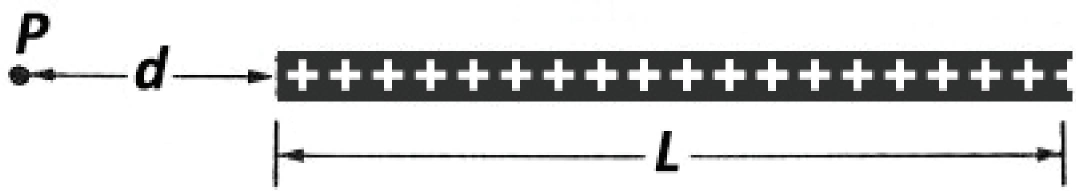
1. gyakorlat

1.1. Feladat: (HN 24B-19) A $+Q$ töltés egy L hosszúságú egyenes szakasz mentén oszlik el egyenletesen (ld. 1. ábra.). Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a vonal



1. ábra. 24B-19 feladat

irányában lévő, annak végpontjától d távolságra lévő P pontban!

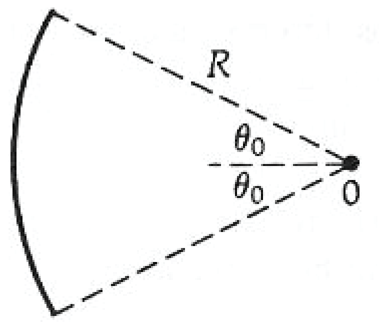
Megoldás: Mivel a P pont a szakasz meghosszabbításában van és a szakasz töltése pozitív a térerősség vektora a szakasztól el mutat. Válasszuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy a szakasz az x tengelyén feküdjön és a P pont legyen az origóban! Osszuk fel a szakaszt kis dx hosszúságú darabokra! Egy ilyen darab töltése $dQ = dx \cdot \frac{Q}{L}$. A teljes térerősség ezen kis dx szakaszok térerősségeinek összegével közelíthető ami integrállá válik, amennyiben $dx \to 0$. A P ponttól x távolságban levő szakasz darabtól származó térerősség nagysága:

$$dE(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dx\, Q}{L\, x^2} \tag{1.1.1}$$

A teljes térerősség

$$\begin{aligned} E(x) &\approx -\sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\, dx}{L\, x^2} = -\frac{Q}{4\, L\, \pi\, \varepsilon_0} \sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} && (1.1.2) \\ E(x) &= -\frac{Q}{4\, L\, \pi\, \varepsilon_0} \int_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4\, L\, \pi\, \varepsilon_0} \left[-\frac{1}{x} \right]_d^{x+L} \\ &= -\frac{Q}{4\, L\, \pi\, \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{d+L} + \frac{1}{d} \right) = -\frac{Q}{4\, L\, \pi\, \varepsilon_0} \left(\frac{L}{d(d+L)} \right) \end{aligned}$$

$$E(x) = -\frac{Q}{4\, \pi\, \varepsilon_0} \frac{1}{d(d+L)} \tag{1.1.3}$$



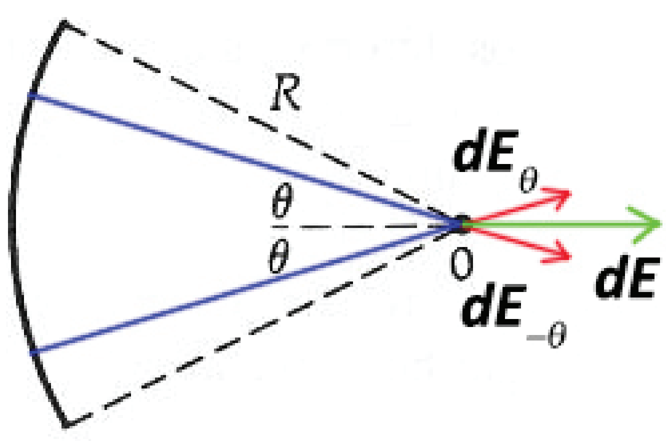
2. ábra. 24B-20 feladat

1.2. Feladat: (HN 24B-20) Egy vékony, nem vezető rudat a 2. ábrán vázolt módon meghajlítunk úgy, hogy az egy R sugarú kör íve legyen, mely e kör középpontjából 20^o szög alatt látszik. Legyen e hajlított rúdon egyenletes pozitív λ töltéssűrűség. Számítsuk ki az E elektromos tér térerősséget a kör O középpontjában. (Útmutatás: számítsuk ki a $dl = Rd\theta$ hosszúságú szakasz dq töltésétől származó dE térerősséget. Használjuk ki a rendszer szimmetriatulajdonságát a $\theta = -\theta_0$ és $\theta = +\theta_0$ közötti integrál kiszámításakor.)

