

# Fizika 2i, tavaszi félév, 1. gyakorlat - MEGOLDÁS

## Órai munkára javasolt feladatok

**F1.** A proton tömege  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, töltése  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C; az elektron tömege  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg, töltése  $-e$ .

A hidrogénatomban,  $r$  távolságra lévő elektron és proton közötti gravitációs vonzóerő:

$$F_{\text{grav.}} = G \frac{m_p m_e}{r^2},$$

az elektrosztatikus vonzóerő:

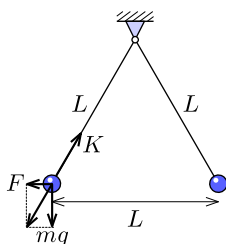
$$F_{\text{el.}} = k \frac{e^2}{r^2}.$$

A két erő hányadosa:

$$\frac{F_{\text{el.}}}{F_{\text{grav.}}} = \frac{ke^2}{Gm_p m_e} \approx 2 \cdot 10^{39}.$$

A hányados nem függ a két részecske közötti távolságtól.

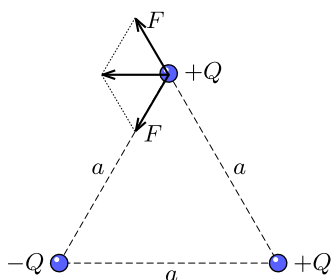
**F2.** Rajzoljuk be az egyik golyóra ható erőket.



A golyó egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője nulla. Emiatt a  $K$  kötélerő vízszintes, illetve függőleges komponense rendre az  $F = kQ^2/L^2$  elektromos taszítóerővel és az  $mg$  nehézségi erővel egyezik meg. Másként mondva ezt azt jelenti, hogy  $F$  és  $mg$  erők eredője kötélikirányú. Mivel a háromszög szabályos, ezért a két fonál közötti szög  $60^\circ$ -os. Tehát

$$\frac{F}{mg} = \tan 30^\circ \rightarrow m = \frac{F}{g \tan 30^\circ} = \sqrt{3} \frac{kQ^2}{gL^2}.$$

**F3. a)** Az ábrán berajoltuk az egyik  $+Q$  töltésre ható erőket.

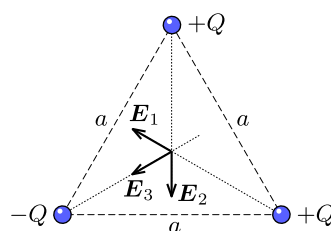


Mindkét erő azonos nagyságú:  $F = kQ^2/a^2$ , de az egyik vonzó-, a másik taszítóerő. Mivel a két erő azonos, és a kettő által bezárt szög  $120^\circ$ , ezért az eredő erő nagysága is  $F = 9 \cdot 10^{-5}$  N. Iránya pedig a  $-Q$  és a másik  $+Q$  töltést összekötő oldallal párhuzamos, ahogyan az ábra mutatja.

b) Az egyik töltéstől származó elektromos térerősség nagysága

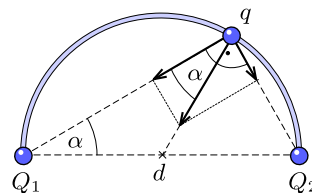
$$E = \frac{kQ}{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2} = 3 \frac{kQ}{a^2},$$

hiszen szabályos háromszög esetén a középpont harmadolja a magasságot. A középpontban az egyes töltésektől származó térerősségvektorokat az ábra mutatja ( $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = |\mathbf{E}_3| = E$ ).



Mivel az  $\mathbf{E}_1$  és  $\mathbf{E}_2$  vektorok azonos nagyságúak, ezért az eredőjük a  $-Q$  töltés irányába mutat, nagysága szintén a fent megadott  $E$ . Tehát az eredő térerősségvektor nagysága  $2E = 5,4 \cdot 10^4$  N/C és a  $-Q$  töltés felé mutat.

**F4\*.** Egyensúlyi helyzetben a két töltéstől származó Coulomb-erők eredője sugárirányú kell legyen (a félkörív csak sugárirányú kényszererőt képes kifejteni), különben ha lenne tangenciális komponense, akkor abban az irányba el tudna mozdulni. Vonzóerők esetén az ábra mutatja az egyensúlyi helyzetet. (Taszítóerők esetén kifelé mutat az eredő erő.) Thálesz-tétel miatt a két erő merőleges egymásra.



