A folyamat során felvett elemi hő

$$\mathrm{d}Q = nc_v\mathrm{d}T, \tag{10.20.2}$$

így az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_k}^{T_v} \frac{3}{2}nR\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{3}{2}nR\ln\frac{T_v}{T_k}, \tag{10.20.3}$$

ahol T_k a kezdeti, T_v a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac II. törvényét

$$\frac{T_v}{T_k} = \frac{p_v}{p_k}, \tag{10.20.4}$$

az entrópiaváltozás

$$\triangle S = \frac{3}{2}nR\ln\frac{p_v}{p_k}. \tag{10.20.5}$$

11. Feladatok az elektrosztatika tárgyköréből

Coulomb-törvény

11.1. Feladat: (HN 24B-7) Két kicsiny, 100 g-os ezüst gömb egymástól 1 m-es távolságra helyezkedik el. Az ezüstgömb elektronjainak hányadrészét kell az egyik gömbről a másikra átvinni, hogy közöttük 10^4 N vonzóerő hasson? (Az ezüstben atomonként 47 elektron van, és az ezüst atomtömege 107,9.)

Megoldás: A fellépő erő nagysága

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}, \tag{11.1.1}$$

amelyből az adatok behelyettesítésével az átvitt töltés

$$Q = 1,054\cdot 10^{-3}\mathrm{C}. \tag{11.1.2}$$

Ez $6,58\cdot 10^{15}$ számú elektronnak felel meg. A 100 g ezüst $2,61\cdot 10^{25}$ elektront tartalmaz. Így az elektronok $2,51\cdot 10^{-10}$-nyi hányadát kell átvinni.

11.2. Feladat: (HN 24B-9) Két pontszerű töltés az x tengelyen a következőképpen helyezkedik el: egy -3 μ C töltés az origóban, és egy +2 μ C töltés az x = 0,15 m koordinátájú pontban van. Keressük meg azt a helyet, egy q' ponttöltésre ható erő zérus.

Megoldás: A q' töltésre ható erő ott zérus, ahol zérus a két töltéstő származó elektromos térerősség. Osszuk fel az x tengelyt három intervallumra. Jelölje D a q' helyét az x tengelyen.
(a) $-\infty < D < 0$: Számolás nélkül belátható, hogy a térerősség egyetlen D pontban sem lehet zérus. A -3 μ C töltéstől származó tér nagysága – az $1/r^2$-es erőtörvény miatt – mindenütt felülmúlja a +2 μ C töltéstől származó teret. Itt tehát nincs megoldás.
(b) $0 < D < x$: Az intervallum minden pontjában mindkét töltéstől származó erőtér negatív irányú, így az összegük is. Itt sincs megoldás.
(c) $x < D < \infty$: Legyen $Q_1 = -3\mu$ C és $Q_2 = +2\mu$ C. A két töltéstől származó tér zérus voltát a

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{D^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(D-x)^2} \tag{11.2.1}$$

egyenlet fejezi ki. Ezt D-re megoldva és az adatokat behelyettesítve

$$D = 0,82\text{m} \tag{11.2.2}$$

adódik. Ebben a pontban zérus a térerősség.

11.3. Feladat: Egy homogén elektromos erőtér térerőssége (derékszögű koordinátarendszerben) $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{y}} = E_0\mathbf{j} = E_0 \cdot (0,1,0)$, ahol E_0 konstans. (Itt a többféle lehetséges jelölés látható.) Egy m tömegű és $+q$ töltésű részecskét juttatunk a koordinátarendszer origójába $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{x}} = v_0\mathbf{i} = v_0 \cdot (1,0,0)$ sebességgel. Számítsuk ki a részecske pályájának egyenletét!

Megoldás: A $+q$ töltésre ható erő

$$\mathbf{F} = qE_0 \cdot (0,1,0) = (0, qE_0, 0), \tag{11.3.1}$$

amely

$$\mathbf{a} = \frac{qE_0}{m} \cdot (0,1,0) = \left(0, \frac{qE_0}{m}, 0\right) \tag{11.3.2}$$

gyorsulást hoz létre. A sebességre vonatkozó kezdőfeltételt figyelembe véve a test sebessége az idő függvényében

$$\mathbf{v} = \left(v_0, \frac{qE_0}{m}t, 0\right). \tag{11.3.3}$$

Míg a test helyzete – figyelembe véve, hogy az origóból indult –

$$\mathbf{r} = \left(v_0 t, \frac{1}{2}\frac{qE_0}{m}t^2, 0\right). \tag{11.3.4}$$

Látható, hogy

$$x(t) = v_0 t \tag{11.3.5}$$

és

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{qE_0}{m}t^2, \tag{11.3.6}$$

ahonnan a t eliminálásával az

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{qE_0}{mv_0^2}x^2 \tag{11.3.7}$$

pályagörbe adódik.

11.4. Feladat: (HN 24B-19) A $+Q$ töltés egy L hosszúságú egyenes szakasz mentén oszlik el egyenletesen (ld. 55. ábra.). Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a vonal irányában lévő,

55. ábra. 24B-19 feladat

annak végpontjától d távolságra lévő P pontban!

Megoldás: Mivel a P pont a szakasz meghosszabbításában van és a szakasz töltése pozitív a térerősség vektora a szakasztól el mutat. Válasszuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy a szakasz az x tengelyén feküdjön és a P pont legyen az origóban! Osszuk fel a szakaszt kis dx hosszúságú darabokra! Egy ilyen darab töltése $dQ = dx \cdot \frac{Q}{L}$. A teljes térerősség ezen kis dx szakaszok térerősségeinek összegével közelíthető ami integrállá válik, amennyiben $dx \to 0$. A P ponttól x távolságban levő szakasz darabtól származó térerősség nagysága:

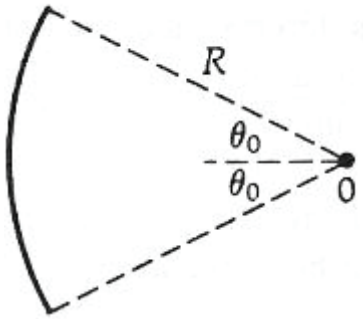
$$dE(x) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dQ}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dxQ}{Lx^2} \tag{11.4.1}$$

A teljes térerősség

$$\begin{aligned} E(x) &\approx -\sum_{x=d}^{x=d+L}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q\,dx}{Lx^2} = -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0}\sum_{x=d}^{x=d+L}\frac{dx}{x^2} \qquad (11.4.2)\\ E(x) &= -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0}\int_{x=d}^{x=d+L}\frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_d^{x+L}\\ &= -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{d+L}+\frac{1}{d}\right) = -\frac{Q}{4L\pi\varepsilon_0}\left(\frac{L}{d(d+L)}\right) \end{aligned}$$

$$E(x) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d(d+L)} \tag{11.4.3}$$

11.5. Feladat: (HN 24B-20) Egy vékony, nem vezető rudat a 56. ábrán vázolt módon meghajlítunk úgy, hogy az egy R sugarú kör íve legyen, mely e kör középpontjából 20^o szög alatt látszik. Legyen e hajlított rúdon egyenletes pozitív λ töltéssűrűség. Számítsuk ki az E elektromos tér térerősséget a kör O középpontjában. (Útmutatás: számítsuk ki a $dl = Rd\theta$ hosszúságú szakasz dq töltésétől származó dE térerősséget. Használjuk ki a rendszer szimmetriatulajdonságát a $\theta = -\theta_0$ és $\theta = +\theta_0$ közötti integrál kiszámításakor.)



56. ábra. 24B-20 feladat

Megoldás: Osszuk fel a körívet egyenlő dl hosszúságú kis darabokra! A körív középpontjában minden ilyen kis darab térerőssége ugyanakkora:

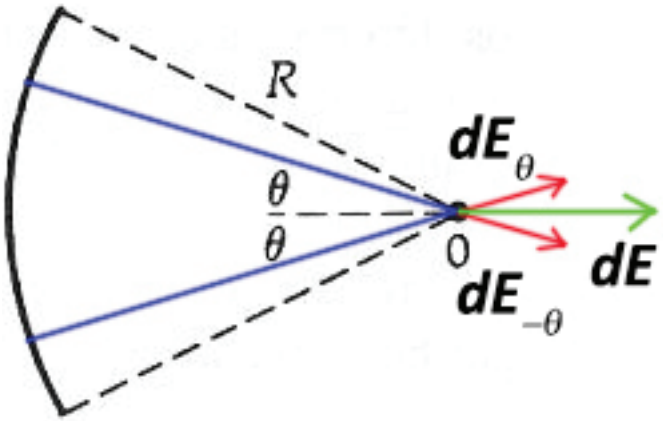
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{R} \tag{11.5.1}$$

nagyságú és az O pontból a körívvel ellentétes irányba mutat. Mivel a vízszintes tengelyre szimmetrikusan, θ és $-\theta$ szögben elhelyezkedő szakaszoktól származó térerősség nagysága ugyanakkora, és irányuk a vízszintes tengelyre szimmetrikus ezek függőleges komponensei kiejtik egymást: vízszintes komponenseik nagysága pedig összeadódik, az eredő térerősség kiszámításához elegendő a pozitív θ értékekre, vagyis fél körívre összegezni a dE_θ térerősségek vízszintes komponensének *kétszeresét*, azaz $2\,dE_\theta \cdot cos\,\theta$-t. A $dl \to 0$ határesetben egy integrált kapunk:

$$E = 2\int_0^{\theta_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R} cos\,\theta\, d\theta = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\,[sin\,\theta]_0^{\theta_0}\,, \tag{11.5.2}$$

azaz

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\, sin\theta_0. \tag{11.5.3}$$



57. ábra. Az eredő térerősség kiszámításához

11.6. Feladat: (HN 24C-23) Mutassuk meg, hogy két egymástól meghatározott távolságban lévő kis tárgy, amelyek között adott töltésmennyiség oszlik meg, akkor taszítja egymást a legnagyobb erővel, ha a töltés egyenletesen oszlik meg közöttük.

Megoldás: Osszunk meg Q töltést úgy, hogy az egyik testen q, a másikon Q-q töltés legyen. Ekkor a két test között ható Coulomb-erő nagysága

$$F(q) = K\frac{q(Q-q)}{r^2}. \tag{11.6.1}$$

A erő maximális értékét úgy kereshetjük meg, ha megoldjuk a

$$\frac{dF(q)}{\mathrm{d}q} = 0 \tag{11.6.2}$$

egyenletet. A deriválást elvégezve

$$\frac{K}{r^2}(Q-2q) = 0 \tag{11.6.3}$$

adódik, amelyből a

$$q = \frac{1}{2}Q \tag{11.6.4}$$

következik. Ezzel az állítást igazoltuk.

11.7. Feladat: (HN 24C-26) Két (fix helyzetű) $+Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Egy harmadik, pozitív q töltést a két előbbi töltést összekötő egyenes mentén mozgatunk.

(a) Mutassuk meg, hogy ha a q töltést egyensúlyi helyzetéből kissé (x távolságnyira, $x \ll d$) kimozdítjuk, akkor közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez.
(b) Számítsuk ki az ehhez a mozgáshoz rendelhető k „rugóállandót".

Megoldás: Legyen mindegyik töltés az x tengelyen! Ekkor a q töltés által érzékelt térerősség is x irányú. Mivel mindegyik töltés azonos előjelű a q töltésre a két Q töltéstől ható erők ellentétes irányúak:

$$F_{bal\,oldali\,Qtol} = K\frac{Qq}{r^2_{bal\,oldali\,Qtol}} F_{jobb\,oldaliQtol} = -K\frac{Qq}{r^2_{jobb\,oldaliQtol}} \tag{11.7.1}$$

q egyensúlyi helyzete a két $+Q$ töltés között éppen félúton van, ahol a két erő kiegyenlíti egymást. Térítsük ki a q töltést egyensúlyi helyzetétől pozitív irányba. Ekkor a rá ható erők eredője már nem lesz 0, hanem :

$$F = F_{bal\,oldali\,Qtol} + F_{jobb\,oldali\,Qtol} = K\left[\frac{Qq}{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2} - \frac{Qq}{\left(\frac{d}{2}-x\right)^2}\right]. \tag{11.7.2}$$

Ha $x \ll d$, akkor $x \ll \frac{d}{2}$ is igaz. Legyen $d = 2L$! Ekkor $\frac{d}{2} = L$ és a nevezők az előző képletben közelíthetőek a következő módon:

$$\frac{1}{(L\pm x)^2} = \frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1\pm\frac{x}{L}\right)^2} \approx \frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1\pm 2\frac{x}{L}\right)} \approx \frac{1}{L^2}\cdot\left(1\mp 2\frac{x}{L}\right). \tag{11.7.3}$$

Ez konkrét példákon is ellenőrizhető[1]. Tehát

$$F \approx \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2}\left((1-2\frac{x}{L})-(1+2\frac{x}{L})\right) = = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L^2}4\frac{x}{L} = = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{d^2}8\frac{x}{d}. \tag{11.7.5}$$

$$F = -\frac{8Qq}{\pi\varepsilon_0}\frac{x}{d^3}. \tag{11.7.6}$$

Mint látjuk, amennyiben a kitérés sokkal kisebb, mint d, az erő ellentétes irányú és arányos a kitéréssel vagyis valóban harmonikus rezgőmozgásról van szó amelynek "rugóállandója"

$$k = \frac{8Qq}{d^3\pi\varepsilon_0}. \tag{11.7.7}$$

[1]Egy példa: legyen $d = 10$, vagyis $L = 5$ és $x = 0,01$. Ekkor

$$\frac{1}{(L+x)^2} = 0,0398404\frac{1}{L^2}\cdot\frac{1}{\left(1+2\frac{x}{L}\right)} = 0,0398406\frac{1}{L^2}\cdot\left(1-2\frac{x}{L}\right) = 0,0398400. \tag{11.7.4}$$

11.8. Feladat: (HN 24C-27) Számítsuk ki azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy egy R sugarú gömb felszínére Q töltést juttassunk. A feltöltést végezzük úgy, hogy infinitezimális dq elemi töltést viszünk a végtelenből a gömb felszínére mindaddig, amíg a gömb töltése a Q-t el nem éri.

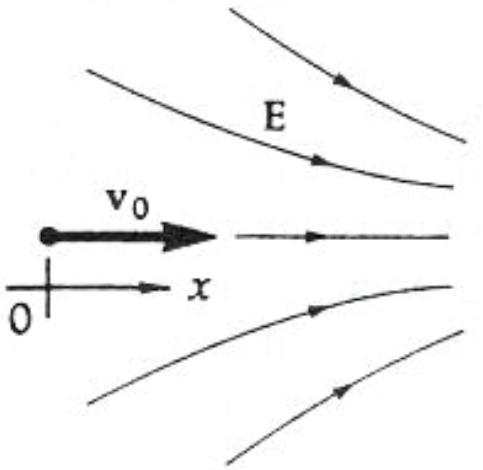
Megoldás: Tételezzük fel, hogy a gömbön már van q töltés. Ekkor a végtelenből további dq töltés viszünk a gömbre. Az eközben végzett munka

$$W(q \to q+dq) = -\int_{\infty}^{R} K\frac{q\mathrm{d}q}{r^2}dr = K\frac{q\mathrm{d}q}{r}. \tag{11.8.1}$$

A teljes feltöltéshez ezen munkákat kell összeadni:

$$W = \int_{0}^{Q} K\frac{q\mathrm{d}q}{r} = \frac{1}{2}K\frac{Q^2}{r}. \tag{11.8.2}$$

11.9. Feladat: (HN 24C-29) Miként az a 58. ábrán látható, egy elektron, amelynek az $x_o = 0$ helyen $v_o = 10^6\, m/s$ a kezdősebessége, az x tengely pozitív irányában halad olyan tértartományban, ahol az elektromos térerősséget az $E_x = (4V/m)\cdot(1+10^3 x)$ függvény adja meg (az x távolságot méterben kell megadni). Számítsuk ki azt a távolságot, ahol az elektron sebessége (legalábbis egy pillanatra) zérussá válik.



58. ábra. 24C-29 feladat

Megoldás: Az elektrosztatikus tér helytől függő potenciálja

$$\Phi(x) = -\int E(x)dx = -\int 4(1+10^3 x)\,dx = -4(x+500x^2). \tag{11.9.1}$$

Az elektron helyfüggő potenciális energiája ebben a térben (az elektron töltése negatív)

$$E_{pot} = -e\,\Phi(x) = 4\,e\,(x+500\,x^2). \tag{11.9.2}$$

Az elektron abban az x koordinátájú pontban áll meg amikor minden kinetikus energiáját elveszti. Az elektron potenciális energiájának megváltozása $\Delta x = x - x_o$ úton tehát egyenlő a kezdeti kinetikus energiájával:

$$\begin{aligned} \Delta E_{pot} &= E_{kin,kezdeti} \\ \Delta E_{pot} = E_{pot}(x) - E_{pot}(x_o) &= 4\,e\,(x+500\,x^2) - 0 \\ 4\,e\,(x+500\,x^2) &= \frac{1}{2}\,m\,v_o^2 \\ 500\,x^2 + x - \frac{1}{8}\,\frac{m}{e}\,10^{12} &= 0. \end{aligned} \tag{11.9.3}$$

A másodfokú egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{4}{8}\,\frac{m}{e}\,10^{12}\cdot 500}}{1000} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{2}\,\frac{m}{e}\,10^{12}\cdot 500}}{1000} \\ = \frac{-1 \pm \sqrt{1422,408}}{1000} &= \frac{-1 \pm 37,715}{1000} \\ x_+ &= 3,67 \cdot 10^{-2}\mathrm{m} \\ x_- &= -3,871 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{11.9.4}$$

A mi esetünkben csak a pozitív eredmény jöhet szóba.

