Koordináta rendszerek

Komolyabb matematikai mélységekbe bocsátkozás nélkül mondhatjuk, hogy egy n dimenziós vektort n paraméterrel, n bázisvektor lineáris kombinációjaként tudunk leírni (hiszen a dimenzió a bázishalmaz számossága). Ezeket a bázisvektorokat több módon megválaszthatjuk, ezzel fogunk foglalkozni ebben az összefoglalóban.

Legyen W véges n dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, és legyen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n)$ ortonormált[1] bázis W-ben. Ekkor $\forall \mathbf{v} \in w$ vektor felírható a

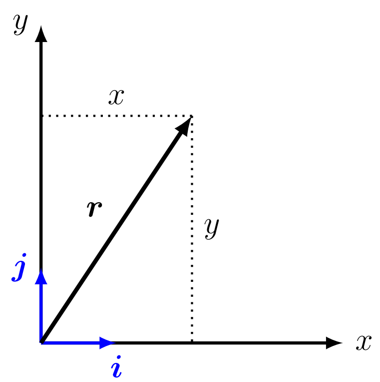
$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathbf{e}} .$$

A fenti szummában a $\mathbf{v}$ vektort felírtuk az $\mathbf{e}_i$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, azaz kifejtettük az $\mathbf{e}_i$ bázis szerint. Az α_i kifejtési együtthatók könnyen kiszámíthatók az ortonormáltság miatt. A l-edik kifejtési együttható kiszámításához $\mathbf{v}$-t skalárszorozzuk az $\mathbf{e}_l$ bázisvektorral:

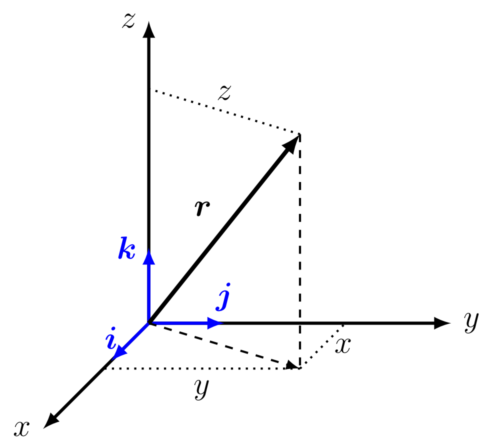
$$\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{v} = \alpha_l .$$

Ezzel a skalárszorzással azt számoljuk ki, hogy mekkor a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{e}_l$ bázisvektor irányába eső vetülete.

Descartes koordináta-rendszer



(a)



(b)

1. ábra. Descartes koordináta-rendszer 2 dimenzióban (a) és 3 dimenzióban (b).

Descartes koordináta-rendszerben, két egymásra merőleges egységvektor ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jelöli ezeket, de elterjedt jelölés még az $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ és $\hat{\mathbf{z}}$) lineáris kombinációjaként fejezünk ki minden vektort. Egy vektor

[1] Egy ortonormált bázis vektorai páronként merőlegesek egymásra (azaz skalárszorzatuk zérus), valamint a hosszuk 1.

$\mathrm{d}\mathbf{r}$ infinitezimális megváltozását az x, y és z irányú infinitezimális megváltozásával tudjuk jellemezni. Az infinitezimális felületelem $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ vagy $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, attól függően, hogy melyik síkkal párhuzamos a felületelem. Az infinitezimális térfogatelemet $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Mértékegységeket tekintve, $[\mathrm{d}x] = [\mathrm{d}y] = [\mathrm{d}z] = \mathrm{m}$, tehát az infinitezimális felületelem mértékegysége $[\mathrm{d}A] = \mathrm{m}^2$, és az infinitezimális térfogatelem mértékegysége $[\mathrm{d}V] = \mathrm{m}^3$.