Az **F2.**-es feladat megoldásának megfelelően:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{kqQ_2}{(d \sin \alpha)^2}}{\frac{kqQ_1}{(d \cos \alpha)^2}} = \frac{Q_2}{Q_1} \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2,$$

vagyis egyensúlyi helyzetben

$$\tan^3 \alpha = \frac{Q_2}{Q_1} \rightarrow \alpha \approx 38,4^\circ.$$

Az egyensúlyi helyzet stabil, ha a  $q$  töltést onnan kissé kitérítve, visszakerül az egyensúlyi állapotba, és instabil, ha nem tér vissza. A kitérítés után lesz nem-eltűnő tangenciális komponense is az eredő erőnek (a sugárirányban a test nem tud elmozdulni). Mozdítsuk

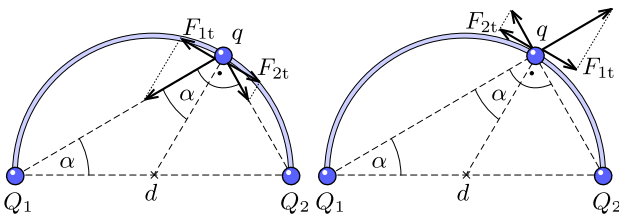
ki a  $q$  töltést „felfelé”, azaz növeljük az  $\alpha$  szöget. A  $Q_1$  töltéstől származó erő érintőirányú komponense:

$$F_{1t} = \frac{kqQ_1}{(d \cos \alpha)^2} \sin \alpha = \frac{kqQ_1}{d^2} \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}.$$

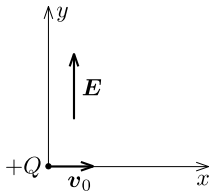
Ez növekszik, ha  $\alpha$  helyére az egyensúlyi  $38,4^\circ$ -os szög-nél nagyobbat írunk be. A  $Q_2$  töltéstől származó érintőirányú erőkomponens:

$$F_{2t} = \frac{kqQ_2}{(d \sin \alpha)^2} \cos \alpha = \frac{kqQ_2}{d^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \tan \alpha},$$

ami viszont csökken, ha  $\alpha > 38,4^\circ$ . Egyensúlyi helyzetben ez a két komponens azonos. Tehát, ha a  $q < 0$ , akkor kimozdítva a töltést, az eltávolodik az egyensúlyi helyzettől, azaz instabil, ha viszont  $q > 0$ , akkor visszatér, azaz stabil az egyensúlyi helyzet. Ezeket mutatja az alábbi ábra.



**F5\***. Az ábrán láthatjuk a feladatban leírt elrendezést.



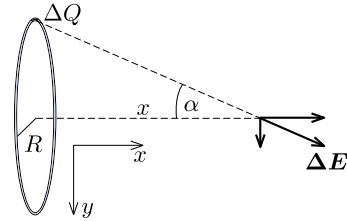
A töltésre csak  $y$ -irányú erő hat, aminek nagysága  $QE = \text{áll.}$ , azaz gyorsulása ebben az irányban  $a = QE/m$ . Mivel nincs  $x$ -irányú erő, ezért ebben az irányban nincs gyorsulás, vagyis a töltés ilyen irányú sebessége állandó, azaz  $v_0$ . Tehát a vízszintes hajításnak megfelelő mozgást tapasztalunk, azaz a pálya *parabola* lesz:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t, \\ y(t) &= \frac{a}{2} t^2 = \frac{QE}{2m} t^2. \end{aligned}$$

Az idő kiküszöbölésével a pálya egyenlete:

$$y(x) = \frac{QE}{2mv_0^2} x^2$$

**F6\***. a) Osszuk fel a gyűrűt  $\Delta Q$  töltésű kicsiny darabokra. Egy darabkától származó  $\Delta E$  térerősségvektort a gyűrű tengelyén, a közepétől  $x$  távolságra lévő pontban az ábra mutatja. A teljes térerősséget ezen darabok járulékeinak vektori összege adja. Látható, hogy az  $y$ -irányú komponensek összege nullát ad, a teljes vektor csak az  $x$ -irányú komponensekből származnak, tehát az eredő vektor is ilyen irányú.



