4. gyakorlat

4.1. Feladat: (HN 30A-7) A magnetron a radar-oszcillátorok egy típusa. A radar által kisugárzott mikrohullám frekvenciáját a magnetron mágneses erőterében keringő elektronok ciklotron-frekvenciája szabja meg. Becsüljük meg, milyen mágneses fluxussűrűség szükséges 3 cm-es hullámhosszúságú mikrohullámok előállitásához.

Megoldás: A homogén mágneses térben az elektron a tér irányára merőleges síkban körpályán mozog[7] A körpályán tartást az elektronra ható Lorentz erő biztosítja, ezért

$$\begin{aligned}
F_L &= F_{cp} \\
e \cdot |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\
e \cdot v \cdot B &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\
\frac{e \cdot B}{m_e} &= \frac{v}{r}
\end{aligned}$$

De $\frac{v}{r} \equiv \omega$ a keringő elektron körfrekvenciája. Az elektron keringési frekvenciája tehát

$$f = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{e \cdot B}{2\,\pi\, m_e} \tag{4.1.1}$$

A mikrohullám fénysebességgel terjed, frekvenciája megegyezik az elektron "rezgési" frekvenciájával:

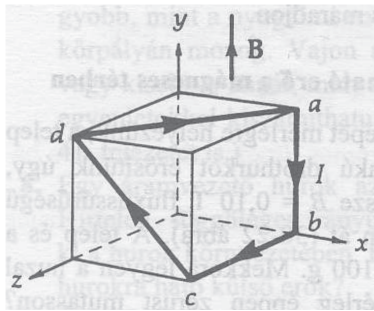
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\,\pi\, m_e \cdot c}{e \cdot B} \tag{4.1.2}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2\,\pi\, m_e \cdot c}{e \cdot \lambda} = \frac{2 \cdot 3,141 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 2,998 \cdot 10^{8}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,03} \\
&= 0,357 \cdot \frac{kg \cdot m}{s \cdot C \cdot m} = 0,357 \cdot \frac{kg\frac{m}{s^2} \cdot m}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{N \cdot m}{A \cdot m^2} \\
&= 0,357 \cdot \frac{J}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{W \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot s}{m^2} = 0,357\, T
\end{aligned}$$

4.2. Feladat: (HN 30B-18) A 16 ábrán bemutatott kocka 40 cm élhosszúságú. A négy egyenes szakaszból (ab,bc,cd és da) álló dróthurkon $I = 5$ A erősségű (áram folyik. Az y tengely pozitív irányában $B = 0,02$ T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat.

[7] Későbbiekben látni fogjuk, hogy egy gyorsuló töltés energiát sugároz, ezért külső energia betáplálása nélkül az elektron egyre kisebb sugarú körpályára térne át.



16. ábra.

Készítsünk táblázatot, melyben a fenti sorrendben az egyes huzalszakaszokra ható) erők nagyságát és irányát foglaljuk össze.

Megoldás: Egy egyenes vezetőre $\mathbf{B}$ fluxussűrűségű homogén mágneses térben ható erőt az

$$\mathbf{F} = I\,(\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \qquad F = I\,l\,B\,sin\,\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{B})$$

képlet adja meg, ahol $\mathbf{l}$ az áram irányába mutató vektor melynek hossza megegyezik az egyenes vezető szakasz hosszával és $\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{B})$ a szakasz és $\mathbf{B}$ közötti szög. $|\mathbf{l}|$ helyére tehát a következőket kell beírni: $|\mathbf{l}_{ab}| = |\mathbf{l}_{bc}| = A$, $|\mathbf{l}_{cd}| = |\mathbf{l}_{da}| = \sqrt{2}{\cdot}A$, ahol $A = 0,4\,m$ a kocka élhossza. Az egyes irányított szakaszok $\mathbf{B}$ vel bezárt szögei: $\alpha_{ab} = 180^o$, $\alpha_{bc} = 90^o$, $\alpha_{cd} = 45^o$ és $\alpha_{da} = 90^o$. Az egyes szakaszokra ható erők nagyságai és irányai:

$$\begin{aligned}
F_{ab} &= 0, \\
F_{bc} &= I \cdot A \cdot B = 5 \cdot 0,4 \cdot 0,02 = 0,04\,N \quad -x \text{ irányú} \\
F_{cd} &= \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = I \cdot A \cdot B = 0,04\,N \quad -z \text{ irányú} \\
F_{da} &= \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B = 0,052 N \quad +x \text{ és } +z \text{ tengellyel } 45^o \text{ szöget bezáró irányú}
\end{aligned}$$

4.3. Feladat: (HN 30C-51) Szigetelő anyagból keszült R sugarú korong egyik oldalán a felületmenti homogén töltéssűrűség nagysága σ. A korongot tengelye körül ω szögsebességgel forgatjuk. Mutassuk meg hogy mágneses dipólusmomentuma $\omega \cdot \sigma \cdot \pi R^4/4$. (Útmutatás: Számítsuk ki az r sugarú, dr széles körgyűrűn levő töltések mozgásából származó mágneses erőteret. Használhatjuk a $\mathbf{p}_m = I\,\mathbf{A}$ egyenletet.)