Megoldás: Osszuk fel a körívet egyenlő dl hosszúságú kis darabokra! A körív középpontjában minden ilyen kis darab térerőssége ugyanakkora:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, R\, d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, d\theta}{R} \tag{1.2.1}$$

nagyságú és az O pontból a körívvel ellentétes irányba mutat. Mivel a vízszintes tengelyre szimmetrikusan, θ és $-\theta$ szögben elhelyezkedő szakaszoktól származó térerősség nagysága ugyanakkora, és irányuk a vízszintes tengelyre szimmetrikus ezek függőleges komponensei kiejtik egymást: vízszintes komponenseik nagysága pedig összeadódik, az



3. ábra. Az eredő térerősség kiszámításához

eredő térerősség kiszámításához elegendő a pozitív θ értékekre, vagyis fél körívre összegezni a dE_θ térerősségek vízszintes komponensének *kétszeresét*, azaz $2\, dE_\theta \cdot cos\,\theta$-t. A $dl \to 0$ határesetben egy integrált kapunk:

$$E = 2\int_0^{\theta_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\, cos\,\theta\, d\theta = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\,\left[sin\,\theta\right]_0^{\theta_0}, \tag{1.2.2}$$

azaz

$$E = \frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0\, R}\, sin\theta_0. \tag{1.2.3}$$

1.3. Feladat: (HN 24C-26) Két (fix helyzetű) $+Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Egy harmadik, pozitív q töltést a két előbbi töltést összekötő egyenes mentén mozgatunk.
(a) Mutassuk meg, hogy ha a q töltést egyensúlyi helyzetéből kissé (x távolságnyira, $x \ll d$) kimozdítjuk, akkor közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez.
(b) Számítsuk ki az ehhez a mozgáshoz rendelhető k „rugóállandót".

Megoldás: Legyen mindegyik töltés az x tengelyen! Ekkor a q töltés által érzékelt térerősség is x irányú. Mivel mindegyik töltés azonos előjelű a q töltésre a két Q töltéstől ható erők ellentétes irányúak:

$$F_{bal\,oldali\,Qtol} = K\frac{Q\,q}{r^2_{bal\,oldali\,Qtol}} F_{jobb\,oldaliQtol} = -K\frac{Q\,q}{r^2_{jobb\,oldaliQtol}} \tag{1.3.1}$$

q egyensúlyi helyzete a két $+Q$ töltés között éppen félúton van, ahol a két erő kiegyenlíti egymást. Térítsük ki a q töltést egyensúlyi helyzetétől pozitív irányba. Ekkor a rá ható erők eredője már nem lesz 0, hanem :

$$F = F_{bal\,oldali\,Qtol} + F_{jobb\,oldali\,Qtol} = K\left[\frac{Q\,q}{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2} - \frac{Q\,q}{\left(\frac{d}{2}-x\right)^2}\right]. \tag{1.3.2}$$

Ha $x \ll d$, akkor $x \ll \frac{d}{2}$ is igaz. Legyen $d = 2\,L$! Ekkor $\frac{d}{2} = L$ és a nevezők az előző képletben közelíthetőek a következő módon:

$$\frac{1}{(L\pm x)^2} = \frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1\pm\frac{x}{L}\right)^2} \approx \frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1\pm 2\frac{x}{L}\right)} \approx \frac{1}{L^2}\cdot\left(1\mp 2\frac{x}{L}\right). \tag{1.3.3}$$

Ez konkrét példákon is ellenőrizhető[1]. Tehát

$$F \approx \frac{Q\,q}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2}\left((1-2\frac{x}{L}) - (1+2\frac{x}{L})\right) = -\frac{Q\,q}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2}\,4\,\frac{x}{L} = -\frac{Q\,q}{4\,\pi\varepsilon_0}\frac{4}{d^2}\,8\,\frac{x}{d}. \tag{1.3.5}$$