11.10. Feladat: Egy dipól $-Q$ töltése a $(-\frac{l}{2},0)$ koordinátájú pontban, $+Q$ töltése a $(\frac{l}{2},0)$ koordinátájú pontban van. Mekkora az elektromos térerősségvektor
(a) az x tengelyen az origótól d távolságban, illetve
(b) az y tengelyen az origótól ugyancsak d távolságban?
(c) Minkét esetben vizsgáljuk meg azt, milyen közelítő végeredmény adható meg, ha $l << d$, azaz a dipóltól nagy távolságban adjuk meg a térerősséget?

Megoldás:
(a) A $-Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{-Q} = \left(-K\frac{Q}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}, 0 \right), \tag{11.10.1}$$

míg a $+Q$-tól származó

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(K\frac{Q}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2}, 0 \right). \tag{11.10.2}$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E} = \left(K\frac{Q}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2} - K\frac{Q}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}, 0 \right). \tag{11.10.3}$$

(b) A $-Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{-Q} = \left(-K\frac{Ql}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}}, -K\frac{Qd}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \tag{11.10.4}$$

A $+Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(-K\frac{Ql}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}}, K\frac{Qd}{2\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \tag{11.10.5}$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(-K\frac{Ql}{\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}}, 0 \right) \tag{11.10.6}$$

(c) Az (a) feladatrészben végezzük el az alábbi közelítéseket:

$$\frac{1}{(d-\frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(d-\frac{l}{2})^2} \sim \frac{1}{d^2}(1+\frac{l}{2d})^2 - \frac{1}{d^2}(1+\frac{l}{2d})^2 \sim \frac{1}{d^2}(1+\frac{l}{d}) - \frac{1}{d^2}(1-\frac{l}{d}) \sim \frac{2l}{d^3}. \tag{11.10.7}$$

Így a térerősség vektor:

$$\mathbf{E} = \left(K\frac{2Ql}{d^3}, 0 \right) \tag{11.10.8}$$

A (b) feladatrészben végezzük el azt közelítést, hogy $l << d$. Ekkor a nevezőbeli l-es tag a d-s tag mellett elhanyagolható, így

$$\frac{l}{\left(d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \sim \frac{l}{d^3}. \tag{11.10.9}$$

A térerősség vektor:

$$\mathbf{E} = \left(-K\frac{Ql}{d^3}, 0 \right). \tag{11.10.10}$$

11.11. Feladat: (HN 24C-31) Egy elektromos dipólus egymástól l távolságra lévő, m tömegű pontszerű töltésekből áll, melyek nagysága $+q$ és $-q$. A dipólust E homogén elektromos erőtérbe helyezünk úgy, hogy a minimális potenciális energiájú állapot közelében legyen.
(a) Mutassuk meg, hogy a dipólus rezgő-forgó mozgást végez a tömegközéppontja körül.
(b) Vezessünk le olyan összefüggést, amely (közelítőleg) megadja a rezgés T periódusidejét.

Megoldás:
(a) A dipólus töltéseire azonos nagyságú, ellentétes erő hat (erőpár). A dipólusra ható erők eredője zérus, így haladó mozgást nem fog végezni. A forgatónyomaték azonban nem zérus, így a dipólus a tömegközéppontja (a két töltés felezőpontja) körül forgómozgást végezhet. Attól függően hogy a dipólnak milyen a térbeli helyzete, azaz a $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ dipólmomentum vektor és a **pE** elektromos erőtér iránya a szögelfordulás az $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ vektorral párhuzamos és mind a **p** mind az **E** vektorra merőleges. Azt, hogy kis kitérések esetén harmonikus rezgőmozgást végez a dipól, az a következőkben látjuk be.
(b) A minimális potenciálú állapot akkor van, ha a **p** dipólmomentum vektor párhuzamos és azonos irányba mutat az **E** elektromos térerősség vektorral. (A dipólus potenciális energiája $U = -\mathbf{pE}$.) Ha ebből a helyzetből φ szöggel kitérítjük, akkor

$$M = -qlE \sin\varphi \tag{11.11.1}$$

nagyságú forgatónyomaték fog a dipólusra hatni. A dipólus tehetetlenségi nyomatékát θ-val jelölve a forgómozgás mozgásegyenlete

$$\theta\ddot{\varphi} = -qlE \sin\varphi. \tag{11.11.2}$$

Kis szögelfordulásokra szorítkozva ($\sin\varphi \sim \varphi$)

$$\theta\ddot{\varphi} = -qlE\varphi \tag{11.11.3}$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete[2]. Innen a rezgő-forgómozgás körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{qlE}{\theta}}. \tag{11.11.4}$$

Ha felhasználjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2, \tag{11.11.5}$$

[2]Csillapítás nélkül mindig rezgőmozgás alakul ki! Harmonikus rezgő-forgómozgás kis szögelfordulások esetén valósul meg.

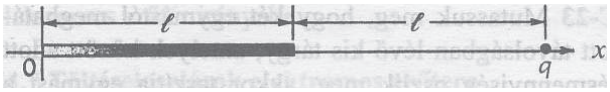
akkor

$$\omega = \sqrt{\frac{2qE}{ml}}. \tag{11.11.6}$$

A periódusidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}. \tag{11.11.7}$$

11.12. Feladat: (24C-34) Az x tengely mentén – a $(0, l)$ intervallumban – elhelyezkedő l hosszúságú, vékony, szigetelő rúdon a $\lambda(x)$ töltéssűrűség helyfüggését a $\lambda(x) = Ax$ összefüggés írja le. A rúd végétől l távolságra – az $x = 2l$ pontban – egy pontszerű q töltés helyezkedik el az x tengelyen (59 ábra).



59. ábra.

(a) Mi az A állandó SI mértékrendszerbeli egysége?
(b) Mekkora a töltés helyén az elektromos térerősség?

Megoldás:

(a) Az A mértékegysége $\mathrm{C/m^2}$.
(b) A x tengelyen az x pontban tekintsünk $\mathrm{d}q = \lambda(x)\mathrm{d}x$ töltést. Az ettől származó $\mathrm{d}E$ térerősség a $2l$ pontban

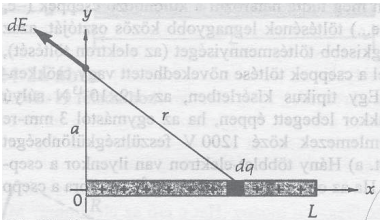
$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(x)\mathrm{d}x}{(2l-x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ax}{(2l-x)^2}\mathrm{d}x. \tag{11.12.1}$$

A teljes térerősség integrállal határozható meg:

$$E = \int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ax}{(2l-x)^2}\mathrm{d}x = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(1-\ln 2). \tag{11.12.2}$$

11.13. Feladat: (HN 24C-35) Tekintsünk az $x = 0$ és $x = L$ pontok között, az x tengely mentén egy λ pozitív lineáris (hosszegységenkénti) töltéssűrűséget (60 ábra).
(a) Számítsuk ki az **E** elektromos térerősség vektor y komponensét az $x = 0$, $y = a$ pontban;
(b) Számítsuk ki az **E** elektromos térerősség vektor x komponensét ugyanebben a pontban.

Megoldás:



60. ábra.

(a) Az elektromos térerősség y komponensét a következőképpen számoljuk ki. Az origótól x távolságban lévő dx hossztól származó dE elektromos térerősség nagysága a $(0, a)$ pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2+a^2}. \tag{11.13.1}$$

Az a és r által közbezárt szöget θ -val jelölve, a $d\mathbf{E}$ térerősség vektor y komponense

$$\mathrm{d}E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}. \tag{11.13.2}$$

A teljes E_y térerősség a

$$E_y = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\lambda \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{11.13.3}$$

integrállal számolható ki. A számolás végrehajtásához válasszuk a következő helyettesítést:

$$x = a\mathrm{tg}\theta, \tag{11.13.4}$$

amellyel

$$\mathrm{d}x = a\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{11.13.5}$$

Ezeket behelyettesítve, valamint a határokat illesztve a

$$E_y = \int_0^{\arcsin\frac{L}{(L^2+a^2)^{1/2}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\cos\theta\mathrm{d}\theta \tag{11.13.6}$$

integrálhoz jutunk. A számolást végrehajtva a térerősség y komponense

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda L}{a(L^2+a^2)^{1/2}}. \tag{11.13.7}$$

(b) A $d\mathbf{E}$ térerősség x komponense

$$\mathrm{d}E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}, \tag{11.13.8}$$

ahol a "-" előjel a koordinátarendszerbeli irányítást jelenti. Ezzel a teljes E_x komponens

$$E_x = -\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\lambda \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{11.13.9}$$

integrállal fejezhető ki. A számolás az előbbinél egyszerűbben elvégezhető

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\lambda}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda}{(L^2+a^2)^{1/2}}\right). \tag{11.13.10}$$

Tehát a térerősség vektor a $(0,a)$ pontban

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\left(\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda}{(L^2+a^2)^{1/2}}\right), \frac{\lambda L}{a(L^2+a^2)^{1/2}}\right). \tag{11.13.11}$$

11.14. Feladat: (HN 24C-36) Egy R sugarú körgyűrűn $+Q$ teljes töltés, a gyűrű középpontjában egy m tömegű, $-q$ negatív töltés van. Ha a $-q$ töltést a gyűrű tengelye mentén kissé kimozdítjuk, majd elengedjük, akkor a gyűrű tengelye mentén rezgőmozgást végez (feltéve, hogy a tengelyvonalból való kimozdulást valamilyen módon megakadályozzuk). Adjuk meg a rezgés f (közelítő) frekvenciáját.

Megoldás: A kör szimmetria tengelye legyen az x tengely, a kör középpontja az origó. Először a tengelyen az x pontban számoljuk ki a töltött körtől származó térerősséget. A kör kerületén vezessük be a $\lambda = \frac{Q}{2R\pi}$ töltéssűrűséget. A $\mathrm{d}\theta$ központi szögtől származó $\mathrm{d}E$ térerősség nagysága az x pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R \mathrm{d}\theta}{x^2+R^2}. \tag{11.14.1}$$

A tengely irányú $\mathrm{d}E_x$ vetület

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R \mathrm{d}\theta}{x^2+R^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}. \tag{11.14.2}$$

A szög szerint integrálva megkapjuk a teljes E_x térerősséget, amely

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}. \tag{11.14.3}$$

A $-q$ töltésre ható erő

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}. \tag{11.14.4}$$

Ha kis kitérésekre szorítkozunk, azaz $x << R$, úgy

$$(x^2+R^2)^{3/2} \sim R^3. \tag{11.14.5}$$

Ezzel

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}x. \tag{11.14.6}$$

A $-q$ töltés mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}x, \tag{11.14.7}$$

amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. A kialakuló rezgés frekvenciája:

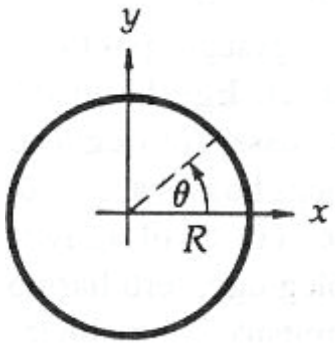
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}. \tag{11.14.8}$$

11.15. Feladat: (HN 24C-37) Egy vékony, nem vezető, R sugarú gyűrűn nem egyenletes a λ lineáris töltéssűrűség: $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$, ahol a θ szög a 61. ábra szerint értelmezendő.

(a) Vázoljuk a gyűrű töltéseloszlását.

(b) Milyen az E elektromos térerősség iránya a gyűrű középpontjában?

(c) Mutassuk meg, hogy az elektromos térerősség nagysága a gyűrű középpontjában $\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$.



61. ábra. 24-C37 feladat

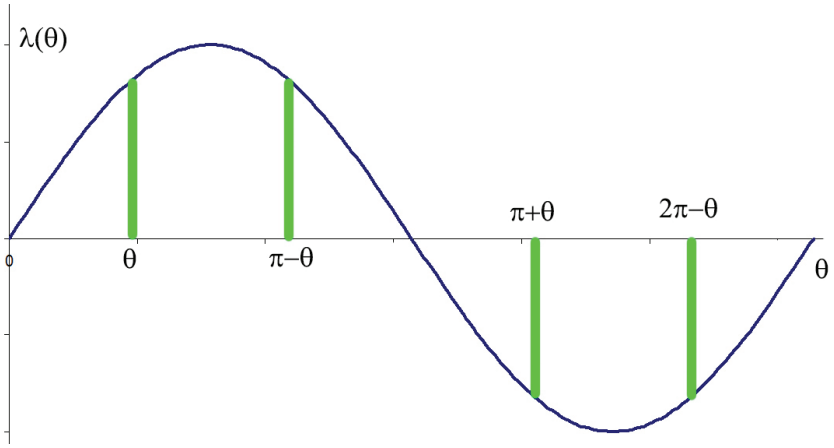
Megoldás:

(a) A töltéssűrűség a szög függvényében a 62. ábrán látható.

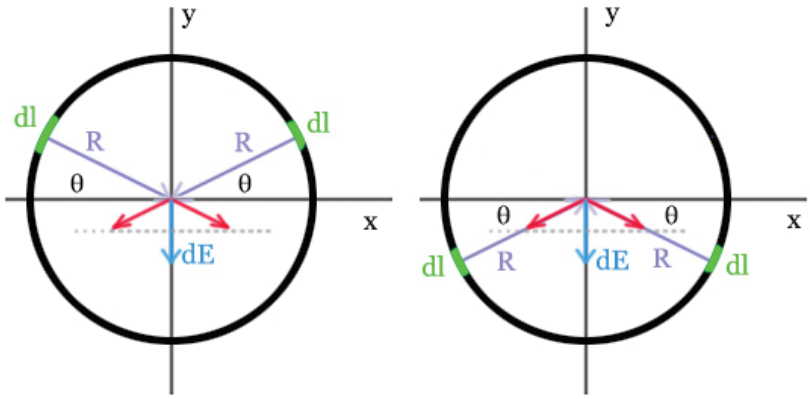
(b) Osszuk fel a kör kerületét infinitizemálisan kicsi dl szakaszokra. Egy tetszőleges θ szögnél elhelyezkedő szakasztól származó térerősség iránya vagy megegyezik a szakasztól a középpontig húzott vektor irányával ($0 \leq \theta \leq \pi$) vagy ellentétes vele ($0 \leq -\theta \leq \pi$). A teljes térerősség az egyes szakaszoktól származó térerősségek összege. A 63 ábrán látható, hogy az eredő térerősségben csak az egyes szakaszoktól származó térerősségek függőleges, -y irányú összetevője marad meg. Tehát az eredő térerősség a negatív y tengely irányába mutat.

(c) Ennek nagysága egy adott θ szög esetén

$$dE_y(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\theta)\,dl}{R^2}\sin\theta \tag{11.15.1}$$



62. ábra. Töltéssűrűség a szög függvényében. A zöld vonalak 4 olyan szöget jeleznek, ahol a töltéssűrűség abszolút értéke ugyanakkora



63. ábra. Különböző infinitezimális d*l* szakaszoktól származó térerősségek összegzése.

ahol $dl = R\,d\theta$. Szimmetria okok miatt $dE_y(\theta)$ ugyanakkora és ugyanolyan irányú a θ, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$ és $2\pi-\theta$ szögek esetén, ezért elegendő a $0\ldots\frac{\pi}{2}$ tartományra integrálni és az eredményt négyszerezni:

$$\begin{aligned} E_y &= 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(\theta)R}{R^2}sin\,\theta\,d\theta = \\ &= 4\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{\pi/2}sin^2\theta\,d\theta = \\ &= 4\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{\pi/2}\frac{1-cos\,2\theta}{2}d\theta = \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 R}\left[\theta-\frac{sin\,2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{\pi}{2}-0-0+0\right] \end{aligned} \tag{11.15.2}$$

ahol felhasználtuk a $sin^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$ összefüggést[3]. A végeredmény

$$E_y = \frac{\lambda_0}{4\,\varepsilon_0 R}. \tag{11.15.3}$$

11.16. Feladat: (HN 24C-39) Tekintsünk egy egyenletesen feltöltött R sugarú körgyűrűt, és annak tengelye mentén az elektromos teret. Mutassuk meg, hogy a térerősség maximuma $E_{x,max}$ a tengelyen, a gyűrű középpontjától $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ távolságban van. Vázoljuk E változását x függvényében (negatív és pozitív x értékekre).

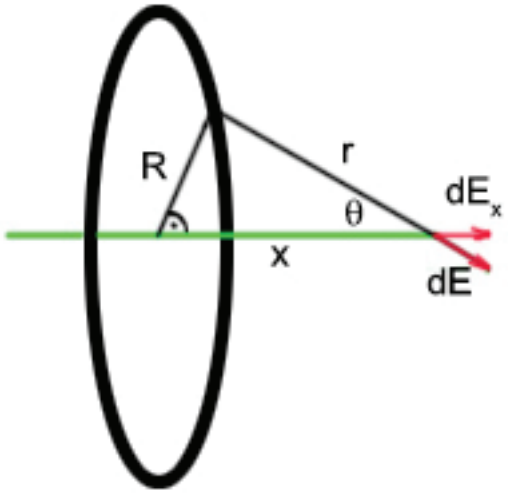
Megoldás: Bontsuk fel a körgyűrűt infinitezimálisan kis dl szakaszokra. A körgyűrű tengelyének minden pontja a körgyűrű összes pontjától - és így az összes szakasztól is - azonos távolságban van. A körgyűrű átellenes pontjaitól (szakaszaitól) származó térerősségek x tengelyre merőleges komponensei kiejtik egymást, ezért elegendő az E_x komponenseket összegezni. Egy dl szakasz térerőssége a 64 ábra szerint:

$$\begin{aligned} dE_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{r^2}cos\,\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\lambda\,dl}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{11.16.1}$$

A teljes térerősség

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2R\pi x\lambda}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \tag{11.16.2}$$

[3]Ezt levezethetjük a következő két egyenlőségből: $cos\,2\theta = cos^2\theta - \sin^2\theta$ és $cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



64. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött körgyűrű tengelyén

Ennek akkor van maximuma, ha a deriváltja nulla. Ha a derivált nulla, akkor a konstansok nem számítanak, ezért azokat el is hagyhatjuk

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = 0 \tag{11.16.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} &= \frac{(R^2+x^2)^{3/2} - x\frac{3}{2}(R^2+x^2)^{1/2}\,2x}{(R^2+x^2)^3} \\ &= \frac{(R^2+x^2)-3x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \tag{11.16.4}$$

A nevező sosem lehet nulla, ezért átszorozhatunk vele

$$R^2 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}. \tag{11.16.5}$$

Eszerint E_x szélsőértéke lehet az $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ helyen. Ez akkor valóban maximum ha a második derivált ezen a helyen negatív.

