| = cw_{\text{teljes}} \rightarrow w_{teljes} = 3.2 \cdot 10^{-6} \frac{J}{m^3} \sin^2(kx - \omega t).$$

H8*. Az órai F6* feladathoz hasonlóan a tükörre azért hat erő, mert a fénynek impulzusa is van, és mivel a fény visszaverődik, azaz megváltozik az impulzusa, az impulzus megmaradás miatt ugyanennyivel kell hogy megváltozzon a tükör impulzusa is, azaz a tükörre erő hat. A fény által szállított impulzus áramsűrűség ($\mathbf{p}/(A \cdot \Delta t) = \mathbf{S}/c$) az az impulzus mennyiség, ami egységnyni felületen egységnyi idő alatt halad át. Newton második törvénye szerint $\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$, csakhogy itt $\Delta \mathbf{p}$ ismeretlen. Azt tudjuk, mennyi impulzust szállít a hullám a haladási irányában, de ha a hullám visszaverődik, és ellenkező irányban halad tovább (a beesési szög 0°), akkor

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (-\mathbf{p}) - \mathbf{p} = -2\mathbf{p}$$

Persze a tükör impulzus változása ennek -1-szerese. Ez alapján:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{2\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{2\mathbf{S}A\Delta t}{c\Delta t} = 2\mathbf{S}A$$

$$\langle |\mathbf{F}| \rangle = 2 \langle |\mathbf{S}| \rangle A/c = 2IA/c.$$

Mivel a tükör felülete feltehetőleg jóval nagyobb mint a nyaláb átmérője, így az A felület nem más mint a nyaláb keresztmetszetének felülete, ezért az IA szorzat nem más, mint a lézer teljesítménye ($P = 90mW$), ezért $F = 6 \cdot 10^{-10} N$ Ha a beesési szög 30°, akkor hullám impulzusának csak azon komponense változik meg (verődik vissza), ami merőleges a tükörre, a tükör felszínével párhuzamos komponens változatlan marad. Ez alapján $\Delta \mathbf{p} = (-\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}_\parallel) - (\mathbf{p}_\perp + \mathbf{p}_\parallel) = -2\mathbf{p}_\perp = -\Delta \mathbf{p}_{tukor}$, ahol $|\mathbf{p}_\perp| = |\mathbf{p}| \cos(30°)$. Mindezt összevetve

$$\langle |\mathbf{F}| \rangle = \left\langle \left| \frac{2\mathbf{p}_\perp}{\Delta t} \right| \right\rangle = \left\langle \left| \frac{2\mathbf{p}\cos(30°)}{c\Delta t} \right| \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left| \frac{2\mathbf{S}\cos(30°)A\Delta t}{c\Delta t} \right| \right\rangle = 2IA\cos(30°)/c =$$

$$= 6 \cdot 10^{-10} \cos(30°) N \approx 5.2 \cdot 10^{-8} N.$$

Az A azért ugyanaz mint a fenti esetben, mert az számít mennyi impulzus adódik át a tükörnek Δt idő alatt, és igaz hogy a megvilágított felület megnől, ha elfordítjuk a tükröt, de ettől még ugyanannyi impulzus érkezik be a felületére Δt idő alatt, hiszen a lézernyaláb bármely keresztmetszetén Δt idő alatt ugyanannyi impulzus "halad át".