Fizika 2i, tavaszi félév, 2. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. Legyen az (x, y) síkra illeszekdő, alsó lap normálvektora $\boldsymbol{n}_1 = -\hat{\boldsymbol{z}}$, az (x, z) síkra illeszkedőé $\boldsymbol{n}_2 = -\hat{\boldsymbol{y}}$ és az (y, z) síkra illeszkedőé $\boldsymbol{n}_3 = -\hat{\boldsymbol{x}}$. Az ezekkel rendre szemközti lapok normálvektorai: $-\boldsymbol{n}_1$, $-\boldsymbol{n}_2$ és $-\boldsymbol{n}_3$.

a) $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$. Az alsó lapon átmenő fluxus:

$$\Psi_1 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{n}_1 a^2 = -E_0 a^2 \hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{z}} = -E_0 a^2.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a lapon a kockákba befelé mennek az elektromos erővonalak. A felső lapon:

$$\Psi_1' = \boldsymbol{E}(-\boldsymbol{n}_1)a^2 = E_0 a^2.$$

A többi lapon nem lép sem be, sem ki erővonal, ezért azokon a fluxus nulla. Például:

$$\Psi_{xz} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{n}_2 a^2 = -E_0 a^2 \hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{z}} = 0,$$

hiszen $\hat{\boldsymbol{x}}$ és $\hat{\boldsymbol{z}}$ merőlegesek egymásra.

b) $\boldsymbol{E} = E_0(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}})/\sqrt{3}$. Az alsó lapon:

$$\Psi_1 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{n}_1 a^2 = -\frac{E_0 a^2}{\sqrt{3}}(\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{z}} + \hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{z}}) = -\frac{E_0 a^2}{\sqrt{3}}.$$

Az oldalsó lapokon:

$$\Psi_2 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{n}_2 a^2 = -\frac{E_0 a^2}{\sqrt{3}}(\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{y}}) = -\frac{E_0 a^2}{\sqrt{3}},$$

illetve

$$\Psi_3 = \boldsymbol{E}\boldsymbol{n}_3 a^2 = -\frac{E_0 a^2}{\sqrt{3}}(\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{x}}) = -\frac{E_0 a^2}{\sqrt{3}}.$$

Ezekkel szemközti lapokon ugyanígy számolva, de mivel a felületek normálvektorai ellentétesek:

$$\Psi_1' = \Psi_2' = \Psi_3' = \frac{E_0 a^2}{\sqrt{3}}.$$

c) Ha a kockát körülvesszük a köréírható gömbbel, akkor a kocka egy lapján átmenő erővonalak száma a töltéstől származó erővonalak számának hatoda, hiszen a szimmetria miatt minden lapon ugyanakkora a fluxus. A teljes gömbfelületen áthaladó fluxust a Gauss-törvényből adhatjuk meg (a töltés tere gömbszimmetrikus): $\Psi_{\text{gömb}} = Q/\varepsilon_0$. Tehát egyetlen lapon:

$$\Psi_{\text{lap}} = \frac{\Psi_{\text{gömb}}}{6} = \frac{Q}{6\varepsilon_0}.$$

F2*. *a*) *1. eset:* $0 \le r < R$. Gauss-törvény miatt a gömbön belüli pontra az r sugarú gömbben elhelyezkedő $Q(r)$ töltések számítanak:

$$Q(r) = Q\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{4}{3}R^3\pi} = Q\frac{r^3}{R^3}.$$

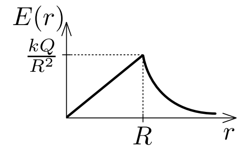
Tehát ($k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ felhasználásával)

$$E(r) \cdot 4r^2\pi = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \;\rightarrow\; E_1(r) = \frac{kQ}{R^3}r.$$

2. eset: $R \le r$. Ismét Gauss-törvénnyel (most a teljes töltés számít):

$$E(r) \cdot 4r^2\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \;\rightarrow\; E_2(r) = kQ\frac{1}{r^2}.$$

Szemléltetésképpen érdemes ábrázolni a térerősséget a sugár függvényében:



b) Mivel a végtelenben nulla a potenciál, onnantól egy egységnyi pozitív töltést elmozdítva lassan az $r > R$ pontba

$$\varphi_2(r) = \frac{kQ}{r}$$

munkát kell végeznünk, tehát ekkora a potenciál a gömbön kívül (a töltött gömb tere a ponttöltés terével egyezik meg).

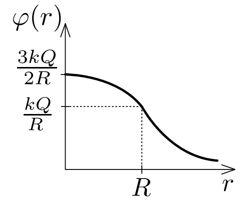
Amint belépünk a gömbbe, az elektromos mező megváltozik, így a végtelenből az $r < R$ pontba mozgatva az egységnyi töltést a végzett munka:

$$\varphi_1(r) = \frac{kQ}{R} + \frac{E_1(R) + E_1(r)}{2}(R - r),$$

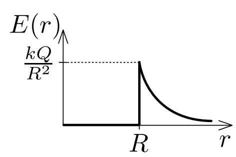
hiszen a gömbön belül a tér lineárisan csökken r-rel, azaz vehetjük a térerősség átlagát. Behelyettesítve az *a*) rész eredményét:

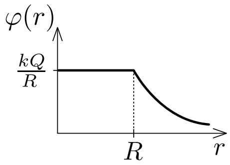
$$\varphi_1(r) = \frac{kQ}{2R^3}(3R^2 - r^2).$$

Az ábra a potenciált mutatja az r függvényében.



c) Fémbömb esetén a külső elektromos tér (és így a potenciál is) ugyanaz marad, viszont belül nem, mert a fémgömbön belül nem alakulhat ki elektromos tér, különben a töltések könnyen el tudnának mozdulni. Tehát $E_1 = 0$, illetve $\varphi_1 = \frac{kQ}{R} = \text{áll.}$, hiszen a gömbfelületen belülre történő mozgatáshoz csak a felületig érkezve kell munkát végezni, belül már nem, hiszen ott nincs elektromos tér. Az ábra a térerősséget és a potenciált mutatja r függvényében.