Gauss-törvény

11.17. Feladat: Egy R és egy $3R$ sugarú koncentrikus gömböt feltöltünk, a belsőt -Q, a külsőt 2Q töltéssel. Adja meg a térerősséget a hely (r) függvényében, és sematikusan ábrázolja is az egyes tartományokban:
(a) $0 < r < R$ esetén,
(b) $R < r < 3R$ esetén,
(c) $r > 3R$ esetén.

Megoldás:
(a) A $0 < r < R$ esetben a belső gömb belsejében nincs töltés, így a Gauss-törvény értelmében az elektromos térerősség nagysága

$$E(0 < r < R) = 0. \tag{11.17.1}$$

(b) A $R < r < 3R$ esetben a $-Q$ töltés hozza létre az elektromos térerősséget:

$$E4r^2\pi = \frac{-Q}{\varepsilon_0}, \tag{11.17.2}$$

azaz

$$E(R < r < 3R) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{11.17.3}$$

(c) Az $r > 3R$ esetben az r sugarú gömb $Q = 2Q - Q$ eredő töltést vesz körül. Így az elektromos térerősség:

$$E(3R < r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{11.17.4}$$

11.18. Feladat: (HN 25A-5) Két végtelen, szigetelő sík mindegyikén egyenletes σ töltéssűrűség van. A síkok egymással párhuzamosak. A szuperpozíciós elv használatával határozzuk meg a két sík közötti, illetve az azokon kívül lévő elektromos térerősséget.

Megoldás: A két sík egyike (1) legyen az origón átmenő y-z síkban, míg a másik (2) ezzel párhuzamos menjen át az x = +d ponton.

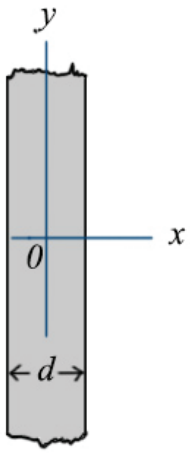
Az (1) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(-\infty, 0)$ tartományban, míg
$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(0, +\infty)$ tartományban.

Az (2) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(-\infty,+d)$ tartományban, míg
$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(+d,+\infty)$ tartományban.

A szuperpozíció elve miatt (a terek vektori módon adódnak össze) a kialakuló erőtér:
$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ a $(-\infty,0)$ tartományban,
0 a $(0,d)$ tartományban, és
$+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ a $(+d,+\infty)$ tartományban.

11.19. Feladat:

11.20. Feladat: (HN 25B-7) Egy d vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ és $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (65. ábra); az x tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez d szélességének a felénél legyen. Számitsuk ki az elektromos térerősség nagyságát x pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



65. ábra. A 25B-7 feladathoz

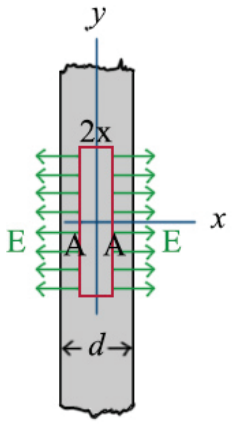
Megoldás: Az elektrosztatikus térerősség forrásai a töltések, ezért: 1) a szimmetria miatt a térerősségnek csak x komponense van, 2) pozitív töltéssűrűség esetén pozitív x-ekre pozitív, negatív x-ekre negatív irányú, emiatt 3) a lemez szélességének felező síkjában nulla.

A Gauss törvény szerint

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_0 E \text{ fluxusa egy zárt } A \text{ felületre} & = & \text{Az összes töltés a felületen belüli térfogatban} \\ \int\limits_A \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{A} & = & \int\limits_{V(A)} \rho\, dV \end{array} \tag{11.20.1}$$

Vegyünk fel a lemez belsejében egy olyan, $2x$ magasságú hengerszerű testet, pl. egyenes hasábot, amelynek két egymással és a lemez felületével párhuzamos A nagyságú felülete van és amely magasságát a lemez középpárhuzamos síkja felezi (ld. 66 ábra.) Erre felírva a (11.20.1)

66. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött szigetelő lemezben



Gauss törvényt és felhasználva, hogy a lemez belsejében ρ állandó, illetve $\mathbf{E}$ a hasáb mindkét A felületére merőleges és kifelé mutat, továbbá, hogy a hasáb oldallapjaival/palástjával $\mathbf{E}$ párhuzamos, tehát azokra fluxusa 0:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_0 E\, 2A & = & \rho \cdot A\, 2x \\ E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} x & & |x| \leq \dfrac{d}{2} \end{array} \tag{11.20.2}$$

A lemezen kívül ($|x| > d/2$) a térerősség állandó[4] és értéke (11.20.2) maximuma, azaz

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \tag{11.20.3}$$

Vegyük észre, hogy a lemezen kívűl a tér pontosan ugyanolyan, mint egy végtelen σ töltéssűrűségű 2D lemez esetén, mivel $\sigma = \rho d$.

[4]Ez szimmetria okokból is következik.

11.21. Feladat: (HN 25A-10) Tekintsünk egy l0 cm sugarú üreges fémgömböt, amelyen +10 μC töltés van. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer origójában. A gömb belsejében az $x = 5$ cm pontban legyen egy -3 μC nagyságú pontszerű töltés. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömbön kívül, az x tengely mentén. Vázoljuk fel az erővonalakat a gömbön kívül és azon belül.

Megoldás: X

11.22. Feladat: (HN 25B-12) Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van.
(a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk ki az $\mathbf{E}$ térerősséget a henger felszínétől R távolságban.
(b) Számítsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozogna.

Megoldás:
(a) Az, hogy a fémrúd nagyon hosszú azt jelenti, hogy (első közelítésben) végtelennek tekinthetjük. Szimmetria okokból a térerősség merőleges kell legyen az egyenletesen feltöltött henger felületére, ezért nagysága csak a távolságtól függ. A Gauss törvény használatához egy, a fémrúddal koaxiális henger alakú, r sugarú és l hosszúságú felületet vegyünk fel. Mivel a térerősség ennek a hengernek a palástjára mindenütt merőleges és állandó nagyságú a határoló körök síkjával pedig párhuzamos, erre a teljes zárt felületre vett fluxus megegyezik az r sugarú hengerpalástra vett fluxussal. Az ezen a felületen belüli összes töltés pedig a σ töltéssűrűség és a fémrúd l hosszúságú szakasza felületének szorzata. A Gauss törvény szerint tehát a térerősség a vezetőn kívül

$$\begin{aligned} \varepsilon_o 2r\pi l E &= 2R\pi l\sigma \\ E(r) &= \frac{R\sigma}{\varepsilon_o r} \end{aligned} \tag{11.22.1}$$

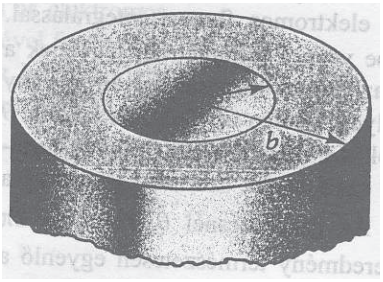
Innen a térerősség a fémrúdtól R távolságban ($r = 2R$)

$$E(R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \tag{11.22.2}$$

(b) Ha egy elektron kering ezen az $r = 2R$ sugarú körpályán, akkor

$$-eE = -\frac{m_e v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eER}{m_e}} = \sqrt{\frac{e\sigma R}{\varepsilon_o m_e}}. \tag{11.22.3}$$

11.23. Feladat: (HN 25C-15) A 67 ábrán illusztrált a belső és b külső sugarú, végtelen hosszú cső fala pozitív töltésű. A ϱ töltéssűrűség nem egyenletes: a és b között a tengelytől mért távolsággal fordított arányban változik, azaz ha $a \leq r \leq b$, $\varrho = k/r$, ahol k egy SI egységekben megadott konstans.



67. ábra.

(a) Mi a k mértékegysége?

(b) Számítsuk ki az L hosszúságú csődarab Q töltését.

(c) Gauss törvényét felhasználva, határozzuk meg az E elektromos térerősséget az r pontban ($a < r < b$).

Megoldás:

(a) A k mértékegysége $\mathrm{C/m^2}$.

(b) A L hosszúságú csődarab Q töltése

$$Q = \int_a^b \varrho(r) 2r\pi L \mathrm{d}r = \int_a^b 2k\pi L \mathrm{d}r = 2k\pi L(b-a). \tag{11.23.1}$$

(c) Az E elektromos térerősséget az r pontban a

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \varrho \mathrm{d}V \tag{11.23.2}$$

összefüggés alkalmazásával (Gauss-törvény) határozzuk meg. Ennek megfelelően

$$E 2r\pi L = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^r \varrho(r) 2r\pi L \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0} 2k\pi L(r-a). \tag{11.23.3}$$

Innen a térerősség ($a < r < b$) tartományban

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} k\left(1 - \frac{a}{r}\right). \tag{11.23.4}$$

Megjegyzés: További gyakorló feladat a csövön kívüli térerősség kiszámolása.

11.24. Feladat: (HN 25C-18) Egy R sugarú gömbben az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_o. Így, $E = E_o\hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárirányú egységvektor.
(a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltessűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint[5] ha $g(x) = \int_o^x f(t)dt$, akkor $\frac{dg}{dx} = f(x)$)
(b) A gömb középpontjával kapcsolatban mílyen nehézség adódik?

Megoldás: Legyen a gömbben a töltéssűrűség ρ. Mivel $\mathbf{E}$ $\mathbf{r}$ irányú a tér gömszimmetrikus, ezért ρ csak a távolságtól függ, az iránytól nem. $\rho = \rho(r)$. A (11.20.1) Gauss törvény alkalmazásához vegyünk fel egy r sugarú köncentrikus A gömbfelületet. Erre a felületre $\mathbf{E}$ mindenhol merőleges, így a Gauss törvény szerint

$$\varepsilon_o E(r) 4\pi r^2 = \int_{V(r')} \rho(r)\, dV' \tag{11.24.1}$$

A jobboldal integrál kiszámításához vegyük figyelembe, hogy $\rho = \rho(r)$ csak r nagyságától függ, ezért a térfogatra való integrálást elvégezhetjük úgy is, hogy térfogatelemeknek r' sugarú és dr' vastagságú gömbhéjakat választunk[6]. Egy ilyen gömbhéj dV' térfogata $dV' = 4\pi r'^2 dr'$, töltése $dQ = \rho(r')\, dV' = 4\pi\rho r'^2 dr'$, azaz a Gauss törvény szerint:

$$\varepsilon_o E(r) 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \tag{11.24.2}$$

$$\varepsilon_o E_o r^2 = \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \tag{11.24.3}$$

Az integrálszámítás alaptétele

$$\text{ha } g(r) = \int_0^r f(r')\, dr' \qquad \text{akkor} \tag{11.24.4}$$

$$f(r) = \frac{d\, g(r)}{d\, r} \tag{11.24.5}$$

[5] Az integrálási változó neve bármi lehet, amit nem keverhetünk össze az integrálás határával. Itt a t-t választottuk.

[6] Vagyis az A felület által határolt térfogatot felosztjuk koncentrikus, dr' vastag $dV'_G = dA' \cdot dr'$ $G(r')$ gömbhéjakra, amelyekben ρ jó közelítéssel állandó, tehát az integrál ezekre egyszerűen kiszámítható, majd az így kapott függvényt integráljuk 0 és R között:

$$\int_{V(r)} \rho(r')\, dV' = \int_0^r \int_{G(r')} \rho(r')\, dV'_G = \int_0^r \left(\rho(r') \int_{G(r')} dA'_G \right) dr'$$

$$= \int_0^r \left(\rho(r') 4\pi r'^2 \right) dr' = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr'$$

A mi esetünkben

$$f(r) \equiv \rho(r)r^2 \tag{11.24.6}$$

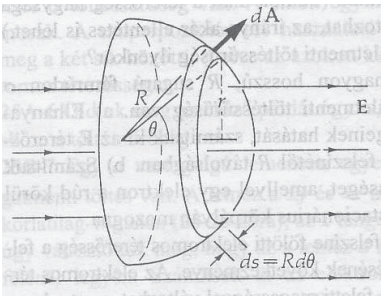
$$g(r) \equiv \varepsilon_o E_o r^2 \tag{11.24.7}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \rho(r)r^2 &= 2\varepsilon_o E_o r \\ \rho(r) &= 2\varepsilon_o E_o \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{11.24.8}$$

b) Látható, hogy ha $r \to 0$, akkor $\rho(r) \to \infty$.

11.25. Feladat: (HN 25C-19) Ahogyan a 68 ábrán látható, az **E** térerősségű homogén elektromos térbe úgy helyezünk egy R sugarú sík lappal zárt félgömböt, hogy az erővonalak e sík lapon merőlegesen haladjanak át. Számítsuk ki a görbült felületen a Φ elektromos fluxust integrálással. *Útmutatás:* Figyelembe véve a szimmetriát, legyenek a d**A** elemi felületek az ábrán illusztrált olyan vékony gyűrűk (sávok), amelyek mentén az **E** és d**A** közötti θ szög állandó. A sávok dA területe a $2\pi(Rsin\theta)$ hosszuk és a Rdθ szélességük szorzata. Ennélfogva $dA = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$. Az összegzésnél θ, zérus és $\pi/2$ között változik. Az eredmény természetesen egyenlő a sík lapon átmenő fluxussal, de ellentétes előjelű azaz $-ER^2\pi$. A teljes zárt felületen a fluxus zérus.



68. ábra.

Megoldás: Az elektromos tér fluxusának kiszámolásához a félgömbre szükségünk van a dA felületelemre:

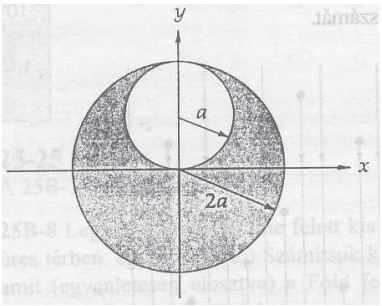
$$dA = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{11.25.1}$$

Figyelembe kell venni, hogy a dA iránya θ szöget zár be az E elektromos térrel, így a skaláris szorzás miatt megjelenik egy $\cos\theta$-val való szorzás. Az elektromos tér fluxusa a félgömbre:

$$\Phi_E = E \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta = ER^2\pi, \tag{11.25.2}$$

ahogy annak lennie is kell.

11.26. Feladat: (HN 25C-20) Szigetelő anyagból készült $2a$ sugarú gömbben az egyenletes térfogati töltéssűrűség ϱ. (Tételezzük fel, hogy a gömb anyagának nincs hatása a térerősség nagyságára.) A 69. ábrán látható helyen a gömbben a sugarú gömb alakú üreget képezünk. Mutassuk meg, hogy az üregben az elektromos térerősség homogén és nagysága, $E_x = 0$ és $E_y = \varrho a/(3\varepsilon_0)$.



69. ábra.

Megoldás: Tekintsünk az üregen (kis gömbön) belül egy P pontot, az egyszerűség kedvéért úgy, hogy helyvektorának x koordinátája pozitív legyen, valamint y koordinátája nagyobb legyen mint a, és a forgásszimmetria miatt z=0. Jelölje ekkor a nagyobb gömb középpontjából a P pontba húzott sugarat r, míg a kisebb gömb középpontjából r'. Ha r és r' a vízszintessel φ és α szöget zárnak be, akkor fenn állnak, hogy

$$r' \cos\alpha = r\cos\varphi, \tag{11.26.1}$$

illetve

$$r' \sin\alpha + a = r\sin\varphi. \tag{11.26.2}$$

E két összefüggésre szükségünk lesz. Az elektromos teret úgy számoljuk ki, hogy vesszük a $2a$ sugarú homogén gömb terét és ebből levonjuk az a sugarú üregét. A $2a$ sugarú – üreg nélküli – gömbben a térerősség a Gauss-törvény alapján

$$E 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\frac{4r^3\pi}{3}, \tag{11.26.3}$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r. \tag{11.26.4}$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r\cos\varphi, \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r\sin\varphi \right). \tag{11.26.5}$$

Az üreg miatt levonandó E' térerősség hasonlóképpen számítandó ki, csak figyelembe kell venni, hogy r' α szöget zár be a vízszintessel. Így az egyenletek:

$$E' 4r'^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\frac{4r'^3\pi}{3}, \tag{11.26.6}$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E' = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r'. \tag{11.26.7}$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E}' = \left(\frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r'\cos\alpha, \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r'\sin\alpha \right). \tag{11.26.8}$$

Figyelembe véve a (11.26.1) és (11.26.2) összefüggéseket az üregen belüli térerősség vektor

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}' = \left(0, \frac{\varrho a}{3\varepsilon_0} \right), \tag{11.26.9}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Az elektromos potenciál

11.27. Feladat: (HN 26A-l) Két egymással párhuzamos fémlemezt 12 voltos elem pólusaihoz csatlakoztatunk.
(a) Egy nyugalmi helyzetű elektront a negatív lemez mellett elengedünk. Mekkora sebessége lesz a pozitív lemezbe történő becsapódásakor?
(b) Számítsuk ki az elektron maximális kinetikus energiáját, és adjuk meg eV és joule egységekben is.
(c) Ha a lemezek távolsága 4 mm, mennyi ideig repült az elektron a lemezek között?
(d) Ha a lemezek távolsága ettől különböző lenne, változna-e az (a) és (b) kérdésekre adandó válasz?