Polár koordináta-rendszer

Polár koordináta-rendszerben, a vektort a hosszával (az origó és azon pont távolsága, ahová a vektor mutat) és egy kijelölt tengellyel bezárt szöggel jellemezzük. Az $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ egységvektor az origóból kifelé mutat, sugárirányú, emellett pedig egy érintőirányú $\hat{\phi}$ egységvektorral jelöljük az $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ vektorra merőleges irányt. Vegyük észre, hogy ezen egységvektorok iránya nem állandó, mint a Descartes koordináta-rendszer esetében, hanem pontról pontra változik. Gondoljunk arra az esetre, amikor a ϕ szög zérus, ekkor a sugárirányú egységvektor $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ vízszintesen jobbra, az érintőirányú egységvektor $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ függőlegesen felfelé mutat, míg $\phi = \pi/2$ esetében $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ függőlegesen felfelé, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ vízszintesen balra mutat. Ez azt eredményezi, hogy minden ponthoz a polár koordináta-rendszerben tartozik egy lokális ortonormált „Descartes-szerű” koordináta-rendszer.

Egy vektor kicsiny $\mathrm{d}\mathbf{r}$ infinitezimális megváltozását sugárirányú, illetve érintőirányú infinitezimális megváltozások lineáris kombinációjaként írhatjuk fel (azaz a lokális $(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ bázisvektorokkal kifejezve)

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\rho \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \mathrm{d}\phi \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Ezt a koordináta-rendszert könnyen kiterjeszthetjük 3D-re úgy, hogy az érintő- és sugárirányú bázisvektorainkhoz veszünk egy, az általuk kifeszített síkra merőlegese bázisvektort $\hat{\mathbf{z}}$-t. Az így kapott koordináta-rendszer henger koordináta-rendszernek nevezik (ha fix ρ mellett változtatjuk ϕ és z értékét, akkor könnyen belátható, hogy egy henger palástján mozgunk). Az $\mathbf{r}$ vektor z tengelyre merőleges síkra vett vetületének hossza ρ, a z tengelyre vett vetülete z.

Egy vektor $\mathrm{d}\mathbf{r}$ infinitezimális megváltozását a 2D esethez hasonlóan kaphatjuk meg (azaz a lokális $(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}})$ bázisvektorokkal kifejezve)

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\rho \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \mathrm{d}\phi \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathrm{d}z \cdot \hat{\mathbf{z}}.$$

A 3. ábrán a sugárirányú szakaszok és az íves elemek által határolt síkidom a (ρ, ϕ) sík $\mathrm{d}A_{\rho,\phi}$ nagyságú infinitezimális felületeleme, aminek a nagyságát egy $\mathrm{d}\phi$ szögű, $\rho + \mathrm{d}\rho$ sugarú és egy $\mathrm{d}\phi$ szögű, ρ sugarú körcikk területének különbségeként számolhatjuk ki

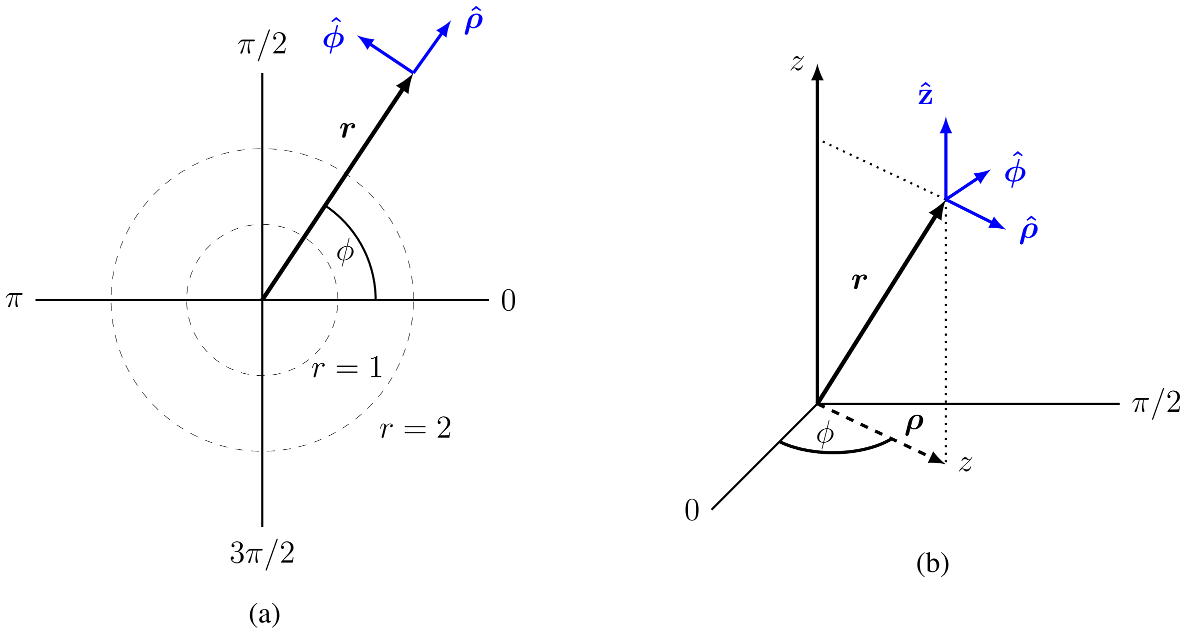
$$\begin{aligned}\mathrm{d}A_{\rho,\phi} =&(\rho + \mathrm{d}\rho)^2 \frac{\pi}{2\pi}\mathrm{d}\phi - r^2 \frac{\pi}{2\pi}\mathrm{d}\phi \\ =&\frac{\mathrm{d}\phi}{2}(\rho^2 + 2\rho\mathrm{d}\rho + \cancel{(\mathrm{d}\rho)^2} - \rho^2) \\ =&\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