[1] Egy példa: legyen $d = 10$, vagyis $L = 5$ és $x = 0,01$. Ekkor

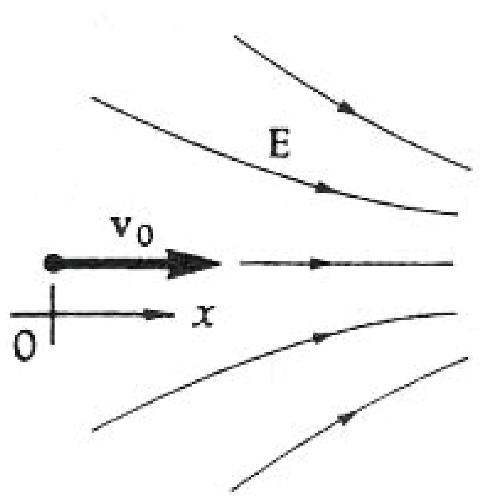
$$\frac{1}{(L+x)^2} = 0,0398404\frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1+2\frac{x}{L}\right)} = 0,0398406\frac{1}{L^2}\cdot\left(1-2\frac{x}{L}\right) = 0,0398400. \tag{1.3.4}$$

$$F = -\frac{8\,Q\,q}{\pi\varepsilon_0}\frac{x}{d^3}. \tag{1.3.6}$$

Mint látjuk, amennyiben a kitérés sokkal kisebb, mint d, az erő ellentétes irányú és arányos a kitéréssel vagyis valóban harmonikus rezgőmozgásról van szó amelynek "rugóállandója"

$$k = \frac{8\,Q\,q}{d^3\,\pi\varepsilon_0}. \tag{1.3.7}$$

1.4. Feladat: (HN 24C-29) Miként az a 4. ábrán látható, egy elektron, amelynek az $x_o = 0$ helyen $v_o = 10^6\,m/s$ a kezdősebessége, az x tengely pozitív irányában halad olyan tértartományban, ahol az elektromos térerősséget az $E_x = (4V/m)\cdot(1+10^3\,x)$ függvény adja meg (az x távolságot méterben kell megadni). Számítsuk ki azt a távolságot, ahol az elektron sebessége (legalábbis egy pillanatra) zérussá válik.



4. ábra. 24C-29 feladat

Megoldás: Az elektrosztatikus tér helytől függő potenciálja

$$\Phi(x) = -\int E(x)dx = -\int 4\,(1+10^3x)\,dx = -4\,(x+500x^2). \tag{1.4.1}$$

Az elektron helyfüggő potenciális energiája ebben a térben (az elektron töltése negatív)

$$E_{pot} = -e\,\Phi(x) = 4\,e\,(x+500\,x^2). \tag{1.4.2}$$

Az elektron abban az x koordinátájú pontban áll meg amikor minden kinetikus energiáját elveszti. Az elektron potenciális energiájának megváltozása $\Delta\,x = x - x_o$ úton tehát egyenlő a kezdeti kinetikus energiájával:

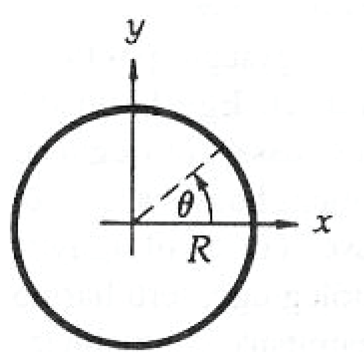
$$\begin{aligned}
\Delta E_{pot} &= E_{kin,kezdeti} \\
\Delta E_{pot} = E_{pot}(x) - E_{pot}(x_o) &= 4\,e\,(x + 500\,x^2) - 0 \\
4\,e\,(x + 500\,x^2) &= \frac{1}{2}\,m\,v_o^2 \\
500\,x^2 + x - \frac{1}{8}\,\frac{m}{e}\,10^{12} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

A másodfokú egyenlet megoldása

$$\begin{aligned}
x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{8}\,\frac{m}{e}\,10^{12} \cdot 500}}{1000} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\,\frac{m}{e}\,10^{12} \cdot 500}}{1000} \\
= \frac{-1 \pm \sqrt{1422,408}}{1000} &= \frac{-1 \pm 37,715}{1000} \\
x_+ &= 3,67 \cdot 10^{-2}\mathrm{m} \\
x_- &= -3,871 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}.
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