Megoldás: X

11.28. Feladat: Tekintsünk három – A, B és C jelű – egymással párhuzamos végtelen, páronként d távolságban lévő síklemezt. Az A-n legyen 2σ, a B-n $-\sigma$ és a C-n 4σ felületi töltéssűrűség. Mekkora a lemezek közötti potenciálkülönbség?

Megoldás: A lemezek sorrendje A, B és C. A felületek normális mutasson az x tengely irányába. Az egyes lemezek által létrehozott elektromos térerősségek az irányokkal. Az A lemeztől: Mindkét lemez közötti tartományban

$$\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{11.28.1}$$

A B lemeztől: Az A-B tartományban

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \tag{11.28.2}$$

a B-C tartományban

$$\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{11.28.3}$$

A C lemeztől mindkét lemez közötti tartományban:

$$\frac{-4\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{-2\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{11.28.4}$$

A térerősség eredője az A-B lemezek között

$$E_{A-B} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}, \tag{11.28.5}$$

míg a B-C lemez között

$$E_{B-C} = \frac{-3\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{11.28.6}$$

A lemezek között munka:

$$W_{A-B} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} d \tag{11.28.7}$$

és

$$W_{B-C} = \frac{-3\sigma}{2\varepsilon_0} d. \tag{11.28.8}$$

Az A lemez legyen $U_A = 0$ potenciálú, így hozzá képest a B

$$U_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d \tag{11.28.9}$$

potenciálú, A-hoz képest C

$$U_C = \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0} d = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} d. \tag{11.28.10}$$

11.29. Feladat: Két proton egymástól d távolságban nyugalmi helyzetből indul. Mekkora lesz a protonok sebessége egymáshoz képest, ha már $3d$ távolságban repülnek? ($d = 100$ nm, a proton töltése $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, a proton tömeg $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $K = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2).,

Megoldás: A tömegközépponthoz képest mindkét proton v sebességgel repül. Az elektromos tér által végzett munka segítségével

$$K\frac{e^2}{d} - K\frac{e^2}{3d} = 2\frac{1}{2}mv^2. \tag{11.29.1}$$

Innen a protonok sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2Ke^2}{3md}}. \tag{11.29.2}$$

Az egymáshoz viszonyított sebesség $v_{rel} = 2v$.

11.30. Feladat: (HN 26B-5) Egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög minden egyes csúcsán $+q$ töltés van. Számítsuk ki a háromszög középpontja és az oldalak felezőpontja közötti ΔV feszültséget. A középpontban, vagy az oldalak közepén nagyobb a potenciál?

Megoldás: A csúcsok középponttól vett távolsága $a\frac{\sqrt{3}}{3}$, amellyel a középpontbeli U_c potenciál a végtelenhez képest:

$$U_c = 3\sqrt{3}K\frac{q}{a}. \tag{11.30.1}$$

Az oldalközép U_{ok} potenciálja – figyelembe véve, hogy a közelebbi két csúcstól $a/2$ távolságra van, a távolabbi harmadiktól $a\frac{\sqrt{3}}{2}$-re :

$$U_{ok} = (4 + \frac{2\sqrt{3}}{3})K\frac{q}{a}. \tag{11.30.2}$$

Mivel a $3\sqrt{3} > 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, így a háromszög középpontjában nagyobb a potenciál.

11.31. Feladat: Helyezzünk el egy, az origón átmenő (y-z) síkban egy egyenletes σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt, valamint egy ugyancsak origón átmenő (x-z) síkú $-\sigma$ töltéssűrűségű ugyancsak szigetelő lemezt.
(a) Mekkora az elektromos térerősség a $0 < x$ és $0 < y$ koordinátájú pontokban?
(b) Legyen az elektromos potenciál értéke az origóban zérus. Mekkora az elektromos potenciál az (a) kérdésbeli (x,y) pontokban?

Megoldás: A σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt vegyük közre két – az egyszerűség kedvéért –

azonos távolságú síkkal, majd metsszünk ki mindhárom síkon A felületeket úgy, hogy egymással fedésben legyenek. Ezt követően a Gauss-törvényt alkalmazzuk a térerősség nagyságának kiszámolására:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}, \tag{11.31.1}$$

azaz

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{11.31.2}$$

Így a σ töltéssűrűségtől származó térerősség vekor

$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0, 0\right). \tag{11.31.3}$$

Hasonló meggondolásokkal a $-\sigma$ töltéssűrűségtől származó térerősség vektor

$$\mathbf{E}_2 = \left(0, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0\right). \tag{11.31.4}$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0\right). \tag{11.31.5}$$

Látható, hogy ez egy helytől független homogén erőtér. Egyúttal megállapíthatjuk, hogy konzervatív is. Mivel tetszőleges úton integrálhatunk, így a potenciál

$$U(x,y) = -\int_0^x E_x dx - \int_0^y E_y dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-x+y). \tag{11.31.6}$$

11.32. Feladat: (HN 26B-9) A tér egy tartományában a *volt* egységekben kifejezett V potenciált a

$$V = (3\left[\frac{V}{m^2}\right])x^2 + (0,2\left[\frac{V}{m}\right])y$$

függvény adja meg, ahol x és y méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10$ cm, $y = 15$ cm koordinátájú helyen levő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

Megoldás: A potenciál és a térerősség közötti kapcsolat

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -grad V(\mathbf{r}) \\ E_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x},\ E_y &= -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{11.32.1}$$

Esetünkben $V(x,y,x) = V(x,y) = Ax^2 + By$

$$\begin{aligned} E_x &= -2Ax, \qquad E_y = -B, \qquad E_z = 0 \\ F_x &= 2eAx, \qquad F_y = eB \\ F &= e\sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = e\sqrt{4A^2x^2 + B^2} \end{aligned} \tag{11.32.2}$$

Az erő iránya az x tengellyel α szöget zár be, ahol $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{B}{2Ax}$, $B = 0,2\left[\frac{V}{m}\right]$, $A = 3\left[\frac{V}{m/2}\right]$ és $2Ax = 0.6\left[\frac{V}{m}\right]$ Behelyettesítve a számértékeket

$$\begin{aligned} F_x &= 6\cdot 0,1\cdot 1,6\cdot 10^{-19} = 9,6\cdot 10^{-20}\mathrm{N} \quad F_y = 0,2\cdot 1,6\cdot 10^{-19} = 3,2\cdot 10^{-20}\mathrm{N} \\ F &= \sqrt{9,6^2+3,2^2}\cdot 10^{-20} = 1,0119\cdot 10^{-19}\mathrm{N} \\ \mathrm{tg}\,\alpha &= 0,2/0,6 = 0.33 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18.4^o. \end{aligned} \tag{11.32.3}$$

11.33. Feladat: (HN 26B-12) Két egyforma kicsiny fémgömb töltése q_1 illetve q_2. Egymást 1 m távolságból $9\times 10^{-3}N$ erővel vonzzák. A gömböket összeérintjuk, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezzük el. Ekkor úgy találjuk, hogy $2\times 10^{-3}N$ erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

Megoldás: Összeérintés előtt a gömböknek különböző előjelű töltése volt ezért vonzották egymást. Összeérintés után a töltéseik kiegyenlítődtek és mindkettő töltése azonos előjelűvé és $q = \frac{q_1+q_2}{2}$ nagyságúvá vált, ezért taszítják egymást[7] Az egyenleteket felírva

$$\begin{aligned} |F_1| &= K\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9\,10^9\, q_1 q_2 = 9\,10^{-3}\ \mathrm{N} \\ |F_2| &= K\frac{q^2}{r^2} = 9\,10^9\, q^2 = 2\,10^{-3}\ \mathrm{N} \end{aligned} \tag{11.33.1}$$

innen, mivel vagy q_1, vagy q_2 negativ kell legyen

$$\begin{aligned} q_1\cdot q_2 = -9\cdot 10^{-3}/9\cdot 10^9 &= -10^{-12}\,C^2 \\ \left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2 = 2\cdot 10^{-3}/9\cdot 10^9 &= 2,22\cdot 10^{-13}\,C^2; \\ \frac{q_1+q_2}{2} &= \pm\sqrt{2,22\cdot 10^{-13}}\,\mathrm{C} \\ q_1+q_2 = \pm 2\cdot\sqrt{2,22\cdot 10^{-13}} &= \pm 9,4234\cdot 10^{-7}\,C \\ q_2 &= -10^{-12}\frac{1}{q_1} \\ q_1 - 10^{-12}\frac{1}{q_1} &= \pm 9,4234\cdot 10^{-7}\,C \\ q_1^2 \mp 9,4234\cdot 10^{-7}\cdot q_1 - 10^{-12} &= 0. \end{aligned} \tag{11.33.2, 11.33.3}$$

A két egyenletet felírva

$$q_1^2 - 9,4234\cdot 10^{-7}\cdot q_1 - 10^{-12} = 0 \tag{11.33.4}$$

$$q_1^2 + 9,4234\cdot 10^{-7}\cdot q_1 - 10^{-12} = 0. \tag{11.33.5}$$

[7] Ez arra utal, hogy kezdetben nem volt azonos nagyságú a töltésük.

Jelöljük a négyzetgyök előjelét felső indexben

$$q^{+}_{1,\pm} = \frac{9,4234\cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555\cdot 10^{-12}+4\cdot 10^{-12}}}{2} \tag{11.33.6}$$

$$= \frac{9,4234\cdot 10^{-7} \pm 2,7487\cdot 10^{-6}}{2} \tag{11.33.7}$$

$$q^{-}_{1,\pm} = \frac{-9,4234\cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555\cdot 10^{-12}+4\cdot 10^{-12}}}{2} \tag{11.33.8}$$

$$= \frac{-9,4234\cdot 10^{-7} \pm 2,7487\cdot 10^{-6}}{2} \tag{11.33.9}$$

$$q^{+}_{1} = \begin{cases} 1,5767\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \\ -6.3425\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \end{cases} \tag{11.33.10}$$

$$q^{+}_{2} = \begin{cases} -6.3425\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \\ 1,5767\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \end{cases} \tag{11.33.11}$$

$$q^{-}_{1} = \begin{cases} -1,5767\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \\ 6.3425\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \end{cases} \tag{11.33.12}$$

$$q^{-}_{2} = \begin{cases} 6.3425\cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \\ -1,5767\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}. \end{cases} \tag{11.33.13}$$

Innen látható, hogy elég lett volna a négyzetgyökvonásnál a pozitív előjelet használni amivel megkaptuk volna a az első két megoldást, majd utána felcserélni az előjeleket a második két megoldáshoz. Visszahelyettesítve pl. ez első két megoldást és elhagyva a felső indexet

$$K\frac{q_1\cdot q_2}{r^2} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{1,5767\cdot 10^{-6}\cdot 0,63425\cdot 10^{-6}}{1} = 9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}, \tag{11.33.14}$$

$$K\frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{r^2} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{\left(1,5767\cdot 10^{-6}+0,63425\cdot 10^{-6}\right)^2}{4} = 2.00\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}. \tag{11.33.15}$$

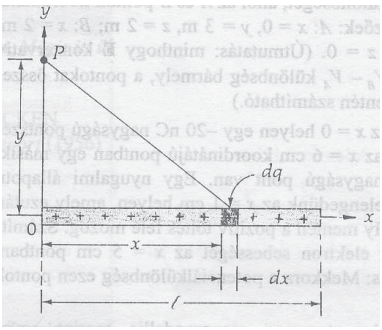
11.34. Feladat: (HN 26C-15) Egy l hosszúságú, vékony szigetelő rúdon egyenletesen elosztva Q töltés van. Számítsuk ki a Velektromos potenciált a rúd végétől y távolságban, a 70 ábrán vázolt helyen lévő P pontban.

Megoldás: Az ábrán látható dq töltés

$$\mathrm{d}q = \frac{Q}{l}\mathrm{d}x. \tag{11.34.1}$$

Az ettől származó potenciál

$$\mathrm{d}U_p = \frac{KQ}{l}\frac{\mathrm{d}x}{r}, \tag{11.34.2}$$



70. ábra.

ahol $r=\sqrt{x^2+y^2}$. A teljes hosszhoz tartozó potenciál

$$U_p=\int_0^l \frac{KQ}{l}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{KQ}{l}\ln\left[x+\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^l=\frac{KQ}{l}\ln\frac{l+\sqrt{l^2+y^2}}{y}. \tag{11.34.3}$$

11.35. Feladat: (HN 26C-17) Egy R sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a középponttól való r távolsággal arányos, azaz $\varrho(r)=Ar$, ha $(0<r<R)$, ahol A egy állandó.
(a) Mi A SI egysége?
(b) Mekkora a gömb teljes Q töltése A-val és R-rel kifejezve?
(c) Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsejében és kívül, a középponttól r távolságra az E térerősséget.
(d) Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is. (Legyen $V=0$ a végtelenben.)

Megoldás:
(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^4.
(b) A gömb teljes töltése:

$$Q=\int_0^R \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r=\int_0^R A4r^3\pi\mathrm{d}r=AR^4\pi. \tag{11.35.1}$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11.35.2}$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r=\frac{1}{\varepsilon_0}Ar^4\pi, \tag{11.35.3}$$

amelyből

$$E = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \quad (0 < r < R). \tag{11.35.4}$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} AR^4\pi \tag{11.35.5}$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad (R < r). \tag{11.35.6}$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} \tag{11.35.7}$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r-beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad (R < r). \tag{11.35.8}$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} \quad (r = R). \tag{11.35.9}$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = -\int_{R}^{r} \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{A}{12\varepsilon_0}\left[r^3\right]_{R}^{r} = -\frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3. \tag{11.35.10}$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3 = -\frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{3\varepsilon_0} R^3 \quad (0 < r < R). \tag{11.35.11}$$

11.36. Feladat: (HN 26C-18) Számoljuk ki az előző feladatot $\varrho = Ar^2$ töltéseloszlást feltételezve.

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^5.

(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \varrho(r) 4r^2\pi \mathrm{d}r = \int_0^R A 4r^4\pi \mathrm{d}r = \frac{4}{5} AR^5\pi. \tag{11.36.1}$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{11.36.2}$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{5}Ar^5\pi, \tag{11.36.3}$$

amelyből

$$E = \frac{A}{5\varepsilon_0}r^3 \quad (0 < r < R). \tag{11.36.4}$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{5}AR^5\pi \tag{11.36.5}$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad (R < r). \tag{11.36.6}$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = -\int_\infty^r \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r \tag{11.36.7}$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r-beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad (R < r). \tag{11.36.8}$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} \quad (r = R). \tag{11.36.9}$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = -\int_\infty^R \frac{A}{5\varepsilon_0}r^3\mathrm{d}r = -\frac{A}{20\varepsilon_0}\left[r^4\right]_R^r = -\frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0}R^4. \tag{11.36.10}$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} - \frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0}R^4 = -\frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{4\varepsilon_0}R^4 \quad (0 < r < R). \tag{11.36.11}$$

Kondenzátorok

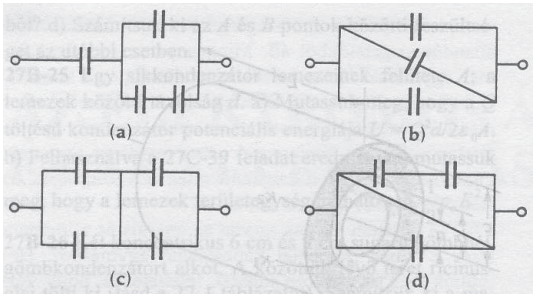
11.37. Feladat: (HN 27A-l) Két, egymástól 1 mm-re lévő, 1 cm^2 felületű, egymással párhuzamos lemez által alkotott kondenzátor kapacitása kb. 1 pF. Számítsuk ki a kapacitás pontos értékét.

Megoldás: Adatok: $d = 1$ mm; $A = 1$ cm^2. A kondenzátor kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-13}\text{F}, \tag{11.37.1}$$

amely hozzávetőlegesen 1 pF.

11.38. Feladat: (HN 27A-3) Határozzuk meg a 71 ábra áramköreinek eredő kapacitását. Minden kondenzátor C kapacitású.



71. ábra.

Megoldás: Az eredő kapacitás különböző esetekben:

(a)

$$C_e = \frac{3}{5}C; \tag{11.38.1}$$

(b)

$$C_e = 3C; \tag{11.38.2}$$

(c)

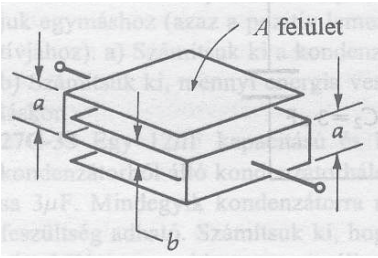
$$C_e = C; \tag{11.38.3}$$

(d)

$$C_e = 0, \tag{11.38.4}$$

mert a kondenzátorok rövidre vannak zárva.

11.39. Feladat: (HN 27B-7) Számítsuk ki a 72 ábrán látható kondenzátor kapacitását. Hanyagoljuk el a lemezek szélein az erőtér inhomogenitásának a hatását. Indokoljuk meg a számítás egyes lépéseit.



72. ábra.