Megoldás: A korongon levő töltések mindegyike a korong tengelye körüli körpályán mozog, tehát egy köráramnak felel meg. Minden köráramnak van mágneses momentuma, ezért a forgó korongnak is. Bontsuk fel a korong felületét koncentrikus dr szélességű körgyűrűkre. Egy r sugarú I erősségű köráram mágneses momentumának nagysága $p_m = I \cdot A = I \cdot r^2\,\pi$. Esetünkben a középponttól r és $r + dr$ távolságban található $dQ = \sigma\,2\,\pi\,r\,dr$ nagyságú töltések $dI(r)$ árama:

$$dI(r) = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{2\,\pi/\omega} = \frac{\omega\,dQ}{2\,\pi} = \frac{2\,\pi\,\omega\,\sigma\,r\,dr}{2\,\pi} = \omega\,\sigma\,r\,dr$$

Egy ilyen köráram dp_m mágneses momentuma

$$p_m = dI \cdot A(r) = dI \cdot r^2\,\pi = \omega\,\sigma\,r^3\,\pi\,dr$$

A teljes körlap mágneses momentuma tehát

$$p_m = \omega\,\sigma\,\pi \int_0^R r^3\,dr = \omega\,\sigma\,\pi\,\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\omega\,\sigma\,\pi\,R^4}{4} \tag{4.3.1}$$

4.4. Feladat: (HN 31B-6) Egy R sugarú, köralakú vezetőhurokban I áram folyik. A hurok tengelyén, a huroktól milyen x távolságban van az a pont, ahol a mágneses fluxussűrűség, éppen fele a hurok középpontjában mérhetőnek? Felhasználhatjuk a (HN 31C-17) feladat eredményét is.

Megoldás: Menjen át a koordinátarendszer x tengelye a hurok középpontján merőlegesen a korong síkjára. A (HN 31C-17) feladat eredménye szerint x távolságban a hurok középpontjától

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right)\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

ahol $\mathbf{x}$ a $+x$ irányú egységvektor. Az x távolságban a tengelyen mérhető térerősség aránya a hurok középpontjában ($x = 0$) mérhetőhöz:

$$\frac{|B(x)|}{|B(0)|} = \frac{\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}}{\frac{R^2}{(R^2)^{3/2}}} = \frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

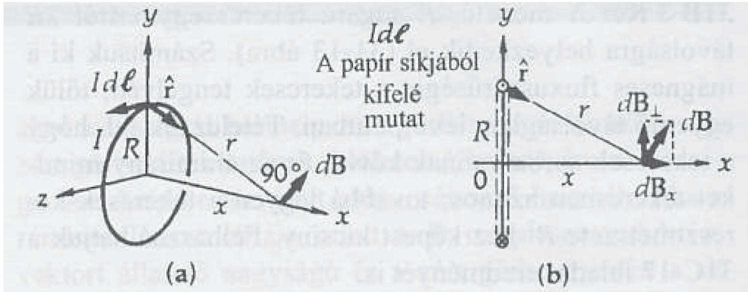
Ez akkor $1/2$, ha

$$\begin{aligned}
\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \\
2\,R^3 &= (x^2+R^2)^{3/2} \\
2^{2/3}\,R^2 - R^2 &= x^2 \\
x &= \pm\,(2^{2/3}-1)\cdot R = \pm 0,587\,R
\end{aligned}$$

4.5. Feladat: (HN 31C-17) A 17 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk meg, hogy a hurok tengelyén, a hurok sikjától x távolságban

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right)\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

(Útmutatás: Mi történik az x tengelyre merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensekkel az Idt elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ elemi mágneses indukcióvektorok összegzése során?)



17. ábra.