A (ϕ, z) „sík” igazából egy görbült felület, egy hengerpalást, aminek az infinitezimális felületelemét a 3. ábrán $\mathrm{d}z$ hosszúságú szakaszok és $\rho\mathrm{d}\phi$ hosszúságú ívek határolnak. Ennek a nagysága

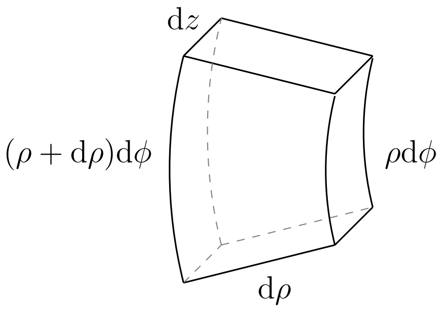
$$\mathrm{d}A_{\phi,z} =\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z.$$

A (ρ, z) sík egy félsíkot jelöl, hiszen $\rho \in [0; \infty)$ (mivel a z tengelytől mért távolságot jelöli, és mint távolság nem lehet negatív), melynek a határa a z tengely. A 3. ábrán ennek a síknak az infinitezimális felületeleme a z tengellyel párhuzamos és sugárirányú szakaszok által határolt síkidom, aminek a területe

$$\mathrm{d}A_{\rho,z} =\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z.$$



2. ábra. Polár koordináta-rendszer (a) és henger koordináta-rendszer (b).



3. ábra. Egy $\mathrm{d}V$ infinitezimális térfogatelem sematikus ábrája henger koordináta-rendszerben

Az infinitezimális térfogatelem nagysága

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}A_{\rho\phi}\mathrm{d}z = \mathrm{d}A_{\phi,z}\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}A_{\rho,z} = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z.$$

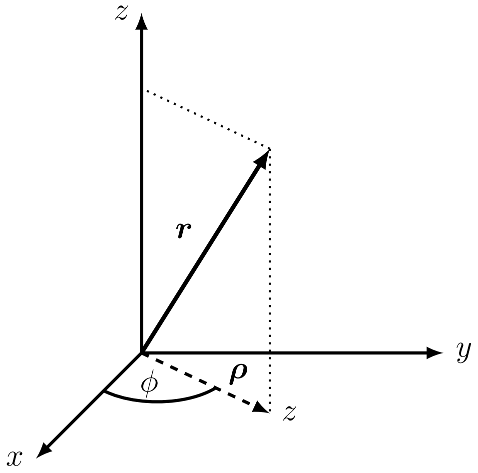
Mértékegységeket tekintve, $[\mathrm{d}\rho] = [\rho] = [\mathrm{d}z] = \mathrm{m}$ és $[\phi] = 1$, tehát az infinitezimális felületelem mértékegysége tényleg $[\mathrm{d}A] = \mathrm{m}^2$, és az infinitezimális térfogatelem mértékegysége tényleg $[\mathrm{d}V] = \mathrm{m}^3$.