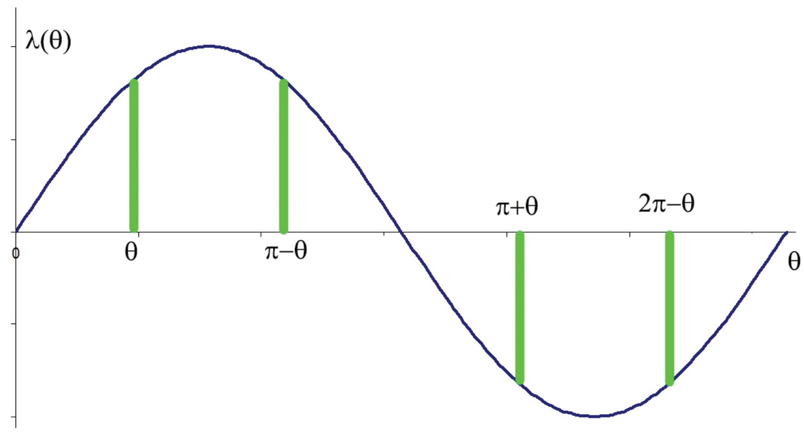
A mi esetünkben csak a pozitív eredmény jöhet szóba.

1.5. Feladat: (HN 24C-37) Egy vékony, nem vezető, R sugarú gyűrűn nem egyenletes a λ lineáris töltéssűrűség: $\lambda = \lambda_0\,sin\,\theta$, ahol a θ szög a 5. ábra szerint értelmezendő.
(a) Vázoljuk a gyűrű töltéseloszlását.
(b) Milyen az E elektromos térerősség iránya a gyűrű középpontjában?
(c) Mutassuk meg, hogy az elektromos térerősség nagysága a gyűrű középpontjában $\dfrac{\lambda_0}{4\,\varepsilon_0\,R}$.



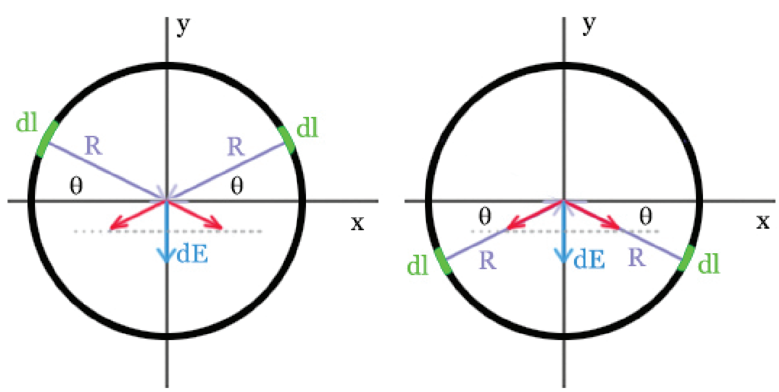
5. ábra. 24-C37 feladat

Megoldás:
(a) A töltéssűrűség a szög függvényében a 6. ábrán látható.



6. ábra. Töltéssűrűség a szög függvényében. A zöld vonalak 4 olyan szöget jeleznek, ahol a töltéssűrűség abszolút értéke ugyanakkora

(b) Osszuk fel a kör kerületét infinitizemálisan kicsi dl szakaszokra. Egy tetszőleges θ szögnél elhelyezkedő szakasztól származó térerősség iránya vagy megegyezik a szakasztól a középpontig húzott vektor irányával ($0 \leq \theta \leq \pi$) vagy ellentétes vele ($0 \leq -\theta \leq \pi$). A teljes térerősség az egyes szakaszoktól származó térerősségek összege. A 7 ábrán látható, hogy az eredő térerősségben csak az egyes szakaszoktól származó



7. ábra. Különböző infinitezimális dl szakaszoktól származó térerősségek összegzése.