Egy darabkától származó térerősségvektor  $x$  komponense:

$$\Delta E_x = \frac{k\Delta Q}{x^2 + R^2} \cos \alpha = \frac{k\Delta Q x}{(x^2 + R^2)^{3/2}},$$

ahol felhasználtuk, hogy  $\cos \alpha = x/\sqrt{x^2 + R^2}$ . A teljes térerősség meghatározásához egyszerűen csak a darabkák töltését kell összeadni, a kifejezés többi tényezője ugyanaz mindegyik darabkára, tehát

$$E(x) = \frac{kQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

b) Ahol a térerősség kifejezésének szélsőértéke van, ott a deriváltja eltűnik:

$$\frac{dE}{dx} = 0 \rightarrow (x^2 + R^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + R^2)^{1/2} \cdot 2x = 0.$$

Egyszerűsítések után az  $x = R/\sqrt{2}$  megoldást kapjuk. Itt valóban maximális a térerősség, hiszen  $x = 0$ -ban és  $x \rightarrow \infty$ -re  $E = 0$ , és máshol nincs lehetséges szélsőérték.

**F7\***. a) Keressük meg az egyensúlyi helyzetet. Jelölje  $\varphi_0$  az inga fonalának a függőlegessel bezárt szögét ebben a helyzetben. Az **F2**. feladatnak megfelelően:

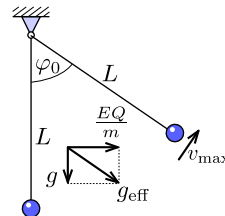
$$\tan \varphi_0 = \frac{EQ}{mg}.$$

Az indulási helyzettől mérve a fonál kitérése  $\varphi_{\max} = 2\varphi_0 \approx 53,1^\circ$ .

b) A test a legnagyobb sebességét akkor éri el, amikor az egyensúlyi helyzetén halad át. A mozgást úgy is fel lehet fogni, mintha a test az ábrán látható

$$g_{\text{eff}} = \sqrt{g^2 + \left(\frac{EQ}{m}\right)^2}$$

effektív nehézségi gyorsulású térben mozogna.



Ebben felírva a mechanikai energiamegmaradást:

$$mg_{\text{eff}}L(1 - \cos \varphi_0) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2.$$

Innen a maximális sebesség:

$$v_{\max} = \sqrt{2g_{\text{eff}}L(1 - \cos \varphi_0)} \approx 0,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**F8\*\*.** a) Egyensúlyi helyzetben a felső testre:

$$mg = \frac{kQ_1Q_2}{h^2} \rightarrow h = \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}.$$

b) Térítsük ki a felső testet az egyensúlyi helyzetéből felfelé egy kicsiny  $\Delta h$  távolsággal. Mivel az elektromos taszítóerő lecsökken, de a nehézségi erő állandó marad, így a felső gyöngyre visszatérítő erő hat, valóban rezgés alakul ki. A periódusidőt a mozgásegyenlet megoldásával kaphatjuk meg. Az eredő erő:

$$\sum F = mg - \frac{kQ_1Q_2}{(h + \Delta h)^2} = mg - \frac{kQ_1Q_2}{h^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

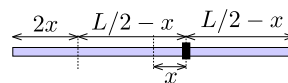
Felhasználva, hogy kicsiny  $x$ -re  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

$$\sum F \approx mg - \frac{kQ_1Q_2}{h^2} \cdot \left(1 - 2\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{2kQ_1Q_2}{h^3}\Delta h.$$

Mivel a visszatérítő erő nagysága arányos a kitérés nagyságával, ezért a kialakuló rezgés harmonikus (az arányossági tényező a „rugóállandó”). Tehát a periódusidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mh^3}{2kQ_1Q_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2g} \sqrt{\frac{kQ_1Q_2}{mg}}}.$$

**F9\*\*.** Térítsük ki a gyöngyöt kicsiny  $x$  távolsággal. Ekkor a gyöngytől jobbra és balra eső  $L/2 - x$  hosszú részekről származó vonzóerő ugyanakkora és ellentétes irányú, tehát kioltják egymást. A rúd végén fennmaradó  $2x$  hosszúságú rész által kifejtett vonzóerő az egyensúlyi helyzetbe igyekszik visszavinni a gyöngyöt.



A visszatérítőerő:

$$F = \frac{kQq}{\left(\frac{L}{2} - x\right)^2},$$

ahol kihasználtuk, hogy  $x$  kicsi, ezért a  $2x$  hosszúságú rész pontszerűnek tekinthető. Ennek a résznek a töltése  $q = 2x\lambda$ . Továbbá  $x \ll L/2$ , így

$$F \approx \frac{kQ \cdot 2\lambda x}{L^2/4} = \frac{8kQ\lambda}{L^2} \cdot x.$$

Az erő arányos a kitéréssel, ezért a periódusidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{8kQ\lambda}}.$$