F3*. A mozgás során a gömbök töltéseloszlása nem változik (szigetelő), valamint annak homogenitása miatt a két gömböt ponttöltésnek tekinthetjük. Mivel a gömbök között csak belső erő hat (elektrosztatikus vonzóerő), ezért a mozgás során a két gömb összlendülete nulla marad:

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2,$$

ahol v_1 és v_2 közvetlenül az ütközés előtti sebességek. Az energiamegmaradás (a Q_1 és Q_2 töltések előjeles mennyiségek):

$$\frac{kQ_1Q_2}{d} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{kQ_1Q_2}{2R}.$$

A lendületmegmaradásból $v_2 = v_1 m_1/m_2$, ezt beírva az energiamegmaradásba:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2kQ_1Q_2}{m_1+m_2}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2R}\right)} = 0{,}045\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

valamint $v_2 = 2v_1 = 0{,}09\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

F4*. *a*) Amikor az elektron megáll, legyen a pozitív töltésű lemeztől mért távolsága ℓ. A feszültség, ami az elektront lelassította $U\ell/d$. Munkatételt felírva:

$$E_{\mathrm{kin}} = eU\frac{\ell}{d} \ \rightarrow\ \ell = \frac{E_{\mathrm{kin}}d}{eU} = 7{,}5\ \mathrm{mm}.$$

b) A kezdősebesség:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v_0^2 \ \rightarrow\ v_0 = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{kin}}}{m_{\mathrm{e}}}} = 1{,}8\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) A lemezek közötti elektromos térerősség U/d, tehát

$$F = \frac{eU}{d} = m_{\mathrm{e}}a \ \rightarrow\ a = \frac{eU}{m_{\mathrm{e}}d} = 2{,}1\cdot 10^{14}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

F5. *a*) Mivel a potenciál csak x-től függ, és $+x$ irányban növekszik, ezért az elektromos térerősség $-x$ irányú, azaz az elektron a $+x$ irányba indul el. A potenciál megváltozása amíg az elektron az $x_0 = 1$ m helyről a $3x_0$ helyre jut el:

$$\Delta\varphi = \varphi(3x_0) - \varphi(x_0) = 8\alpha x_0^2.$$

A munkatétel alapján:

$$e\Delta\varphi = E_{\mathrm{kin}} = 8\alpha e x_0^2 = 24\ \mathrm{eV}.$$

b) $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2$, amiből

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{kin}}}{m_{\mathrm{e}}}} = 2{,}9\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) A térerősséget a potenciálból kapjuk deriválással:

$$E(x) = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -2\alpha x = -6\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}\cdot x.$$

Az elektron kezdeti gyorsulása:

$$F = eE(x_0) = m_{\mathrm{e}}a_0 \ \rightarrow\ a_0 = \frac{eE(x_0)}{m_{\mathrm{e}}} = 1{,}1\cdot 10^{12}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

F6*. A karika potenciálja a szimmetriatengelyén, attól x távolságra:

$$\varphi(x) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+x^2}},$$

hiszen ha a karikát kicsiny ΔQ töltésű részekre osztjuk, akkor az ettől a potenciál $\Delta\varphi = k\Delta Q/\sqrt{R^2+x^2}$. A teljes potenciál ezen elemi potenciálok algebrai összege, azaz a fenti kifejezés.

Az gyöngy mozgására alkalmazzuk az energiamegmaradást. Határesetben a gyöngy sebessége nulla, amikor az a gyűrű középpontjába ér.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + q\varphi(x=2R) = q\varphi(x=0).$$

Felhasználva a potenciál fenti alakját a legkisebb sebesség:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}\cdot\frac{kQq}{mR}}$$

F7.** Egyetlen, Q töltésű lemez elektromos tere a Gauss-törvénnyel:

$$E\cdot 2A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ E = \frac{Q}{2A\varepsilon_0},$$

ahol kihasználtuk, hogy a lemez köré képzelt téglalap két, egyenként A területű felületén keresztül távoznak az erővonalak.

A szuperpozíció elvének megfelelően a feladatban megadott kondenzátorlemezek közötti térerősség a két lemeztől származó térerősség különbsége (egy adott pontban a két térerősségvektor ellentétes irányú):

$$E = \frac{Q_2 - Q_1}{2A\varepsilon_0}.$$

Ezzel a kondenzátor feszültsége:

$$U = Ed = \frac{Q_2-Q_1}{2}\frac{d}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2}\frac{Q_2-Q_1}{C},$$

ahol felhasználtuk, hogy egy síkkondenzátor kapacitása $C = \varepsilon_0 A/d$.

F8.** Mivel a kisebb gömb földelt, annak a potenciája nulla kell legyen. De nem csak a felületén, hanem a középpontjában is. Ahhoz, hogy ez teljesüljön q töltés kerül a földből a belső gömbre. A szuperpozíció elve miatt a középpontban a potenciál a két töltött gömbtől számazó potenciál algebrai összege:

$$0 = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{r} \ \rightarrow\ q = -Q\frac{r}{R}.$$