Megoldás: Osszuk fel a hurkot a 17 a) ábra szerint $d\mathbf{l}$ darabokra. Az egy ilyen darabkától származó mágneses tér a Biot-Savart törvény szerint

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|r|^3}$$

Minden elemi szakasz ugyanakkor nagyságú, de más irányú elemi $d\mathbf{B}$ -t hoz létre. A 31-18 b) ábrán látható, hogy $d\mathbf{B}$ felbontható egy az x tengellyel párhuzamos $d\mathbf{B}_{||}$ és egy arra merőleges $d\mathbf{B}_{\perp}$ komponensre. A hurok mentén átellenesen elhelyezkedő elemi szakaszoktól származó mágneses fluxussűrűségek $d\mathbf{B}_{\perp}$ komponensi pont ellentétes irányúak, így kiejtik egymást, azonos nagyságú $d\mathbf{B}_{||}$ komponenseik pedig összeadódnak. Ez azt jelenti, hogy az eredő $\mathbf{B}$ térnek csak x irányú komponense lesz, a pozitív tengelyen pozitív, a negatív tengelyen negatív irányú, tehát a tér párhuzamos lesz az x irányú egységvektorral $\mathbf{x}$-szel. Az egy szakasztól származó $d\mathbf{B}_{||}$ nagysága $dB_{||} = B\,sin\alpha$, ahol α az x és r közötti szög. Felhasználva, hogy $\mathbf{r}$ és $\mathbf{l}$ merőlegesek :

$$\begin{aligned} dB_{||} &= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}|}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\ &= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,dl \cdot r}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\ &= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,dl}{|r|^2} \cdot sin\,\alpha \end{aligned}$$

Mivel $r = \sqrt{x^2 + R^2}$

$$sin\,\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

amivel

$$dB_{||} = \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot l \qquad (4.5.1)$$

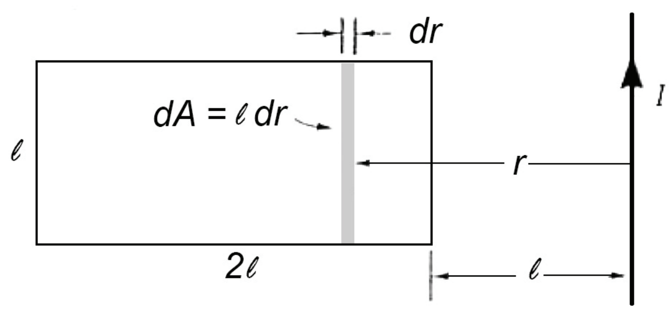
A teljes B tér az elemi szakaszok $dB_{||}$ járulékainak összege. Nagysága:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\,r\,\pi} dl \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot [l]_0^{2\,r\,\pi} \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot 2\,R\,\pi \\
&= \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{I\,R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \qquad (4.5.2)
\end{aligned}$$

Az irányt is figyelembe véve

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x} \qquad (4.5.3)$$

4.6. Feladat: (HN 31B-9) A 18 ábrán látható, téglalap alakú vezetőhurok és a ∞ hosszúságú, egyenes vezető azonos sikban fekszik. A vezetőhurok ellenállása $2\,\Omega$. Szá-



18. ábra. A 31B-9 feladathoz

mítsuk ki a hurok teljes felületén áthaladó mágneses fluxust, ha az egyenes vezetőn I áram halad át. (Útmutatás: Válasszunk ki egy $dA = \ell dr$ felületelemet, és számítsuk ki a $d\Phi_B$, fluxust ezen a felületelemen, majd integrálással számítsuk ki a teljes fluxust.)

Megoldás: Osszuk fel a felületet dr szélességű sávokra! Egy ilyen sáv mentén a mágneses fluxussűrűség konstansnak tekinthető. Az egyenes vezetőtől r távolságban a B mágneses fluxussűrűség nagysága

$$B = \mu_o \cdot \frac{I}{2\,\pi\,r}$$

így a dr széles és ℓ hosszú sávra vett elemi $d\Phi$ fluxus

$$d\Phi = B(r) \cdot dA = B(r) \cdot \ell \cdot dr = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell\,dr}{2\,\pi\,r}$$

A teljes hurkon áthaladó fluxus az elemi fluxusok összege, ami integrálként írható fel.

$$\Phi = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi} \int_{\ell}^{3\,\ell} \frac{1}{r}\,dr = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi}\,[ln\,r]_{\ell}^{3\,\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi}\,ln\,\frac{3\,\ell}{\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi}\,ln\,3 \qquad (4.6.1)$$

Házi feladat (gyakorlásra):
30/ 3, 4, 16, 45, 36
31/ 3, 4, 8, 13, 19