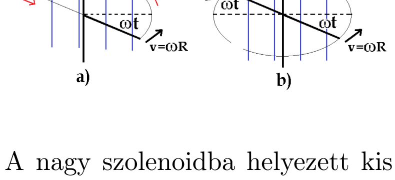
Fizika 2i, tavaszi félév, 5. gyakorlat - MEGOLDÁS

Otthoni gyakorlásra szánt feladatok

H1*. Az órai F1* feladatban láttuk, hogy ha egy hurokban megváltozik a mágneses fluxus, akkor ott elektromos feszültség indukálódik, viszont az a feszültség igazából a v sebességgel mozgó vezető rúd két vége között keletkezett. Ebben a feladatban nehéz fluxus változásról beszélni, hisz nincs hurok. De odaképzelhetünk egyet, hiszen a hurokban létrejövő feszültség igazából a hurok mozgó részében jön létre (időben állandó mágneses mező esetében). Ha egy félkör alakú hurkot képzelünk el, amely a mozgó rúddal van lezárva, akkor ennek a huroknak a területe, és ezáltal a fluxusa is, időben változik (lásd *ábra*). t idő alatt a rúd ωt szöggel fordul el, és ez alatt az idő alatt az eredeti félkör területe $A(t) = \pi R^2/2 - \pi R^2/2 \cdot \omega t/\pi = \pi R^2/2(1 - \omega t/\pi)$-re változik. Emiatt a fluxus, az alábbi módon változik az idő függvényében: $\Phi(t) = B \cdot A(t) = B\pi R^2/2(1 - \omega t/\pi)$. A rúd végei között kialakuló feszültség (= a hurokban kialakuló feszültség) nagysága nem más mint a fluxus idő szerinti deriváltja: $|U_i| = |d\Phi(t)/dt| = |-\omega BR^2/2| = \omega BR^2/2 = 1/(6s) * 0.2T * (0.04m)^2/2 = 2.67 * 10^{-5}$ V. Mivel a hurok területe csökken, és a mágneses indukció felfelé mutat, így a mágneses fluxus lefelé növekszik, és a balkéz szabály alapján a képzeletbeli áram a képzeletbeli hurokban olyan irányban folyik körbe, hogy a mozgó vezetőszakaszon belülről (a forgástengelytől) kifelé folyik. Hurok hiányában az áram csak addig folyik, amíg a széleken felgyülemlik valamennyi töltés, és kialakul az egyensúly. Mivel az áram kifelé folyna, így a rúd külső része lesz pozitív, a belső része pedig negatív (az áram a pozitív töltéshordozók irányát jelzi). Más szóval a rúd külső részének potenciálkülönbsége a belső részéhez képest negatív kell hogy legyen, hiszen ez kell ahhoz, hogy kifelé follyon az áram.

b) Ha a rúd forgástengelye a rúd közepénél van, akkor a két végét egy bemetszett vezető karikára helyezve ismét létrehozhatunk egy képzeletbeli hurkot, csakhogy ezúttal a hurok fluxusa időben nem változik, hiszen a hurok területe nem változik, az egész hurok elfordul az állandó mágneses mezőben, ezért a képzeletbeli áramkörben nem indukálódik áram, és így a rúd két vége között sem indukálódik feszültség.



H2*. A nagy szolenoidba helyezett kis szolenoid fluxusa $\Phi = n\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = nAB\cos\alpha$, ahol n a kis szolenoid menetszáma $\mathbf{A}$ a kis szolenoid hurkaihoz tartozó felület vektor (nagysága az A felület nagysága, iránya merőleges a felületre) $\mathbf{B}$ a mágneses indukció vektor, $\alpha = 30°$ pedig a két vektor által bezárt szög. $n = 50$, $A = \pi R^2 = \pi(d/2)^2 = \pi d^2/4 = 0{,}00008m^2$, $B = 0{,}08T$. Ha a nagy szolenoidban az áramerősséget $\Delta t = 0{,}005$ s alatt egyenletesen 0-ra csökkentjük, akkor a szolenoid által létrehozott mágneses indukció is ugyanennyi idő alatt egyenletesen 0-ra csökken (önindukciótól eltekintve). A kis tekercsben a fluxus ez idő alatt csökken 0-ra, azaz $U_i = \Delta\Phi/\Delta t = (0 - nAB\cos 30°)/\Delta t = -(50 * 0.00008m^2 * 0.08T\sqrt{3}/2)/0.005s = -0.055V$ (itt kihasználtuk, hogy egyenletes csökkenés esetén $U_i = d\Phi/dt = \Delta\Phi/\Delta t$).

H3*. A külső szolenoidon átfolyó áram hatására abban homogén, a szolenoid tengelye mentén mutató mágneses mező alakul ki. Mivel az áram nagysága időben változik, így a mágneses indukcióvektor nagysága is változni fog:

$$B(t) = \mu_0 \frac{NI(t)}{L} = \mu_0 \frac{N}{L}(I_0 + \beta \cdot t).$$

Emiatt a belső szolenoidon áthaladó mágneses fluxus értéke is változik időben, ami miatt elektromos feszültség indukálódik. A belső szolenoidon áthaladó mágneses fluxus:

$$\Phi(t) = NR_2^2\pi B(t).$$

Az indukálódó feszültség nagysága:

$$U = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \mu_0 \frac{N^2 R_2^2 \pi}{L}\beta \approx 5{,}7 \text{ mV}.$$

H4*. Az indukált elektromos tér meghatározásához a Faraday-törvényt alkalmazhatjuk egy r sugarú körvonalra:

$$2\pi r E = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

A mágneses tér a feladat szövegének megfelelően

$$B(r,t) = \begin{cases} 0 & r < R_2 \\ B_0 + \alpha \cdot t & R_2 < r < R_1 \\ 0 & R_1 < r \end{cases},$$

így a fluxus az R_2 és r sugarakkal rendelkező körgyűrűre

$$\Phi = \pi(r^2 - R_2^2)B,$$

tehát az elektromos tér nagysága

$$E = -\frac{r^2 - R_2^2}{2r} \cdot \alpha = -0{,}03\frac{\text{V}}{\text{m}},$$

ahol a negatív előjel óramutató járásával egyező irányt jelent.