Láttuk, hogyan tudjuk intuitív módon meghatározni az infinitezimális felületelemeket és az infinitezimális térfogatelemet. A matematikailag precízebb meghatározáshoz szükséges felírni az összefüggést a Descartes koordináta-rendszer és a henger koordináta-rendszer között. A 4. ábra alapján a következő összefüggéséket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} x =& \rho\cos\phi, \\ y =& \rho\sin\phi, \\ z =& z. \end{aligned}$$

Ezt követően képezzük a parciális deriváltakat, és foglaljuk őket egy mátrixba, ez lesz a Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



4. ábra. A tér egy pontjába mutató vektor Descartes és henger koordináta-rendszerben

A Jacobi-mátrix determinánsa segítségével integrálási változót cserélhetünk

$$\int \mathrm{d}V = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int \det(\mathbf{J})\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z = \int \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z,$$

azaz $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$ összefüggéshez jutunk.

Példa 1. – Számítsuk ki egy R sugarú kör kerületét és területét

A kör kerület kiszámításához képzeljük el, hogy egy R hosszúságú vektort az origó körül megforgatunk 2π szöggel, ekkor a vektor végpontja éppen egy körvonalat súrol. A körvonal hosszát (a kerületet) úgy tudjuk kiszámolni, hogy összegezzük a vektor kicsiny $\mathrm{d}r = \sqrt{(\mathrm{d}\rho)^2 + (R\mathrm{d}\phi)^2}\big|_{\mathrm{d}\rho=0} = R\mathrm{d}\phi$ megváltozásait, miközben a ϕ szöget 0-tól 2π-ig növeljük:

$$K = \int_0^K \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} R\mathrm{d}\phi = R\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi R.$$

A terület kiszámításához a $\mathrm{d}A = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$ infinitezimális felületelemeket kell összegeznünk:

$$T = \int_0^T \mathrm{d}A = \int_0^R\int_0^{2\pi} \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi = \left(\int_0^R \rho\mathrm{d}\rho\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right) = \frac{1}{2}R^2\cdot 2\pi = R^2\pi.$$

Példa 2. – Számítsuk ki egy H magasságú, R_1 alapkörű és R_2 fedőkörű egyenes csonkakúp felszínét és térfogatát

A csonkakúp alkotójának egyenlete henger koordináta-rendszerben:

$$R(z) = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{H}\cdot z.$$

A felület nagysága a palást területéből valamint az alap- és fedőkörök területéből tevődnek össze. A palást területét $\mathrm{d}A = R(z)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$ infinitezimális felületelemek összegeként számolhatjuk, a körök területét $z = 0$ és $z = H$ értékek mellett az előző példához hasonlóan meghatározhatjuk $\mathrm{d}A = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$ infinitezimális felületelemek összegzésével. Az integrálokat sorrendben végezzük el, ha az integrálandó függvény az összes integrálási változótól függ, de ebben az eseteben, mivel $R(z)$ nem függ ϕ-től, a ϕ szerinti integrál értékét kiemelhetjük a z szerinti integrálás elé.

$$\begin{aligned}
A =&(R_1^2 + R_2^2)\pi + \int_0^H \int_0^{2\pi} R(z)\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z = (R_1^2 + R_2^2)\pi + \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\right) \int_0^H R(z)\mathrm{d}z \\
=&(R_1^2 + R_2^2)\pi + 2\pi \left[R_1 \cdot z + \frac{R_2 - R_1}{2H} z^2\right]_0^H \\
=&\pi(R_1^2 + R_2^2 + (R_1 + R_2)H)
\end{aligned}$$