Megoldás: Jelölések: Jelöljük a lemezeket felülről 1, 2, 3 és 4 számokkal, az 1-2 közötti térrészt (1)-gyel, a 2-3 közötti térrészt (2)-vel és a 3-4 közötti térrészt (3)-mal. Az ábra szerint az (1) térrész $a-b$ szélességű, a (2) b szélességű, a (3) $a-b$ szélességű. Mindegyik lemez A felületű, a végek hatásától eltekintünk. Legyen az 1 és 3 lemez zérus, a 2 és 4 lemez U_0 potenciálon. Ekkor a térerősség vektor nagysága és iránya az
(1) térrészben

$$E_{(1)} = \frac{U_0}{a-b} \tag{11.39.1}$$

és a 2 lemeztől az 1 felé mutat;
(2) térrészben

$$E_{(2)} = \frac{U_0}{b} \tag{11.39.2}$$

és a 2 lemeztől az 3 felé mutat;
(3) térrészben

$$E_{(3)} = \frac{U_0}{a-b} \tag{11.39.3}$$

és a 4 lemeztől az 3 felé mutat.
Gauss törvényét alkalmazva az egyes lemezeken lévő töltések:

$$Q_1 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}; \tag{11.39.4}$$

$$Q_2 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} + \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \tag{11.39.5}$$

$$Q_3 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} - \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \tag{11.39.6}$$

$$Q_4 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}. \tag{11.39.7}$$

Természetes teljesül, hogy

$$|Q_1 + Q_3| = Q_2 + Q_4. \tag{11.39.8}$$

A kondenzátor töltése tehát

$$Q = Q_2 + Q_4 = \varepsilon_0 A \left(2\frac{U_0}{a-b} + \frac{U_0}{b} \right), \tag{11.39.9}$$

amellyel az eredő kapacitás

$$C_e = \frac{Q}{U_0} = \varepsilon_0 A \left(\frac{2}{a-b} + \frac{1}{b} \right) = \varepsilon_0 A \frac{a+b}{(a-b)b}. \tag{11.39.10}$$

11.40. Feladat: (HN 27B-8) A 2 μF és 3 μF kapacitású kondenzátorra egyenként U_{max} maximális feszültség adható. Ha e két kondenzátort sorba kapcsoljuk, a két végpont közötti maximális feszültség 800 V. Mekkora V_{max}?

Megoldás: Adatok: $C_1 = 2\mu$F, $C_2 = 3\mu$F, $U = 800$ V.
A két kondenzátor eredő kapacitása

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1,2\mu\text{F}. \tag{11.40.1}$$

A kondenzátorokon lévő töltés egyaránt

$$Q = C_e U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 9,6 \cdot 10^{-4}\text{C}. \tag{11.40.2}$$

A kondenzátorokra eső feszültség

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = 480\text{V} \tag{11.40.3}$$

és

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = 320\text{V}. \tag{11.40.4}$$

Így értelemszerűen $U_{max} = 480$ V.

11.41. Feladat: (HN 27B-9) A gömbkondenzátor kapacitása

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a},$$

ahol a és b a belső, illetve külső gömb sugara. Ha mind a, mind b nagyon naggyá válik, (de különbségük továbbra is kicsiny) egy kis tartományban a felületek párhuzamos síkokkal közelíthetők. Mutassuk meg, hogy a fenti összefüggés a síkkondenzátor kapacitását megadó képletté egyszerűsödik.

Megoldás: A $b-a$ különbség a két fegyverzet közötti d távolság. Ha $a \sim b$, akkor a $4\pi ab = 4\pi a^2$ a fegyverzet A felülete. Ezek behelyettesítésével:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}, \tag{11.41.1}$$

amely a síkkondenzátor kapacitása.

11.42. Feladat: (HN 27A-12) Becsüljük meg azt a legnagyobb potenciált, amelyre egy 10 cm átmérőjű fémgömböt fel lehet tölteni, anélkül, hogy a térerősség értéke meghaladná a környező száraz levegő dielektromos átütési szilárdságát.

Megoldás: A feltöltött R sugarú fémgömb felületén a térerősség és a potenciál pontosan akkora, mintha a teljes töltése a középpontjában lenne:

$$E(R) = K\frac{Q}{R^2} \tag{11.42.1}$$

$$|\Phi(R)| = K\frac{Q}{R} = E(R)\cdot R \tag{11.42.2}$$

A száraz levegő dielektromos átütési szilárdsága $E_0 = 3\,10^6 \frac{V}{m}$. Innen $|\Phi(R)| = E_0 \cdot R = 3 \cdot 10^6 \cdot 0,05 = 1,5 \cdot 10^5 V$.

11.43. Feladat: (HN 27B-20) Egy 0,1 μF kapacitású síkkondenzátor lemezei 0,75 m^2 területűek, a szigetelő réteg dielektromos állandója 2,5. A kondenzátort 600 V-os feszültségre töltjük fel.

(a) Számítsuk ki a lemezek töltését.

(b) Számítsuk ki a szigetelő réteg felületén indukált töltéssűrűséget.

(c) Számítsuk ki a szigetelő rétegben az elektromos térerősséget.

Megoldás: Adatok: C = 0,1 μF; A = 0,75 m^2; ε_r = 2,5; U = 600 V.
(a) A kondenzátor töltése

$$Q = CU = 6 \cdot 10^{-5} C. \tag{11.43.1}$$

(b) A σ szabad töltések sűrűsége:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 8 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}, \tag{11.43.2}$$

a σ töltéssűrűség által létrehozott elektromos térerősség

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{11.43.3}$$

Jelölje σ' az indukált töltéssűrűséget. Az ezáltal keletkezett – az őt létrehozó térrel ellentétes – elektromos tér

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \tag{11.43.4}$$

E kettő összege adja a dielektrikumbeli teret, amellyel a

$$E + E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = E_r \tag{11.43.5}$$

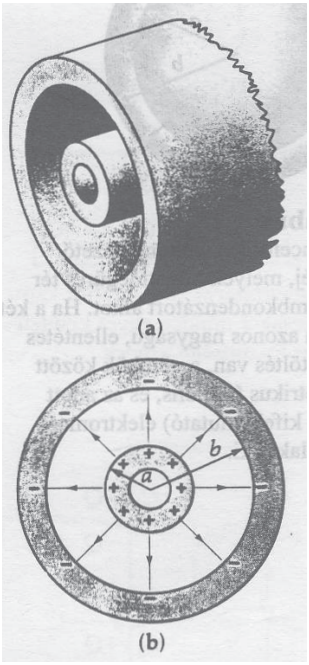
egyenlet írható fel. Ebből az indukált töltéssűrűség

$$\sigma' = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \sigma = -4,8 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}. \tag{11.43.6}$$

(c) A lemezek közötti térerősség

$$E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 3,614 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \tag{11.43.7}$$

11.44. Feladat: (HN 27-3p) A hengerkondenzátor két koaxiális vezető hengerből áll (ld. 73 ábra). A belső hengeres vezető külső sugara a, a külső vezető belső sugara b. Tételezzük fel, hogy a vezetők L hossza nagyon nagy a sugarakhoz képest , igy a végeken történő szórt tér hatása elhanyagolható. Legyen a belső hengeres vezetőn $+\sigma$ töltéssűrűség. A Gauss-törvény segítségével határozzuk meg a
(a) a kondenzátoron belüli elektromos térerősséget, ha vákuum tölti ki a teret, illetve ha ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő,



73. ábra. A 27-3p feladathoz

(b) a kondenzátor fegyverzetei közötti elektromos feszültséget,
(c) a kondenzátor kapacitását.

Megoldás:
(a) Tekintsünk az a és b sugarak közötti r sugarú koncentrikus kört és ezen számoljuk ki a térerősséget. A Gauss-törvény alakja vákuum esetén

$$\int_A \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_A \sigma \mathrm{d}A, \tag{11.44.1}$$

amely a mostani feladatban az

$$E(r)\cdot 2r\pi L = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\cdot 2a\pi L \tag{11.44.2}$$

alakban írható. A jobboldalon lévő

$$Q = \sigma\cdot 2a\pi L \tag{11.44.3}$$

a hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés. Behelyettesítés után elektromos térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a}{r}. \tag{11.44.4}$$

Az ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő ϵ_r arányban csökkenti az eredő elektromos teret (elektromos feszültséget). Ebben az esetben a szigetelőbeli térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{a}{r}. \tag{11.44.5}$$

(b) Az a és b hengeres vezetők közötti elektromos potenciálkülönbség rögtön a szigetelővel kitöltött tartományra

$$U = U_a - U_b = -\int_b^a E(r)\mathrm{d}r = -\int_b^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{a}{r}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} a \ln\frac{b}{a}. \tag{11.44.6}$$

(c) A hengerkondenzátor kapacitását a

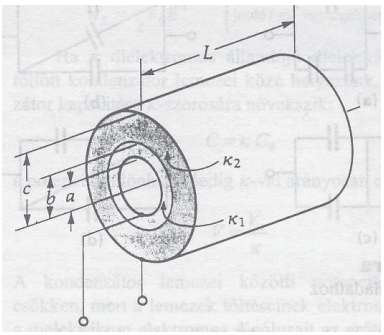
$$Q = CU \tag{11.44.7}$$

összefüggés segítségével számolhatjuak ki. Behelyettesítés után a

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{b}{a}} \tag{11.44.8}$$

kapacitás adódik.

11.45. Feladat: (HN 27B-21) Tekintsünk egy hengeres kondenzátort, melyben a belső és külső hengerek között két réteg szigetelő anyag van (lásd 74 ábra). Elhanyagolva a szélek hatását, határozzuk meg, hogy C kapacitása miként függ az ábrán megadott paraméterektől.



74. ábra.

Megoldás: A megoldás során használjuk fel az előző feladatban kapott eredményeket. (Az 74 ábra adatait jelöljük át: $\kappa_1 = \varepsilon_1$ ill. $\kappa_2 = \varepsilon_2$.) Az elektromos tér eredője az egyes tartományokban

$$E_1(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{a}{r} \quad (a < r < b), \tag{11.45.1}$$

illetve

$$E_2(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{a}{r} \quad (b < r < c). \tag{11.45.2}$$

A potenciálkülönbség a fegyverzetek között

$$U = U_a - U_c = (U_a - U_b) + (U_b - U_c) = -\int_b^a E_1(r)\mathrm{d}r - \int_c^b E_2(r)\mathrm{d}r$$

$$= -\int_b^a \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{a}{r}\mathrm{d}r - \int_c^b \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{a}{r}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1}a\ln\frac{b}{a} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2}a\ln\frac{c}{b}. \tag{11.45.3}$$

A hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés

$$Q = \sigma \cdot 2a\pi L. \tag{11.45.4}$$

A kifejezéseket összevetve kondenzátor kapacitására

$$C = 2\pi\varepsilon_0 L \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\ln\frac{c}{b} + \varepsilon_2\ln\frac{b}{a}}. \tag{11.45.5}$$

11.46. Feladat: (HN 27B-27) A lemezei között polisztirol réteget tartalmazó síkkondenzátor kapacitása 10 nF. A kondenzátort egy 100 V-os feszültségű telephez kapcsoljuk, és a szigetelő réteget eltávolítjuk a lemezek közül. Számítsuk ki

(a) valamelyik lemezen a töltésváltozást;

(b) a tárolt energia változását,

(c) a szigetelő réteg eltávolításához szükséges munkát.

Megoldás: Adatok: C = 10 nF; U = 100 V. Táblázatból kikeresve a polisztirol dielektromos állandója $\varepsilon_r = 2,5$.

(a) A kondenzátor kezdeti töltése.

$$Q = CU = 10^{-6}\mathrm{C} = 1000\mathrm{nC}. \tag{11.46.1}$$

A polisztirol réteg kihúzása után a kondenzátor kapacitása 1/2,5-öd részére csökken:

$$Q' = \frac{1}{\varepsilon_r}Q = 400\mathrm{nC}, \tag{11.46.2}$$

így töltés lesz a kondenzátoron. A változás:

$$\Delta Q = Q' - Q = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)CU = -600\mathrm{nC}. \tag{11.46.3}$$

(b) A tárolt energia változása:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{C}{\varepsilon_r}U^2}_{E_2} - \underbrace{\frac{1}{2}CU^2}_{E_1} = -3\cdot 10^{-5}\mathrm{J}. \tag{11.46.4}$$

(c) A polisztirol lap kihúzása során egyrészt van egy W végzett munka és a töltésváltozással kapcsolatos munkája a telepnek. Ez utóbbi:

$$\Delta Q \cdot U = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) CU = 2\Delta E. \tag{11.46.5}$$

A felírható egyenlet

$$E_1 + W + \Delta Q \cdot U = E_2 \tag{11.46.6}$$

alakú, amelyből a végzett munka

$$W = E_2 - E_1 - \Delta Q \cdot U = -\Delta E. \tag{11.46.7}$$

Így a végzett munka

$$W = 3 \cdot 10^{-5}\mathrm{J}. \tag{11.46.8}$$

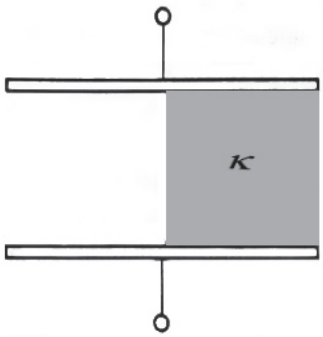
11.47. Feladat: Egy síkkondenzátor lemezeinek területe 200 cm^2, a lemezek távolsága 0,1 cm. A fegyverzetek között üveglemez van ($\varepsilon_r = 5$), amely teljesen betölti a kondenzátor lemezei közötti térrészt.
(a) Számítsa ki a kondenzátor kapacitását!
(b) Hogyan változik meg a kondenzátor energiája, ha az üveget eltávolítjuk? A kondenzátor az egész idő alatt egy 300 V elektromotoros erejű telephez van kapcsolva.
(c) Mekkora az elektromos erőtér energia sűrűsége az üveg eltávolítása után?

Megoldás: X

11.48. Feladat: (HN 27C-33) Egy 12 μF kapacitású és két 2 μF kapacitású kondenzátorból á11ó kondenzátorhálózat eredő kapacitása 3 μF. Mindegyik kondenzátorra maximálisan 200 V feszültség adható. Számítsuk ki, hogy az adott kondenzátorhálózatra mekkora maximális feszültség kapcsolható.

Megoldás: Elsőként azt kell kitalálni, hogy miként jöhet ki a 3 μF eredő kapacitás egy 12 μF kapacitású és két 2 μF kapacitású kondenzátorból. Némi próbálgatás után belátható, hogy a két 2 μF-os egymással párhuzamosan, míg a 12 μF-os ezekkel sorba van kötve. Felhasználjuk, hogy Q töltés van mind a 12 μF-os kondenzátoron, mind az egymással párhuzamosan kapcsolt két 2 μF-os kondenzátoron összesen. Ha a 2 μF-os kondenzátorokra a maximális 200 V feszültséget kapcsolunk, akkor a 12 μF-os kondenzátoron 66,7 V feszültség esik. Így a kondenzátorrendszerre 266,7 V kapcsolható.

11.49. Feladat: (HN 27C-36) Egy κ dielektromos állandójú szigetelő réteg egy sikkondenzátor lemezei közötti teret a 75 ábrán vázolt módon csak félig tölt ki. Adjuk meg, hogy a teljes energia hányadrésze tárolódik a szigetelő rétegben.



75. ábra. 27C-36 feladathoz

Megoldás: Két megoldást is adunk:
1) Ez az elrendezés két párhuzamosan kapcsolt kondenzátornak felel meg. Ezek kapacitásai:

$$C_1 = \varepsilon_o \frac{A}{2d}, \qquad C_2 = \kappa\varepsilon_o \frac{A}{2d},$$

ahol A a kondenzátor lemezeinek felülete és d a lemezek távolsága. Így

$$C_2 = \kappa C_1$$

A kondenzátorok párhuzamosan vannak kapcsolva ezért a rajtuk levő feszültség ugyanakkora, a bennük tárolt energia pedig

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2, \text{ ill. } \quad \frac{1}{2} C_2 U^2$$

Az összenergia e két energia összege, ezért a szigetelőt tartalmazó kondenzátor energiájának (a szigetelőben tárolt energiának) γ aránya az összenergiához képest:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{1}{2} C_2 U^2}{\frac{1}{2} C_1 U^2 + \frac{1}{2} C_2 U^2} \\ &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \end{aligned} \tag{11.49.1}$$

2) Az elektrosztatikus térben tárolt energia sűrűségét az

$$w = \frac{1}{2} \kappa\varepsilon_0 E^2$$

képlet adja meg. Az ábra szerinti elrendezésben az elektródák ekvipotenciális felületek, a töltéssűrűség konstans. A térerősség merőleges a kondenzátor lemezeire és párhuzamos a betolt szigetelő hasáb oldalával, ezért az anyagban és a vákuumban ugyanakkora. Tehát az egyes tartományokban az energiasűrűség:

$$w_v = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$w_a = \frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0 E^2 = \kappa w_v$$

Mivel a kondenzátor lemezek közötti tér fele van anyaggal kitöltve a tárolt energiák aránya megegyezik az energiasűrűségek arányával, tehát

$$\gamma = \frac{w_a}{w_a + w_v} = \frac{\kappa}{1+\kappa}. \tag{11.49.2}$$

11.50. Feladat: (HN 27C-41) Töltsük fel a sorba kapcsolt a C_1 és C_2 kondenzátort. Ezután a két kondenzátort először a felöltő feszültségforrástól, majd egymástól elválasztva, ellentétes polaritással párhuzamosan kapcsoljuk. Mutassuk meg, hogy a párhuzamos kapcsolás következtében a kezdetben tárolt energia $(C_1-C_2)^2/(C_1+C_2)^2$ hányada "veszett" el.

Megoldás: X

12. Feladatok az elektromos áram tanából

Az elektromos áram

12.1. Feladat: (HN 28B-3) Egy 2 mm-es átmérőjű ezüst huzalon 2 óra 15 perc alatt 420 C töltés halad át.
(a) Atomonként egy vezetési elektront feltételezve, számítsuk ki a szabad töltések számát az ezüstben (l/m^3 egységekben);
(b) Mekkora a huzalban folyó áram erőssége?
(c) Számítsuk ki az elektronok átlagos vándorlási sebességét.