H5*. A B tér bekapcsolás következtében a fluxus megváltozik az r sugarú gyűrűben, feszültség indukálódik. Alkalmazva a Faraday-törvényt:

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -r^2\pi\frac{\Delta B}{\Delta t} = 2r\pi E,$$

ahol E a kialakuló "örvényerősség" a karikában (ez mindenhol érintő irányú), amely mentén körbejárva U indukált feszültséget kapunk. Mivel a gyűrű tömege m, teljes töltése pedig q, ezért a Newton-törvényt alkalmazva kapjuk, hogy:

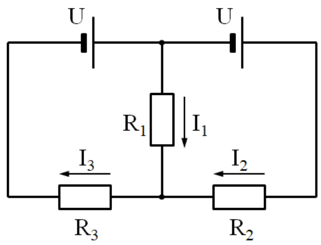
$$-r^2\pi\frac{\Delta B}{\Delta t} = 2r\pi\frac{ma}{q} = \frac{2r^2\pi m}{q}\frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

ahol kihasználtuk, hogy $a = \Delta v/\Delta t = r\Delta\omega/\Delta t$. Figyelembe véve, hogy a folyamat alatt $\Delta B = B$, látható, hogy:

$$\omega = \frac{-Bq}{2m},$$

azaz a szögsebesség a Lenz-törvénnyel összhangban **B**-vel ellentétes irányú.

H6*. A szolenoidokban a B tér (az áramuk) csökkentése miatt feszültség indukálódik a vezetőhurkokban. Az indukált feszültség előjelét és így az indukált áram irányát bal kéz szabállyal kaphatjuk meg (a kezdeti B tér az *ábra* síkjára befele mutat, így a csökkenés az ábra síkjából kifele mutat, azaz az indukált feszültség az óramutató járásával megegyező irányú). A kialakuló U indukált feszültségnek köszönhetően a feladat visszavezethető egy egyszerű egyenáramú kapcsoláshoz, aminek helyettesítőképe az *ábrán* látható.



Alkalmazva a csomóponti törvényt és a huroktörvényt a bal és jobb oldali hurkokra kapjuk, hogy:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$-R_1I_1 - R_3I_3 + U = 0$$

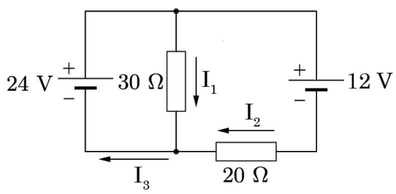
$$-R_2I_2 + I_1R_1 + U = 0,$$

ahol $U = \Delta\Phi/\Delta t = r^2\pi\Delta B/\Delta t$. Figyelembe véve, hogy $R_2 = R_3$, valamint behelyettesítve az adatokat kapjuk, hogy $I_1 = 0$ és $I_2 = I_3 = 0{,}1$ A.

H7*. Az időben változó mágneses tér elektromos teret indukál. Faraday-törvényt felírva:

$$\oint \vec{E}d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = +12\text{ V},$$

bármely fluxust körbevevő görbére. Ez legyen most az áramkör jobboldali része. Ha megszakítjuk egy ponton az áramkört, akkor be tudunk vezetni jól értelmezett potenciált, és a fenti körintegrál a megszakítás kontaktusai között eső feszültséggel lesz egyenlő. A változó fluxus így helyettesíthető egy közbeiktatott 12 V-os áramforrással, az ábrán látható módon. Az áramforrás polaritását úgy kell megválasztanunk, hogy az óramutató járásával ellentétes áramokat igyekezzen kelteni, mivel Faraday-törvényben a körintegrál előjele pozitív.



Az R_1 ellenálláson eső feszültség a baloldali 24 V-os telep feszültségével egyezik meg, így

$$I_1 = U_1/R_1 = 0{,}8\text{ A}.$$

Az R_2 ellenálláson eső feszültséget a két áramforrás együttesen alakítja ki. Mivel a kettő ellentétes polaritással van bekötve, így $U_2 = 12$ V, tehát $I_2 = 0{,}6$ A.

Az I_3 áramerősséget Kirchhoff csomóponti törvénye alapján számolhatjuk:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1{,}4\text{ A}.$$

H8.** A vezetőkarikán átmenő mágneses fluxus időben változik, emiatt a karika mentén elektromos feszültség indukálódik, melynek nagysága:

$$U(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = a(\tau - t) - at = a(\tau - 2t).$$

Az indukálódó feszültség hatására a vezetőkarikán $I(t) = U(t)/R$ áram folyik, ami miatt Joule-hő fejlődik $P(t) = U(t)I(t) = U^2(t)/R$ teljesítménnyel. A t és $t + dt$ időpontok közötti piciny dt idő alatt fejlődő Joule-hő nagysága $dW(t) = P(t)dt$. A teljes τ idő alatt fejlődő Joule-hő meghatározásához ezen kis járulékokat kell felösszegeznünk, amit a következő integrállal tehetünk meg:

$$W = \int_0^\tau P(t)dt = \int_0^\tau \frac{\big(a(\tau - 2t)\big)^2}{R}dt = \\ = \frac{a^2}{R}\left[\frac{(\tau - 2t)^3}{-6}\right]_0^\tau = \frac{a^2\tau^3}{3R}.$$