A térfogat kiszámolását a $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$ infinitezimális térfogatelemek összegzésével tehetjük meg:

$$V = \int_0^V \mathrm{d}V = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z = \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R(z)} \rho\,\mathrm{d}\rho\right) \mathrm{d}\phi\right) \mathrm{d}z.$$

Mivel ρ integrálja 0-tól $R(z)$-ig nem függ ϕ-től, kiemelhetjük a ϕ szerinti integrálás elé. A ϕ szerinti integrál értéke így konstans 2π lesz, ρ primitív függvénye $\rho^2/2 + c$, tehát

$$\begin{aligned}
V =&\pi \int_0^H R(z)^2\mathrm{d}z = \pi \int_0^H \left(R_1^2 + 2R_1\frac{R_2 - R_1}{H}z + \left(\frac{R_2 - R_1}{H}\right)^2 z^2\right) \mathrm{d}z \\
=&\pi \left[R_1^2 z + R_1\frac{R_2 - R_1}{H}z^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{H}\right)^2 \frac{z^3}{3}\right]_0^H = \frac{\pi H}{3}\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right).
\end{aligned}$$

Példa 3. – R sugarú, inhomogén tömegeloszlású félgömb tömege

Tekintsünk egy R sugarú félgömböt, aminek a sűrűségét az $P(\rho, \phi, z)$ függvény adja meg. A félgömb tömegét $\mathrm{d}m$ elemi tömegek összegeként állíthatjuk elő. Hogy fel tudjuk írni az integrált, meg kell vizsgálnunk, hogy az egyes mennyiségek milyen határok között változhatnak. A z változó szerinti integrálást úgy képzelhetjük el, mintha a testet felszeletelnénk sok $\mathrm{d}z$ magasságú hengerre (ha $\mathrm{d}z$ kellően kicsi, akkor a test szélének a z tengelytől mért távolsága elhanyagolható mértékben változik csak), és ezen kis hengerek összegeként állítanánk elő a testet. Tudjuk, hogy a félgömb sugara R, azaz $z \in [0; R]$. Mivel a határok nem függnek a többi változótól, ezt az integrálást végezzük el utolsóként. A ϕ változó szerint a $[0; 2\pi]$ intervallumon integrálunk. A ρ változó szerint a félgömb felületéig integrálunk csak, tehát $\rho \in [0; \sqrt{R^2 - z^2}]$. Az intervallum felső határa függ z-től, tehát ezt az integrálást célszerű elsőként elvégezni. A tömeget kiszámíthatjuk

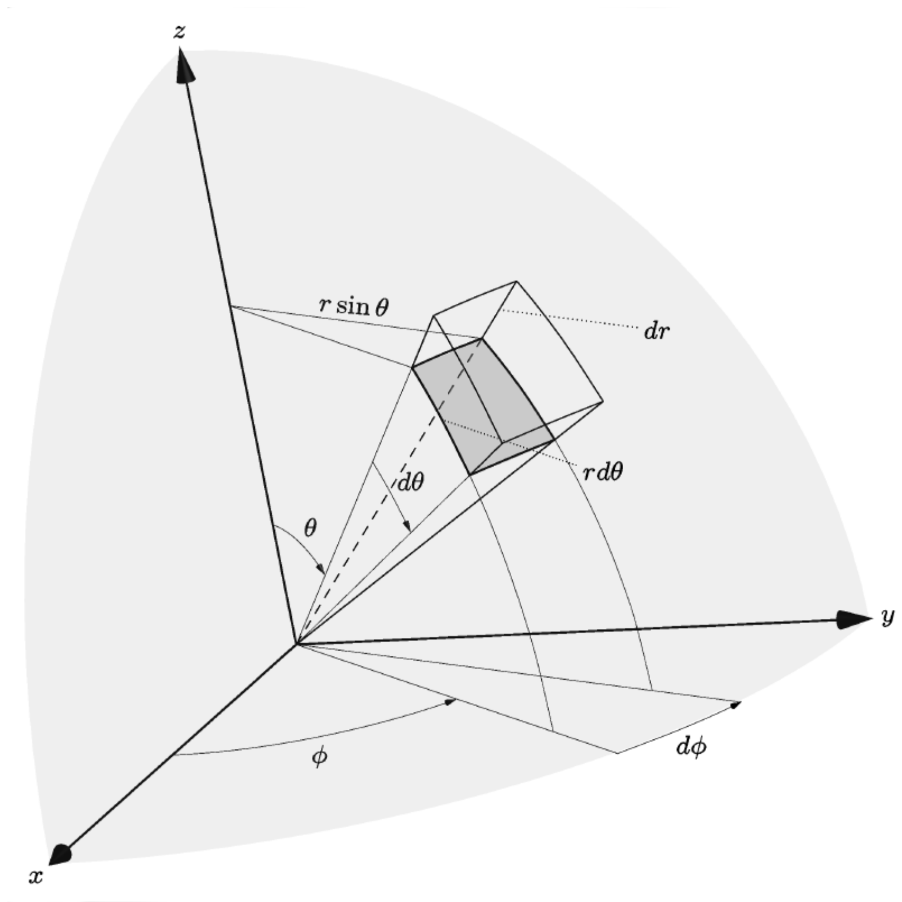
$$M = \int_0^M \mathrm{d}m = \int_0^V P(\rho, \phi, z)\mathrm{d}V' = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} P(\rho, \phi, z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z.$$