Megoldás: Adatok: $d = 2$ mm; $r = 1$ mm; $t = 2$ óra 15 perc = 8100 s; $Q = 420$ C. Táblázatból: sűrűsége $\varrho = 10500$ kg/m^3. Az ezüst atomtömege 108, azaz $M = 108$ g/mol; az Avogadro szám $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/mol.
(a) A térfogategységben található ezüst atomok száma

$$n = \frac{\varrho}{M} N_A = 5,83 \cdot 10^{28}\, l/m^3, \tag{12.1.1}$$

amely megegyezik az elektronok számával.
(b) Az áramerősség

$$I = \frac{Q}{t} = 0,052\,\mathrm{A}. \tag{12.1.2}$$

(c) Az j áramsűrűség

$$j = \frac{I}{A} = nev, \tag{12.1.3}$$

ahol $A = r^2\pi$ a keresztmetszet, v a keresett vándorlási sebesség. Innen

$$v = \frac{I}{Ane} = 1,77 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s}. \tag{12.1.4}$$

12.2. Feladat: (HN 28B-4) Van de Graaf generátor mozgó szíja 30 cm széles és 20 m/s sebességgel halad. A szállított töltések a szíj egyik oldalán egyenletesen oszlanak el, a nagy potenciálú gömbre szállított töltések áramerőssége 0,15 μA. Számítsuk ki a szíj felületi töltéssűrűségét.

Megoldás: Adatok: $L = 30$ cm; $v = 20$ m/s; $I = 0,15$ μA.
A szíj Δt idő alatt

$$\Delta Q = \sigma L v \Delta t \tag{12.2.1}$$

töltést szállít. Az áram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma L v, \tag{12.2.2}$$

amelyből a felületi töltéssűrűség

$$\sigma = \frac{I}{Lv} = 2,5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}. \tag{12.2.3}$$

12.3. Feladat: (HN 28A-15) Televíziók képcsövében az elektronágyúból származó elektronok 25 kV-os potenciálkülönbség hatására a képernyő felé gyorsulnak.
(a) Hány watt teljesitmény disszipálódik a képernyőn, ha az elektronnyaláb átlagos áramerőssége 0,21 mA?
(b) Hány elektron csapódik a képernyőbe másodpercenként?

Megoldás:
(a) A disszipált teljesítmény: $P = U \cdot I = 5,25$ W.
(b) Az áram az időegység alatt átáramló töltéseket jelenti

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{12.3.1}$$

Itt $\Delta Q = Ne$, ahol N a elektronok száma. Így

$$N = \frac{I\Delta t}{e} = 1,3 \cdot 10^{15}. \tag{12.3.2}$$

12.4. Feladat: (HN 28A-16) Egy 12 V-os autóakkumulátor kapacitása 120 Ah (itt a kapacitás azt jelenti, hogy az akkumulátor kezdeti töltése 120 amper·óra). Parkolás során két 80 W-os fényszóróizzó bekapcsolva marad. Számítsuk ki, hogy hány óra alatt csökken az akkumulátor töltése az eredetinek a felére azt feltételezve, hogy a kapocsfeszültség ezalatt nem változik.

Megoldás: Az izzók összteljesítménye $P = 160$ W. Az $U = 12$ V-os telepfeszültségen

$$I = \frac{P}{U} \tag{12.4.1}$$

áram folyik rajtuk keresztül. A $Q' = 60$ amper·óra töltést

$$t = \frac{Q'}{I} = \frac{Q'U}{P} = 4,5\,\text{óra} \tag{12.4.2}$$

alatt éri el.

12.5. Feladat: (HN 28A-29) Zivatarfelhők környezetében az elektromos térerősség 100 V/m, ugyanitt $6 \cdot 10^{-13}$ A/m^2 az áramsűrűség. Mekkora az légkör elektromos vezetőképessége ebben a tartományban?

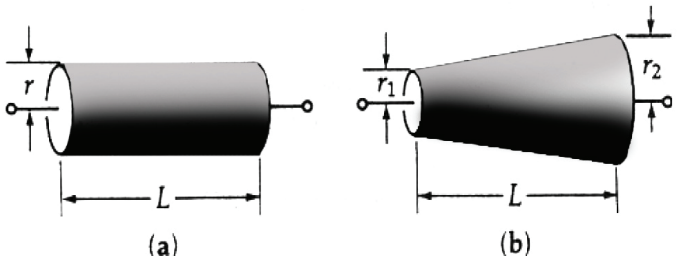
Megoldás: A differenciális Ohm-törvényből

$$\sigma = \frac{j}{E} = 6 \cdot 10^{-15}\,\text{S/m}. \tag{12.5.1}$$

Megjegyzés: S: siemens. $1/\Omega = \text{S}$;

$$[\sigma] = \frac{1}{[\varrho]} = \frac{1}{\Omega \cdot m} = \frac{S}{m}.$$

12.6. Feladat: (HN 28C-41) A 76 ábrán két, azonos anyagból gyártott ellenállás látható. A véglapokat vezető réteggel vonták be. Tételezzük fel, hogy az ellenállások belsejében az áramsűrűség bármely, a tengelyre merőleges síkmetszet mentén állandó nagyságú. Mutassuk meg, bogy a két ellenállás azonos nagyságú, ha a henger r sugara egyenlő a csonkakúp r_1, és r_2 sugarának mértani közepével, azaz $r' = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Útmutatás: a R ellenállás nagyságának kiszámításakor számítsuk ki a tengelyszimmetrikus, dx vastagságú, $r(x) = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot x/L$ sugarú vékony



76. ábra. 28C-41 feladathoz

körlemezek átellenes lapjai közötti dR ellenállást. A teljes ellenállást ezen elemi ellenállások segítségével, integrálassal kaphatjuk meg.)

Megoldás: Osszuk fel a csonkakúp alakú ellenállást párhuzamos dx vastagságú rétegekre! Egy ilyen, az r_1 sugarú, a fedőlaptól x távolságra levő korong sugara, felülete, illetve ellenállása

$$\begin{aligned} r(x) &= r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\cdot x}{L} \\ A(x) &= r^2(x)\cdot\pi \\ dR(x) &= \rho\cdot\frac{dx}{A(x)} = \rho\cdot\frac{dx}{r^2(x)\pi} \end{aligned} \tag{12.6.1}$$

A teljes ellenállás ezért

$$R = \rho\cdot\int_0^L \frac{dx}{r^2(x)} \tag{12.6.2}$$

A legegyszerűbben akkor járunk el, ha az x szerinti integrálásról áttérünk az $r(x)$ szerinti integrálásra. (12.6.1) alapján

$$dr = d\left(r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\cdot x}{L}\right) = \frac{r_2 - r_1}{L}\cdot dx \Rightarrow dx = \frac{L}{r_2 - r_1}\,dr$$

ezért

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi(r_2-r_1)}\int_{r_1}^{r_2}\tfrac{dr}{r^2} = \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi(r_2-r_1)}\left[-\tfrac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi(r_2-r_1)}\left(\tfrac{1}{r_1}-\tfrac{1}{r_2}\right) = \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi(r_2-r_1)}\left(\tfrac{r_2-r_1}{r_1\cdot r_2}\right) = \\ &= \tfrac{\rho\cdot L}{\pi r_2\cdot r_1} \end{aligned} \tag{12.6.3}$$

Ez viszont valóban megegyezik egy olyan egyenes henger alakú rúd ellenállásával, amelynek sugara $r' = \sqrt{r_1\cdot r_2}$.

12.7. Feladat: (HN 28C-45) Két vékony, koncentrikus gömbhéj vezető sugara a, ill. b ($a < b$). A köztük lévő teret σ fajlagos vezetőképességű anyag tölti ki. Számítsuk ki a két gömbhéj közötti ellenállást.

Megoldás: Tekintsünk egy r sugarú, dr falvastagságú gömbhéjat. Ennek ellenállása az

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} \tag{12.7.1}$$

összefüggés alapján

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4r^2\pi}. \tag{12.7.2}$$

A teljes ellenállás

$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4r^2\pi} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}. \tag{12.7.3}$$

12.8. Feladat: (HN 28C-46) Az előző feladatban leírt két gömbhéj közé U feszültséget kapcsolunk úgy, hogy a belső g6mbhéjpotenciálja legyen nagyobb. Határozzuk meg, hogyan függ a J áramsűrűség a középponttól r távolságban a megadott paraméterektől.

Megoldás: Az áramerősség

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi\sigma abU}{b-a}. \tag{12.8.1}$$

Az áramsűrűség – figyelembe véve, hogy a gömbszimmetria miatt az áramsűrűség a r távolságban minden irányban ugyanannyi –

$$J = \frac{I}{A} = \frac{4\pi\sigma abU}{4r^2\pi(b-a)} = \frac{\sigma abU}{(b-a)}\frac{1}{r^2}. \tag{12.8.2}$$

RC-körök

12.9. Feladat: (HN 29A-34) Egy C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül sütünk ki. Mennyi idő alatt csökken a kondenzátor töltése a kezdeti érték $1/e^2$-ed részére?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.9.1}$$

amely egyenletet átrendezve

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t. \tag{12.9.2}$$

Ennek megoldása

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{12.9.3}$$

A kondenzátor töltése $1/e^2$-ed részére csökken, így

$$e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-2}, \tag{12.9.4}$$

amelyből

$$t = 2RC. \tag{12.9.5}$$

12.10. Feladat: (HN 29A-36) Kondenzátor adott feszültséggel való feltöltésekor a töltés maximumhoz tart. Számítsuk ki, hogy a $\tau = RC$ időállandó hányszorosa az az időtartam, ami ahhoz szükséges, hogy a töltés 2 %-nyira megközelítse a maximumot?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.10.1}$$

amelyből a változók szeparálásával a

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q - \varepsilon C} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{12.10.2}$$

egyenlet adódik. Az integrálást kijelölve

$$\int_0^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q - \varepsilon C} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{12.10.3}$$

írható. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{12.10.4}$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése, ahol $Q_0 = \varepsilon C$ a teljesen feltöltött kondenzátor töltése. A feladat szerint

$$0,98 = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \tag{12.10.5}$$

amelyből a kérdéses idő

$$t = -RC\ln 0,02 = 3,912RC. \tag{12.10.6}$$

12.11. Feladat: (HN 29A-37) Egy 10 μF-os kondenzátort R ellenálláson keresztül l0 V-os teleppel töltünk. A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség a töltés megkezdése után 3 másodperccel éri el a 4 V értéket. Számítsuk ki R nagyságát.

Megoldás: Adatok: $C = 10\ \mu$F; $\varepsilon = 10$ V; $t = 3$ s; $U_C = 4$ V.
A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.11.1}$$

amelyből a változók szeparálásával és az integrációs határok megadásával a

$$\int_0^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q - \varepsilon C} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{12.11.2}$$

egyenlet adódik. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{12.11.3}$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése. A kondenzátor feszültsége

$$U(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_C. \tag{12.11.4}$$

A megadott adatokkal az R ellenállás értéke

$$R = 587\,\mathrm{k}\Omega. \tag{12.11.5}$$

12.12. Feladat: (HN 29B-42) Egy 3 μF-os kondenzátort 200 V feszültségre töltünk fel, majd elválasztjuk a töltőáramkörtől. A dielektrikum nem tökéletes szigetelő, ezért a két lemez közötti potenciálkülönbség 5 perc alatt 185 V-ra csökken. Számítsuk ki a dielektrikum ellenállását.

Megoldás: Adatok: $C = 3\mu$F; $U_0 = 200$ V; $t = 5$ perc $= 300$ s; $U = 185$ V.
Kezdetben a kondenzátoron lévő töltés: $Q_0 = CU_0$. A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{12.12.1}$$

amely egyenletet szeparálva és az integrációs határokat megadva kapjuk:

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t. \tag{12.12.2}$$

Ebből a kondenzátoron lévő töltés időfüggése

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{12.12.3}$$

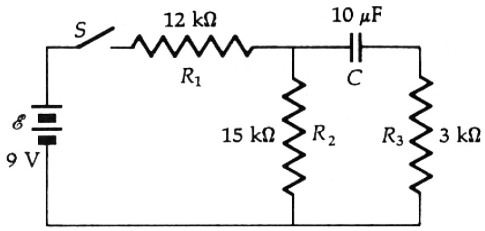
a rajta lévő feszültség

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U. \tag{12.12.4}$$

Innen a dielektrikum ellenállása

$$R = -\frac{t}{C \ln \frac{U}{U_0}} = 1,28 \cdot 10^9\,\Omega. \tag{12.12.5}$$

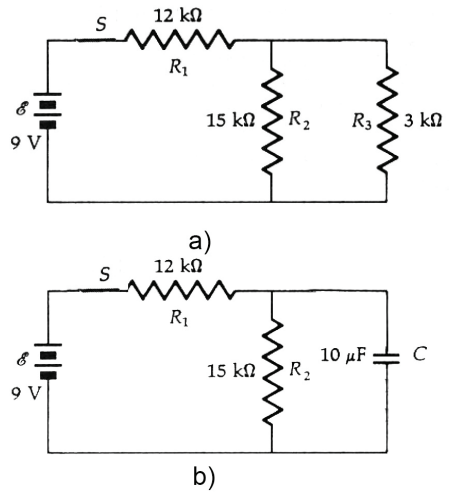
12.13. Feladat: (HN 29C-62) Tekintsük a 12 áramkört. Kezdetben a kondenzátoron nincs



töltés; a $t = 0$ időponthan az S kapcsolót zárjuk.
(a) Készítsünk táblázatot, amely az egyes áramköri elemeken folyó áramerősségek (i_{12}, i_{15} és i_c) és a rajtuk létrejövô feszültségesések (u_{12}, u_{15}, és u_c) kezdeti (közvetlenül t = 0 utáni) értékét foglalja össze.
(b) Készítsünk egy másik táblázatot is, a fenti mennyiségek stacionárius értékeivel.

Megoldás:
(a) Mielőtt a kapcsolót zárnánk a kondenzátoron nem volt feszültség. A kapcsoló zárásakor a kondenzátor feszültsége nem változhat meg ugrásszerűen, ezért továbbra is 0 marad, vagyis olyan a helyzet, mintha a kondenzátor helyett egy rövidzár lenne. Ezért a kapcsolás ebben a pillanatban ekvivalens a 77 a) ábráján láthatóval.

Ennek az áramkörnek az ellenállása $R(t=0) = R_1 + \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 14,5\,k\Omega$ Az R_1 ellenálláson



77. ábra. Helyettesítő kapcsolások a 77 feladathoz

átfolyik a teljes áram, ezért

$$i_{12} \equiv i_{R_1} = \frac{U}{R(t=0)} = \frac{9V}{14.5k\Omega} = 6,207 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.1}$$

$$u_{12} \equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 7.448\,\mathrm{V} \tag{12.13.2}$$

$$u_{15} \equiv u_{R_2} = u_{R_3} = U - u_{R_1} = 1.552\,\mathrm{V} \tag{12.13.3}$$

$$i_{15} \equiv i_{R_2} = \frac{u_{R_2}}{R_2} = 1.035 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.4}$$

$$u_c = 0\,\mathrm{V} \tag{12.13.5}$$

$$i_c = i_{R_3} = \frac{u_{R_3}}{R_3} = \frac{u_{R_2}}{R_3} = 5.172 \cdot 10^{-4}\mathrm{A} \tag{12.13.6}$$

(b) Stacionárius állapotban a kondenzátort tartalmazó ágban nem folyik áram és a kondenzátor teljesen fel van töltve, ezért a kondenzátor feszültsége megegyezik az R_2 ellenálláson eső feszültséggel (tehát az R_3 ellenállás sarkai között nincs potenciálkülönbség.) Ld. 77 b) ábra. A körben folyó áram viszont lecsökken, mert az eredő ellenállás most $R_{stac} = R_1 + R_2 = 27\,k\Omega$ és csak ezen a két ellenálláson folyik át áram.

$$i_{12} \equiv i_{R_1} = \tfrac{U}{R(stac)} = \tfrac{U}{R_1+R_2} = 3,333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.7}$$

$$u_{12} \equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 4\,\mathrm{V} \tag{12.13.8}$$

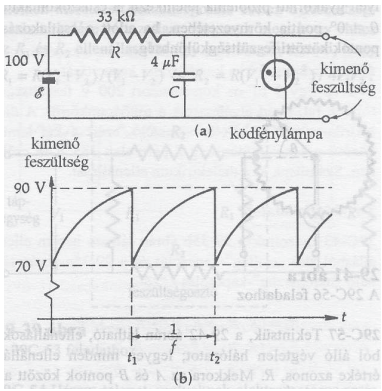
$$u_{15} \equiv u_{R_2} = U - u_{R_1} = 5\,\mathrm{V} \tag{12.13.9}$$

$$i_{15} \equiv i_{R_2} = i_{R_1} = 3,333 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A} \tag{12.13.10}$$

$$u_c = u_{15} = 6\,\mathrm{V} \tag{12.13.11}$$

$$i_c = 0\,\mathrm{A} \tag{12.13.12}$$

12.14. Feladat: (HN 29C-63) A 78 ábrán egyszerű fűrészfog-jelgenerátor kapcsolási rajza látható. A neon izzólámpa ellenállása nagyon kicsi, ha a rákapcsolt feszültség eléri a 90 V-os küszöböt, de amikor a feszültség 70 V alá esik, akkor az izzó gyakorlatilag már nem vezeti az áramot. Számítsuk ki az oszcillátor f frekvenciáját.



78. ábra.

Megoldás: X

13. Feladatok a mágneses erőtér témaköréből

Elektromosan töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben

13.1. Feladat: (HN 30B-3) Egy elektron mágneses térben $3 \cdot 10^6$ m/s sebességgel halad az x tengely mentén pozitív x irányban. Számítsuk ki az elektronra ható erőt, ha a mágneses fluxussűrűséget tesla egységekben a $\mathbf{B} = 0,4\mathbf{i} + 0,7\mathbf{j} + 0,32\mathbf{k}$ összefüggés adja meg.