térerősségek függőleges, -y irányú összetevője marad meg. Tehát az eredő térerősség a negatív y tengely irányába mutat.
(c) Ennek nagysága egy adott θ szög esetén

$$dE_y(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda(\theta)\, dl}{R^2}\, sin\,\theta \tag{1.5.1}$$

ahol d$l = R\,$dθ. Szimmetria okok miatt d$E_y(\theta)$ ugyanakkora és ugyanolyan irányú a θ, $\pi - \theta$, $\pi + \theta$ és $2\,\pi - \theta$ szögek esetén, ezért elegendő a $0 \ldots \dfrac{\pi}{2}$ tartományra integrálni és az eredményt négyszerezni:

$$\begin{aligned}
E_y &= 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\theta)\,R}{R^2}\,sin\,\theta\,d\theta = \\
&= 4\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{\pi/2} sin^2\theta\,d\theta = \\
&= 4\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{\pi/2}\frac{1-cos\,2\,\theta}{2}\,d\theta = \\
&= \frac{\lambda_0}{2\,\pi\varepsilon_0\,R}\left[\theta-\frac{sin\,2\,\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{\lambda_0}{2\,\pi\varepsilon_0\,R}\left[\frac{\pi}{2}-0-0+0\right] \qquad (1.5.2)
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a $sin^2\theta = \dfrac{1-cos2\theta}{2}$ összefüggést[2]. A végeredmény

$$E_y = \frac{\lambda_0}{4\,\varepsilon_0\,R}. \qquad (1.5.3)$$

1.6. Feladat: (HN 24C-39) Tekintsünk egy egyenletesen feltöltött R sugarú körgyűrűt, és annak tengelye mentén az elektromos teret. Mutassuk meg, hogy a térerősség maximuma $E_{x,max}$ a tengelyen, a gyűrű középpontjától $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ távolságban van. Vázoljuk E változását x függvényében (negatív és pozitív x értékekre).

Megoldás: Bontsuk fel a körgyűrűt infinitezimálisan kis dl szakaszokra. A körgyűrű tengelyének minden pontja a körgyűrű összes pontjától - és így az összes szakasztól is - azonos távolságban van. A körgyűrű átellenes pontjaitól (szakaszaitól) származó térerősségek x tengelyre merőleges komponensei kiejtik egymást, ezért elegendő az E_x komponenseket összegezni. Egy dl szakasz térerőssége a 8 ábra szerint:

$$\begin{aligned}
dE_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{r^2}cos\,\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{R^2+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\lambda\,dl}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \qquad (1.6.1)
\end{aligned}$$

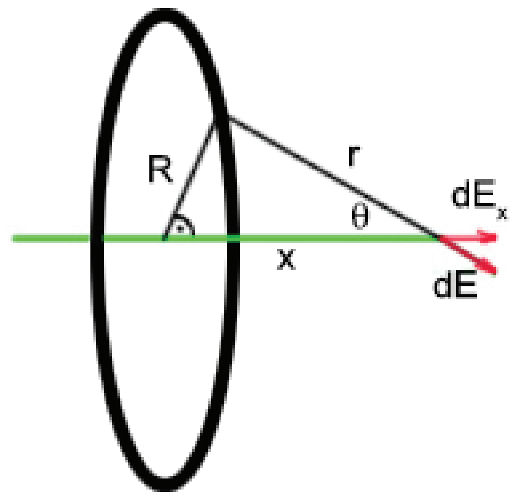
A teljes térerősség

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\,R\,\pi\,x\,\lambda}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \qquad (1.6.2)$$

Ennek akkor van maximuma, ha a deriváltja nulla. Ha a derivált nulla, akkor a konstansok nem számítanak, ezért azokat el is hagyhatjuk

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = 0 \qquad (1.6.3)$$

[2]Ezt levezethetjük a következő két egyenlőségből: $cos\,2\,\theta = cos^2\theta - \sin^2\theta$ és $cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



8. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött körgyűrű tengelyén

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} &= \frac{(R^2+x^2)^{3/2} - x\,\frac{3}{2}(R^2+x^2)^{1/2}\,2\,x}{(R^2+x^2)^3} \\ &= \frac{(R^2+x^2) - 3\,x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

A nevező sosem lehet nulla, ezért átszorozhatunk vele

$$R^2 - 2\,x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}. \tag{1.6.5}$$

Eszerint E_x szélsőértéke lehet az $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ helyen. Ez akkor valóban maximum ha a második derivált ezen a helyen negatív.

Házi feladat (gyakorlásra):
HN 24- 7, 9, 15, 23, 27, 31, 34, 35, 36