Ennél többet nem tudunk mondani a $P(\rho,\ \phi,\ z)$ sűrűség ismerete nélkül.

3D gömbi koordináta-rendszer

Gömbi koordináta rendszerben egy tetszőleges pontot az origótól mért távolságával (r), a pontot az origóval összekötő szakasz z tengellyel bezárt szögével (θ), és a pontot az origóval összekötő szakasz (x, y) tengelyre vett vetületének x tengellyel bezárt szögével (ϕ) jellemzünk. Csakúgy, mint a henger, illetve polár koordináta-rendszerek esetében, a gömbi koordináta-rendszerben is felírhatunk egy lokális ortonormált bázist az $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ vektorokkal. Egy vektor infinitezimális $\mathrm{d}\mathbf{r}$ megváltozását a lokális bázisban a felírhatjuk a következő alakban:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}r \cdot \hat{\mathbf{r}} + r\mathrm{d}\theta \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\mathrm{d}\phi \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$$



5. ábra. A gömbi koordináta-rendszert szemléltető ábra. A vastagabb vonallal határolt felületdarabok a gömbi koordináta-rendszer $\mathrm{d}V$ (sematikus) infinitezimális térfogatelemét határolják.

Az infinitezimális térfogatelemet intuitívan meghatározhatjuk az 5. ábra alapján:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \cdot r\mathrm{d}\theta \cdot r\sin\theta\mathrm{d}\phi = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

Számoljuk ki gömbi koordináta-rendszere esetében is az infinitezimális térfogatelemet integrál-transzformáció segítségével! Írjuk fel az összefüggést egy pont Descartes koordinátái és gömbi koordinátái között:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \qquad \theta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$z = r\cos\theta \qquad \phi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

Ebből a Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa

$$\det(\mathbf{J}) = r^2\sin\theta,$$

azaz az infinitezimális térfogatelem

$$\mathrm{d}V = \det(\mathbf{J})\cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

Vizsgáljuk most az infinitezimális felületelemeket! Az $(r,\ \phi)$ sík $(\theta = \pi/2)$ a már ismert polár koordináta-rendszert adja vissza, $(\theta \neq \pi/2)$ esetben pedig az $(r,\ \phi)$ változók egy egyenes kúp palástját paraméterezik fel. Az infinitezimális felületelem tehát

$$\mathrm{d}A_{r,\phi} = r\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r,$$

ami $\theta = \pi/2$ esetén valóban a polár koordináta-rendszer infinitezimális felületelemével egyezik meg. Az $(r,\ \theta)$ sík, csakúgy, mint a henger koordináta-rendszer esetében az $(r,\ z)$ sík, egy félsík, aminek az infinitezimális felületeleme

$$\mathrm{d}A_{r,\theta} = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

A $(\theta,\ \phi)$ „sík” egy gömbfelület, aminek infinitezimális felületeleme

$$\mathrm{d}A_{\theta,\phi} = r\sin\theta\mathrm{d}\phi r\mathrm{d}\theta = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = r^2\mathrm{d}\Omega.$$

Fent, a $\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ helyett bevezetett $\mathrm{d}\Omega$ a térszöget jelöli. A térszöget egy teljes gömbfelületre kiintegrálva $\Omega = 4\pi$ értéket kapunk, amivel egy r sugarú gömb felülete $r^2\Omega = r^2 4\pi$.