Megoldás: Adatok: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i}$, ahol $v_x = 3 \cdot 10^6$ m/s; $B_x = 0,4$ Vs/m^2; $B_y = 0,7$ Vs/m^2; $B_z = 0,3$ Vs/m^2; $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
A elektronra ható Lorentz-erő:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -ev_xB_z\mathbf{j} + ev_xB_y\mathbf{k} = 1,44 \cdot 10^{-13}\mathbf{j} - 3,36 \cdot 10^{-13}\mathbf{k}\ \text{N}. \qquad (13.1.1)$$

13.2. Feladat: (HN 30A-5) Egy proton 0,5T fluxussűrűségű (mágneses erőtérben 1,00 cm sugarú körpályán mozog. Mekkora a kinetikus energiája (eV egységekben kifejezve)?

Megoldás: Adatok: $B = 0,5$ T; $r = 1,00$ cm; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.
A körpályán való mozgást az

$$m\frac{v^2}{r} = evB \tag{13.2.1}$$

mozgásegyenlettel írhatjuk le. A kinetikus energia kifejezését és az előző egyenletet használva

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{r^2e^2B^2}{m} = 1,92 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J} = 1200\,\mathrm{eV}. \tag{13.2.2}$$

13.3. Feladat: (HN 30A-7) A magnetron a radar-oszcillátorok egy típusa. A radar által kisugárzott mikrohullám frekvenciáját a magnetron mágneses erőterében keringő elektronok ciklotron-frekvenciája szabja meg. Becsüljük meg, milyen mágneses fluxussűrűség szükséges 3 cm-es hullámhosszúságú mikrohullámok előállításához.

Megoldás: A homogén mágneses térben az elektron a tér irányára merőleges síkban körpályán mozog[8] A körpályán tartást az elektronra ható Lorentz erő biztosítja, ezért

$$\begin{aligned} F_L &= F_{cp} \\ e \cdot |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\ e \cdot v \cdot B &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\ \frac{e \cdot B}{m_e} &= \frac{v}{r} \end{aligned}$$

De $\frac{v}{r} \equiv \omega$ a keringő elektron körfrekvenciája. Az elektron keringési frekvenciája tehát

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e \cdot B}{2\pi m_e} \tag{13.3.1}$$

A mikrohullám fénysebességgel terjed, frekvenciája megegyezik az elektron "rezgési" frekvenciájával:

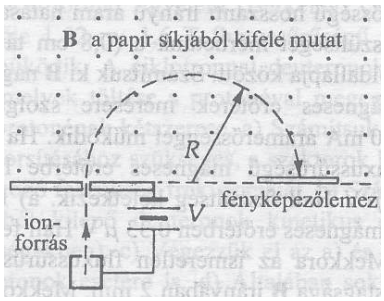
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi m_e \cdot c}{e \cdot B} \tag{13.3.2}$$

[8] Későbbiekben látni fogjuk, hogy egy gyorsuló töltés energiát sugároz, ezért külső energia betáplálása nélkül az elektron egyre kisebb sugarú körpályára térne át.

ahonnan

$$B = \frac{2\pi m_e \cdot c}{e \cdot \lambda} = \frac{2 \cdot 3,141 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 2,998 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,03}$$
$$= 0,357 \cdot \frac{kg \cdot m}{s \cdot C \cdot m} = 0,357 \cdot \frac{kg\frac{m}{s^2} \cdot m}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{N \cdot m}{A \cdot m^2}$$
$$= 0,357 \cdot \frac{J}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{W \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot s}{m^2} = 0,357\,T$$

13.4. Feladat: (HN 30B-10) A 79 ábrán bemutatott tömegspektrométerben egyszeresen ionizált, 6 és 7 atomtömegű ($6 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg, illetve $7 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg) lítium ionokat 900V feszültség gyorsít, mielőtt belépnek a $B = 0,04$ T fluxussűrűségű homogén mágneses térbe. Itt egy félkört megtéve fényképezőlemezbe csapódnak, és egymástól x távolságra lévő két foltot idéznek elő. Mekkora ez az x távolság?



79. ábra.

Megoldás: Adatok: $M_6 = 9,96 \cdot 10^{-27}$ kg; $M_7 = 11,62 \cdot 10^{-27}$ kg; $U = 900$ V; $B = 0,04$ T; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Az egyszeresen ionizált M tömegű ion kinetikus energiáját az U feszültségű gyorsításból nyeri

$$eU = \frac{1}{2}Mv^2. \tag{13.4.1}$$

Innen az elért sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{M}}. \tag{13.4.2}$$

A mágneses tér a Lorentz-erő révén az iont körpályára állítja

$$M\frac{v^2}{R} = evB. \tag{13.4.3}$$

Az R sugár a fenti két egyenletből kifejezhető, azaz

$$R = \frac{Mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2MU}{e}}. \tag{13.4.4}$$

A 6-os tömegszámú ionhoz tartozó sugár legyen R_6, a 7-eshez R_7. Az adatok behelyettesítésével

$$R_6 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2M_6U}{e}} = 0,265\,\mathrm{m} \tag{13.4.5}$$

$$R_7 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2M_7U}{e}} = 0,286\,\mathrm{m} \tag{13.4.6}$$

A becsapódási pontok közötti távolság

$$x = 2R_7 - 2R_6 = 0,042\,\mathrm{m} = 42\mathrm{mm}. \tag{13.4.7}$$

13.5. Feladat: (HN 30A-13) Egy sebességszűrőben (az elektronokat sebességük szerint szétválasztó eszközben) $1,4 \cdot 10^4$ V/m elektromos és erre merőleges l8 mT fluxussűrűségű mágneses erőteret alkalmaznak. Számítsuk ki a szűrőn áthaladó elektronok sebességét.

Megoldás: Adatok: $E = 1,4 \cdot 10^4$ V/m; $B = 18$ mT. A elektronok mind az E mind a B térre merőlegesen haladnak. Akkor az adott térrészen tudnak átjutni, ha az

$$eE = evB \tag{13.5.1}$$

összefüggés fenn áll. Ebből a kérdéses sebesség

$$v = \frac{E}{B} = 7,78 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}. \tag{13.5.2}$$

Áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben

13.6. Feladat: (HN 30B-17) Téglalap alakú, 0,200 N súlyú áramvezető hurok úgy van felfüggesztve, hogy a 80. ábrán vázolt módon félmagasságig vízszintes irányú, B indukció-vektorú homogén mágneses erőtérbe merül. Ha 2 A erősségű áram folyik a hurkon keresztül, a felfüggesztő zsinórra 0,370 N erő hat.

(a) Milyen irányú a hurokban az áram?

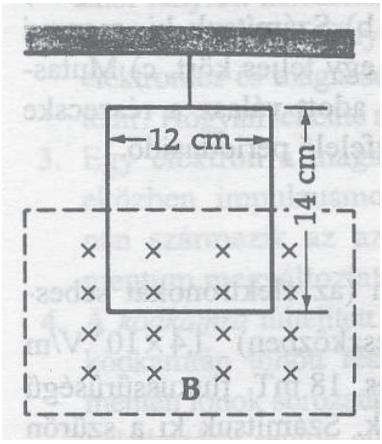
(b) Számítsuk ki B nagyságát!

Megoldás: Adatok: $G = 0,200$ N; $F = 0,370$ N; $I = 2$ A; $l = 0,12$ m.

(a) Az óra járásával egyező irányban folyik az áram.

(b) Az l hosszúságú vezetőre ható Lorentz-erő

$$F_L = IlB, \tag{13.6.1}$$

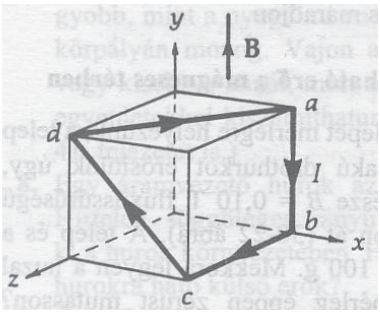


80. ábra.

és az ábrán lefelé mutat. Másrészt $F_L = F - G$. Így

$$B = \frac{F-G}{Il} = 0,708\text{T}. \tag{13.6.2}$$

13.7. Feladat: (HN 30B-18) A 81 ábrán bemutatott kocka 40 cm élhosszúságú. A négy egyenes



81. ábra.

szakaszból (*ab*,*bc*,*cd* és *da*) álló dróthurkon $I = 5$ A erősségű (áram folyik. Az y tengely pozitív irányában $B = 0,02$ T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat. Készítsünk táblázatot, melyben a fenti sorrendben az egyes huzalszakaszokra ható) erők nagyságát és irányát foglaljuk össze.

Megoldás: Egy egyenes vezetőre **B** fluxussűrűségű homogén mágneses térben ható erőt az

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \qquad F = I\,l\,B\,sin\,\alpha(\mathbf{l},\mathbf{B})$$

képlet adja meg, ahol **l** az áram irányába mutató vektor melynek hossza megegyezik az egyenes vezető szakasz hosszával és $\alpha(\mathbf{l},\mathbf{B})$ a szakasz és **B** közötti szög. $|\mathbf{l}|$ helyére tehát a következőket

kell beírni: $|\mathbf{l}_{ab}| = |\mathbf{l}_{bc}| = A$, $|\mathbf{l}_{cd}| = |\mathbf{l}_{da}| = \sqrt{2}\cdot A$, ahol $A = 0,4\,m$ a kocka élhossza. Az egyes irányított szakaszok **B** vel bezárt szögei: $\alpha_{ab} = 180^o$, $\alpha_{bc} = 90^o$, $\alpha_{cd} = 45^o$ és $\alpha_{da} = 90^o$. Az egyes szakaszokra ható erők nagyságai és irányai:

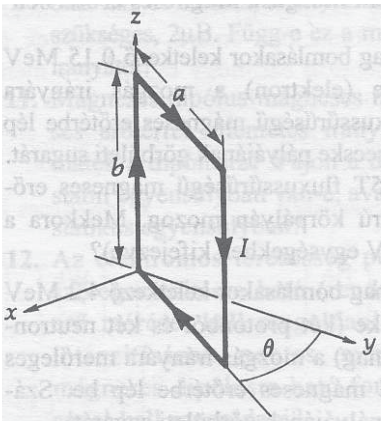
$F_{ab} = 0$,

$F_{bc} = I\cdot A\cdot B = 5\cdot 0,4\cdot 0,02 = 0,04\,N$ $-x$ irányú

$F_{cd} = \sqrt{2}\cdot I\cdot A\cdot B\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = I\cdot A\cdot B = 0,04\,N$ $-z$ irányú

$F_{da} = \sqrt{2}\cdot I\cdot A\cdot B = 0,052N$ $+x$ és $+z$ tengellyel 45^o szöget bezáró irányú

13.8. Feladat: (HN 30B-21) Téglalap alakú áramvezető hurok mágneses erőtérben a 82 ábrán vázolt módon helyezkedik el. A $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i}$ ($B_x = 0,15$ Vs/m^2) fluxussűrűségű (tesla egységben megadott nagyságú) mágneses erőtér a hurokra forgatónyomatékot gyakorol. Mekkora a forgatónyomaték, ha $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $\theta = 30^0$ és $I = 2$ A?



82. ábra.

Megoldás: A mágneses dipólmomentum irányát a jobb kéz szabállyal lehet eldönteni, jelen esetben a keret síkjára merőlegesen a felület $\mathbf{n} = (-\cos\theta, \sin\theta, 0) = -\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ normál vektorának irányába mutat. Így a dipólmomentum vektor

$$\mu = Iab\mathbf{n} = Iab(-\cos\theta, \sin\theta, 0) = Iab(-\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}). \tag{13.8.1}$$

A keretre ható forgatónyomaték

$$\mathbf{M} = \mu\times\mathbf{B} = Iab\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\cos\theta & \sin\theta & 0\\ B_x & 0 & 0\end{vmatrix} = -IabB_x\sin\theta\mathbf{k} = -1,44\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}. \tag{13.8.2}$$

13.9. Feladat: (HN 30B-23) Számítsuk ki a 82 ábrán vázolt áramvezető hurok mágneses dipólusmomentumát!

Megoldás: A dipólusmomentum nagysága Iab. Iránya a jobbkéz-szabály alkalmazásával az ábráról állapítható meg.

$$\mu = Iab(-\cos\theta, -\sin\theta) \tag{13.9.1}$$

13.10. Feladat: (HN 30C-34) A q/m töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ sebességgel halad át a derékszögű koordinátarendszer köz6ppontján. A részecskét homogén mágneses erőtér téríti el annyira, hogy áthaladjon az $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ponton.
(a) Határozzuk meg a **B** mágneses indukcióvektor irányát.
(b) Fejezzük ki b-t a, q, m, B és v függvényeként.

Megoldás: X

13.11. Feladat: (HN 30C-45) Egyenletes keresztmetszetű korongot, melynek tömege m, és melyen q töltés egyenletesen oszlik el, tengelye körül forgatunk. Mutassuk meg, hogy a forgó töltött korong μ mágneses momentuma és **L** impulzusmomentuma között a $\mu = (q/(2m))\mathbf{L}$ összefüggés teremt kapcsolatot.

Megoldás: A forgó korong impulzusmomentuma

$$\mathbf{L} = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega, \tag{13.11.1}$$

ahol θ a korong tehetetlenségi nyomatéka, ω a szögsebesség és R a korong sugara.
A korong felületi töltéssűrűségét σ-val jelölve az összes töltés

$$q = \sigma R^2\pi. \tag{13.11.2}$$

Az r sugarú, dr szélességű körgyűrűn

$$dq = \sigma 2r\pi \mathrm{d}r \tag{13.11.3}$$

töltés van, amely $T = 2\pi/\omega$ idő alatt körbefut, s így

$$dI = \sigma r \mathrm{d}r\omega \tag{13.11.4}$$

áramot jelent. Mivel a körgyűrű által határolt felület $r^2\pi$, így gyűrű

$$\mathrm{d}r\mu = \sigma r^3 \pi \mathrm{d}r\omega \tag{13.11.5}$$

mágneses dipólmomentumot jelent. A teljes felületre összeadva:

$$\mu = \int_0^R \sigma r^3 \pi \mathrm{d}r\omega = \frac{1}{4}\sigma R^4 \pi\omega = \frac{1}{4} qR^2\omega \tag{13.11.6}$$

a mágneses dipólmomentum. Az impulzusmomentum és a dipólmomentum kifejezését összevetve az állítás

$$\mu = \frac{q}{2m}\mathbf{L} \tag{13.11.7}$$

adódik.

13.12. Feladat: (HN 30C-46) Köralakú áramvezető hurokra adott mágneses erőtérben maximálisan M_0 forgatónyomaték hat. Alakítsuk át a hurkot úgy, hogy kisebb, de kétmenetű legyen. Mekkora a maximális forgatónyomaték ezen a kisebb hurkon?

Megoldás: Ha az eredeti kör sugara R, akkor a két egyforma kör sugara $R/2$ kell legyen, mert a kerületek hossza egyenlő. A forgatónyomaték a keret felületével — $R^2\pi$ — arányos. A második esetben a két kör együttes felülete számít, azaz $2\cdot(R/2)^2\pi$, ami fele a nagy körének. Így a maximális forgatónyomaték is, azaz $M_0/2$.

13.13. Feladat: (HN 30C-51) Szigetelő anyagból keszült R sugarú korong egyik oldalán a felületmenti homogén töltéssűrűség nagysága σ. A korongot tengelye körül ω szögsebességgel forgatjuk. Mutassuk meg hogy mágneses dipólusmomentuma $\omega\cdot\sigma\cdot\pi R^4/4$. (Útmutatás: Számítsuk ki az r sugarú, dr széles körgyűrűn levő töltések mozgásából származó mágneses erőteret. Használhatjuk a $\mathbf{p}_m = I\,\mathbf{A}$ egyenletet.)

Megoldás: A korongon levő töltések mindegyike a korong tengelye körüli körpályán mozog, tehát egy köráramnak felel meg. Minden köráramnak van mágneses momentuma, ezért a forgó korongnak is. Bontsuk fel a korong felületét koncentrikus dr szélességű körgyűrűkre. Egy r sugarú I erősségű köráram mágneses momentumának nagysága $p_m = I\cdot A = I\cdot r^2\pi$. Esetünkben a középponttól r és $r+dr$ távolságban található $dQ = \sigma\, 2\pi\, r\, dr$ nagyságú töltések $dI(r)$ árama:

$$dI(r) = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{2\pi/\omega} = \frac{\omega\, dQ}{2\pi} = \frac{2\pi\omega\sigma\, r\, dr}{2\pi} = \omega\sigma\, r\, dr$$

Egy ilyen köráram dp_m mágneses momentuma

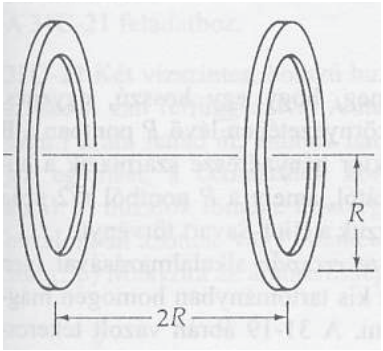
$$p_m = dI \cdot A(r) = dI \cdot r^2 \pi = \omega \sigma r^3 \pi \, dr$$

A teljes körlap mágneses momentuma tehát

$$p_m = \omega \sigma \pi \int_0^R r^3 \, dr = \omega \sigma \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\omega \sigma \pi R^4}{4} \tag{13.13.1}$$

Biot-Savart törvény, Ampère-törvény

13.14. Feladat: (HN 31B-3) Két N menetű, R sugarú tekercs egymástól $2R$ távolságra helyezkedik el, ahogy a 83 ábra mutatja. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a tekercsek tengelyén, tőlük egyenlő távolságban lévő pontban. Tételezzük fel, hogy a tekercsek sorba vannak kötve és az áramirány mindkét tekercsben azonos.



83. ábra.

Megoldás: X

13.15. Feladat: (HN 31A-4) Számítsuk ki két hosszú, párhuzamos, vékony, egymástól 5 cm távolságban lévő huzal egységnyi hosszúságú szakaszai között ható erőt. Az egyik huzalon 10 A erősségű áram folyik, a másikon is ugyanekkora, de ellentétes irányú. Taszító vagy vonzó erő hat a két huzal között?