Példa 1. – R sugarú gömb felszínének és torfogatának kiszámítása

A gömb felületét az origótól azonos távolságra lévő pontok halmaza képezi, azaz fix sugár és változó θ és ϕ szögek képezik ezeket a pontokat, tehát a $\mathrm{d}A_{\theta,\phi}$ infinitezimális felületelemeket kell összegeznünk a teljes felület kiszámításához:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = R^2\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right) = R^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\cdot[\phi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

A térfogatot a $\mathrm{d}V$ infinitezimális térfogatelemek összegzésével számolhatjuk:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \left(\int_0^{r} r^2\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right) \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\cdot[\phi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Példa 2. – Egyenes kúppalást felszínének kiszámítása

Legyen a kúp magassága h, alapkörének sugara R. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, melynek az origója a kúp csúcsában helyezkedik el, a z tengelye pedig egybeesik a kúp forgástengelyével.

A palást felszínének kiszámításához számítsuk ki az alkotók z tengellyel bezárt szögének szinuszát, és az alkotók hosszát. Az alkotó hossza $l = \sqrt{R^2 + h^2}$, a keresett szög szinusza pedig $\sin\alpha = R/l$. A palást felszínének kiszámításához $\theta = \alpha$ konstans szög mellett kell változtatnunk a ϕ szöget a $[0;\ 2\pi]$ intervallumon, illetve az origótól mért távolságot a $[0;\ l]$ intervallumon.

$$\begin{aligned} T_p =& \int_0^l \int_0^{2\pi} r \sin\alpha \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r = \frac{R}{l} \cdot \int_0^l r \mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \frac{R}{l} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot 2\pi = Rl\pi \\ =&\pi R\sqrt{R^2 + h^2} \end{aligned}$$

Példa 3. – Egyenletesen töltött, egyenletesen forgó gömbhéj mágneses dipólusmomentuma

A gömbhéj belső gömbfelületének sugara legyen R, a külső gömbfelületének sugara legyen $R + d$, és legyen a térfogati töltéssűrűség $\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0$! Forogjon a gömb ω egyenletes szögsebességgel.

Az (r, θ, ϕ) koordinátájú ponthoz tartozó $\mathrm{d}V$ térfogatú darabja a gömbhéjnak, a forgástengelytől $r \cdot \sin\theta$ távolságra, egyenletes körmozgást végez. A $\mathrm{d}V$ térfogatban tárolt infinitezimális töltés $\mathrm{d}Q = \rho(r, \theta, \phi)\mathrm{d}V$, mely a körpálya egy pontján T időnként egyszer ahalad át, így $\mathrm{d}I = \mathrm{d}Q/T$ infinitezimális áramot hoz létre, ahol $T = 2\pi/\omega$ a körmozgás periódusideje. Ezen $\mathrm{d}I$ infinitezimális áram mágneses dipólusmomentum-járuléka $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}I \cdot (r\sin\theta)^2\pi$. A mágneses dipólusmomentum tehát ezen infinitezimális mágneses dipólusmomentumok összege:

$$\begin{aligned} \mu =& \int_R^{R+d} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 \sin^2\theta \cdot \rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \frac{\rho_0\omega}{2} \int_R^{R+d} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\ =&\frac{\rho_0\omega}{2} \int_R^{R+d} r^4 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \frac{\rho_0\omega}{2} \cdot \left(\frac{(R+d)^5}{5} - \frac{R^5}{5}\right) \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi \\ =&\frac{4\pi\rho_0\omega}{15}((R+d)^5 - R^5). \end{aligned}$$