Megoldás: Adatok: $r = 5$ cm; $I = 10$ A. Az egyik vezető által a másik helyén keltett mágneses teret az Ampère-törvény szerint számolhatjuk ki

$$\oint \mathbf{B} \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i, \tag{13.15.1}$$

$$B2r\pi = \mu_0 I, \tag{13.15.2}$$

azaz

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}. \tag{13.15.3}$$

A vezetőben mozgó töltött részecskékre Lorentz-erő hat, amely L hossznyi vezetőt tekintve

$$F = ILB, \tag{13.15.4}$$

hosszegységenként

$$f = IB. \tag{13.15.5}$$

A B mágneses indukciót behelyettesítve

$$f = \mu_0 \frac{I^2}{2r\pi} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N/m} \tag{13.15.6}$$

hosszegységenkénti taszító erő hat.

13.16. Feladat: (HN 31B-6) Egy R sugarú, köralakú vezetőhurokban I áram folyik. A hurok tengelyén, a huroktól milyen x távolságban van az a pont, ahol a mágneses fluxussűrűség, éppen fele a hurok középpontjában mérhetőnek? Felhasználhatjuk a (HN 31C-17) feladat eredményét is.

Megoldás: Menjen át a koordinátarendszer x tengelye a hurok középpontján merőlegesen a korong síkjára. A (HN 31C-17) feladat eredménye szerint x távolságban a hurok középpontjától

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

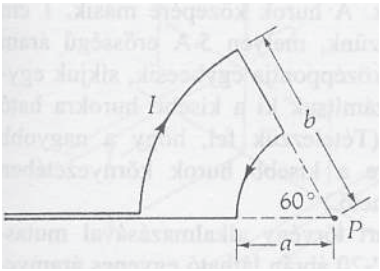
ahol $\mathbf{x}$ a $+x$ irányú egységvektor. Az x távolságban a tengelyen mérhető térerősség aránya a hurok középpontjában ($x = 0$) mérhetőhöz:

$$\frac{|B(x)|}{|B(0)|} = \frac{\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}}{\frac{R^2}{(R^2)^{3/2}}} = \frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Ez akkor 1/2, ha

$$\begin{aligned}
\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \\
2R^3 &= (x^2+R^2)^{3/2} \\
2^{2/3}R^2 - R^2 &= x^2 \\
x &= \pm(2^{2/3}-1)\cdot R = \pm 0,587\,R
\end{aligned}$$

13.17. Feladat: (HN 31B-8) Számítsuk ki a mágneses indukcióvektort a 84 ábrán látható körívekből és sugárirányú egyenesszakaszokból álló hurok köríveinek P középpontjában.



84. ábra.

Megoldás: A radiális vezetőszakaszoknak nincs járuléka a P pontban, így csak a két ívet kell tekintsük. Az r központi sugarú ív ds elemi hosszától származó járulék

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}s}{r^2}. \tag{13.17.1}$$

Ugyanakkor ds ívhossz kifejezhető a θ központi szöggel

$$\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta. \tag{13.17.2}$$

A teljes B teret a szög szerinti integrálással kapjuk:

$$B = \int_0^{60^0=\pi/3} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\mathrm{d}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{r}. \tag{13.17.3}$$

A b sugarú ívtől

$$B_b = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{b} \tag{13.17.4}$$

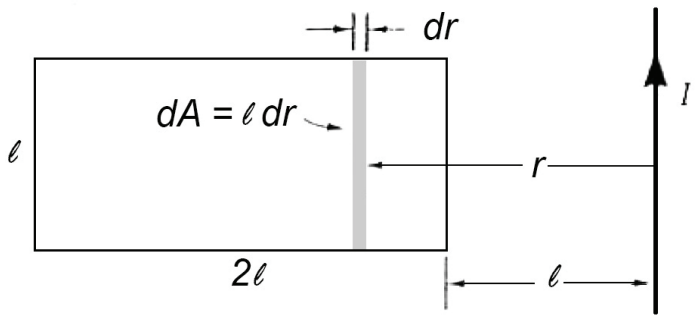
a lap síkjára merőlegesen befelé, míg az a sugarú ívtől

$$B_a = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{a} \tag{13.17.5}$$

a lap síkjára merőlegesen kifelé mutató tér alakul ki. Az eredő

$$B = B_b - B_a = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{b} - \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{a} = \frac{\mu_0 I}{12}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right). \tag{13.17.6}$$

Mivel $a < b$, így ennek eredménye negatív, azaz kifelé mutat.



85. ábra. A 31B-9 feladathoz

13.18. Feladat: (HN 31B-9) A 85 ábrán látható, téglalap alakú vezetőhurok és a ∞ hosszúságú, egyenes vezető azonos sikban fekszik. A vezetőhurok ellenállása $2\,\Omega$. Számítsuk ki a hurok teljes felületén áthaladó mágneses fluxust, ha az egyenes vezetőn I áram halad át. (Útmutatás: Válasszunk ki egy $dA = \ell dr$ felületelemet, és számítsuk ki a $d\Phi_B$, fluxust ezen a felületelemen, majd integrálással számítsuk ki a teljes fluxust.)

Megoldás: Osszuk fel a felületet dr szélességű sávokra! Egy ilyen sáv mentén a mágneses fluxussűrűség konstansnak tekinthető. Az egyenes vezetőtől r távolságban a B mágneses fluxussűrűség nagysága

$$B = \mu_o \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

így a dr széles és ℓ hosszú sávra vett elemi $d\Phi$ fluxus

$$d\Phi = B(r) \cdot dA = B(r) \cdot \ell \cdot dr = \mu_o \cdot \frac{I\ell\, dr}{2\pi r}$$

A teljes hurkon áthaladó fluxus az elemi fluxusok összege, ami integrálként írható fel.

$$\Phi = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi} \int_{\ell}^{3\ell} \frac{1}{r} dr = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi} [ln\, r]_{\ell}^{3\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi} ln \frac{3\ell}{\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\ell}{2\pi} ln\, 3 \qquad (13.18.1)$$

13.19. Feladat: (HN 31A-13) Egy 50 cm hosszú, 2 cm átmérőjű szolenoid belsejében B = 0,07 T mágneses indukcióvektort kívánunk előállítani.
(a) Mekkora a teljes mágneses fluxus a szolenoid belsejében, a tengelyre merőleges felületen?
(b) Számítsuk ki, hány menetű legyen a tekercs, ha 5 A erősségű áramot alkalmazunk?

Megoldás: Adatok: $L = 50$ cm; $d = 2$ cm; a sugár $r = 1$ cm; $B = 0,07$ T.

(a) A tekercsbeli mágneses fluxus

$$\Phi_B = BA = Br^2\pi = 2,2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Vs}. \tag{13.19.1}$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i, \tag{13.19.2}$$

azaz

$$BL = \mu_0 NI \tag{13.19.3}$$

ahol N a menetszám. Így a tekercsbeli mágneses indukció

$$B = \mu_0 \frac{IN}{L}, \tag{13.19.4}$$

ahonnan az N menetszám

$$N = \frac{LB}{\mu_0 I} = 5570. \tag{13.19.5}$$

13.20. Feladat: (HN 31B-15) Hosszú, egyenes, a sugarú hengeres vezetőn I áram folyik. Az Ampère-törvényt alkalmazva vezessük le, hogy hogyan változik a B indukcióvektor a vezető belsejében. (Egyenáramok esetében az áramsűrűség a vezető keresztmetszete mentén egyenletes. Ábrázoljuk B-t a tengelytől való r távolság függvényében a vezető belsejében és azon kívül is.

Megoldás: A vezető belsejében ($0 < r < a$) esetében az r sugarú keresztmetszeten átfolyó áramtól származik mágneses tér. A vezető keresztmetszetéhez – a keresztmetszete mentén egyenletes vezetés miatt – a

$$j = \frac{I}{a^2\pi} \tag{13.20.1}$$

áramsűrűséget adhatjuk meg. Itt az áram nagysága

$$I = \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi. \tag{13.20.2}$$

Így az Ampère-törvény segítségével felírhatjuk, hogy

$$B2r\pi = \mu_0 \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi. \tag{13.20.3}$$

Innen a $B(r)$ mágneses indukció

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2a^2\pi} r. \tag{13.20.4}$$

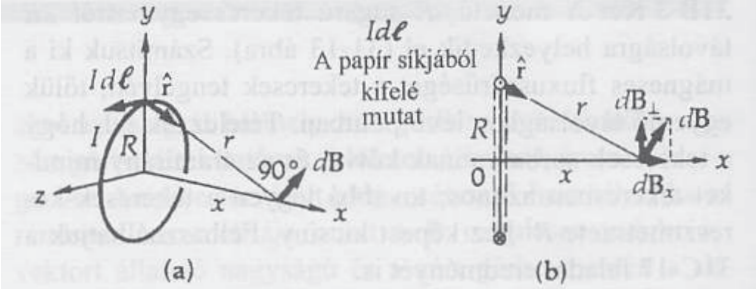
A vezetőn kívül ($a < r$)

$$B2r\pi = \mu_0 \frac{I}{,} \tag{13.20.5}$$

amellyel a mágneses indukció

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}. \tag{13.20.6}$$

13.21. Feladat: (HN 31C-17) A 86 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk



86. ábra.

meg, hogy a hurok tengelyén, a hurok sikjától x távolságban

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

(Útmutatás: Mi történik az x tengelyre merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensekkel az Idt elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ elemi mágneses indukcióvektorok összegzése során?)

Megoldás: Osszuk fel a hurkot a 86 a) ábra szerint $d\mathbf{l}$ darabokra. Az egy ilyen darabkától származó mágneses tér a Biot-Savart törvény szerint

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|r|^3}$$

Minden elemi szakasz ugyanakkor nagyságú, de más irányú elemi $d\mathbf{B}$ -t hoz létre. A 31-18 b) ábrán látható, hogy $d\mathbf{B}$ felbontható egy az x tengellyel párhuzamos $d\mathbf{B}_{||}$ és egy arra merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensre. A hurok mentén átellenesen elhelyezkedő elemi szakaszoktól származó mágneses fluxussűrűségek $d\mathbf{B}_\perp$ komponensi pont ellentétes irányúak, így kiejtik egymást, azonos nagyságú $d\mathbf{B}_{||}$ komponenseik pedig összeadódnak. Ez azt jelenti, hogy az eredő $\mathbf{B}$ térnek csak x irányú komponense lesz, a pozitív tengelyen pozitív, a negatív tengelyen negatív irányú, tehát a tér párhuzamos lesz az x irányú egységvektorral $\mathbf{x}$-szel. Az egy szakasztól származó $d\mathbf{B}_{||}$ nagysága $dB_{||} = B\,sin\alpha$, ahol α az x és r közötti szög. Felhasználva, hogy $\mathbf{r}$ és $\mathbf{l}$ merőlegesek :

$$\begin{aligned} dB_{||} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,|d\mathbf{l} \times \mathbf{r}|}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,dl \cdot r}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I\,dl}{|r|^2} \cdot sin\,\alpha \end{aligned}$$

Mivel $r = \sqrt{x^2+R^2}$

$$sin\,\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

amivel

$$dB_{||} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot l \tag{13.21.1}$$

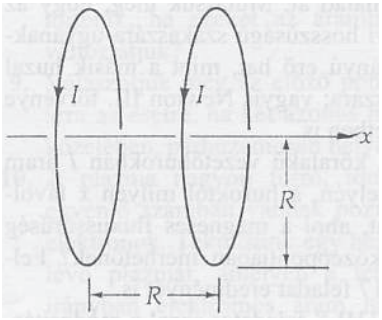
A teljes B tér az elemi szakaszok $dB_{||}$ járulékainak összege. Nagysága:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2r\pi} dl \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot [l]_0^{2r\pi} \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot 2R\pi \\ &= \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{IR^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{13.21.2}$$

Az irányt is figyelembe véve

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x} \tag{13.21.3}$$

13.22. Feladat: (HN 31C-19) A Helmholtz tekercspár alkalmazásával igen egyszerű módon lehet kis tartományban homogén mágneses erőteret létesíteni. A 87 ábrán vázolt tekercspár két lapos, köralakú tekercsből áll, melyek távolsága egyenlő a tekercsek sugarával; a két tekercsben az áramirány megegyezik. Mutassuk meg, hogy az x tengelyen a két tekercs között a távolság felében a mágneses erőtér olyan, hogy a dB/dx és a d^2B/dx^2 is zérus.



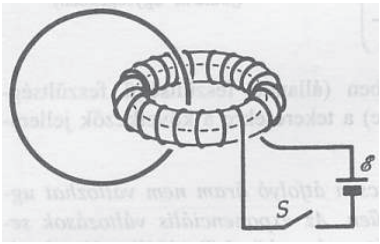
87. ábra.

Megoldás: X

14. Feladatok a mágneses indukció témaköréből

Faraday-törvény

14.1. Feladat: (HN 32B-1) Egy toroid tekercsen gyűrű van átfűzve (88. ábra). Az S kapcsoló zárásakor a toroidon áram kezd folyni.
(a) Számítsuk ki a gyűrűben indukált feszültséget,ha a toroidon belül a mágneses fluxus 30 Tm^2/s sebességgel változik.
(b) Az ideális toroid mágneses erőtere gyakorlatilag teljesen a tórusz belsejébe van lokalizálva, azaz a karikát a mágneses erőtér nem éri. Honnan származik akkor az indukált áram?



88. ábra.

Megoldás: Jelölés: $\Delta\Phi/\Delta t = 30\ \mathrm{Tm}^2/\mathrm{s}$.

(a) A mágneses fluxus ($\Phi = \oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A}$) idő szerinti változása hozza létre a gyűrűben az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -30\,\mathrm{V}. \tag{14.1.1}$$

(b) A $\mathbf{B}$ mágneses indukció változásakor $\mathbf{E}$ elektromos tér jön létre

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A}}{\Delta t} = \oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s} = \varepsilon, \tag{14.1.2}$$

és ez a tér mozdítja el a töltéseket. Innen származik az indukált áram.

14.2. Feladat: HN 32B-3 Egy R ellenállású, r sugarú köralakú huzalhurok a B homogén mágneses erőtér irányára merőleges felületen fekszik. A hurkot gyorsan, t idő alatt 180^0-kal átforditjuk. Számitsuk ki, hogy mekkora átlagos ε feszültség indukálódott ezalatt a hurokban és mekkora töltés haladt át ezalatt a vezető hurkon.

Megoldás: Ha egy vezető hurok által határolt felületen a mágneses térerősség Φ_B fluxusa változik ennek hatására a vezetőhurokban $\varepsilon(t)$ elektromotoros erő jelenik meg, azaz feszültség indukálódik (Faraday indukciós törvénye). Ha a fluxusváltozás Δt idő alatt $\Delta\Phi_B$ akkor az átlagos feszültség:

$$<\varepsilon>=-\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}=-\frac{\Phi_B(t=\Delta t)-\Phi_B(t=0)}{\Delta t}. \tag{14.2.1}$$

A negatív előjel megfelel Lenz törvényének. A feladatban ennek az elektromotoros erőnek csak a nagysága érdekes. Az eredeti és az átfordítás utáni fluxus

$$\Phi(t=0)=\int_A \mathbf{B}\,d\mathbf{A}\;|_{t=0}=BA=Br^2\pi \tag{14.2.2}$$

$$\Phi(t=\Delta t)=\int_A \mathbf{B}\,d\mathbf{A}\;|_{t=\Delta t}=-Br^2\pi. \tag{14.2.3}$$

A teljes fluxusváltozás nagysága tehát eredeti fluxus kétszerese

$$\Delta\Phi_B=\Phi_B(t=\Delta t)-\Phi_B(t=0)=-2Br^2\pi,$$

így

$$<\varepsilon>=+\frac{2Br^2\pi}{\Delta t}. \tag{14.2.4}$$

Az R ellenállású hurkon áthaladó töltés nagysága pedig

$$\Delta Q=<I>\,\Delta t=\frac{<\varepsilon>}{R}\cdot\Delta t=\frac{2Br^2\pi}{R}. \tag{14.2.5}$$

14.3. Feladat: (HN 32B-7) Egy 30 menetes lapos huzaltekercset hosszú, 4000 menet/m menetsűrűségű szolenoid végéhez illesztünk. A szolenoid és a huzaltekercs tengelye, és sugara azonos $R=5$ cm. Számítsuk ki, mekkora a szolenoidban az áramerősség változása, ha a huzaltekercsben 2 mV-os feszültség indukálódik.

Megoldás: Adatok: $N_1=30$ menet; $N_2/l=4000$ menet/m; $\varepsilon=2$ mV.
A szolenoidban I áramerősség hatására

$$B=\mu_0\frac{IN_2}{l} \tag{14.3.1}$$

mágneses indukció jön létre. Ez a huzaltekercs számára

$$\Phi=N_1BR^2\pi=\mu_0\frac{IN_1N_2R^2\pi}{l} \tag{14.3.2}$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 R^2 \pi}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{14.3.3}$$

amelyből az áramerősség időbeli változása

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{l\varepsilon}{\mu_0 N_1 N_2 R^2 \pi} = 1,69\,\mathrm{A/s}. \tag{14.3.4}$$

14.4. Feladat: (HN 32A-8) Egy 400 menetes tekercsben l2 A/s áramerősség változás hatására 28 mV-os ellenfeszültség indukálódik. Mekkora a tekercs induktivitása?

Megoldás: Adatok: $N = 100$; $\Delta I/\Delta t = 12$ A/s; $\varepsilon = 28$ mV.
Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \tag{14.4.1}$$

ahonnan az L induktivitás

$$L = \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta I} = 2,33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}. \tag{14.4.2}$$

14.5. Feladat: (HN 32A-15) Egy A keresztmetszetű és l kerületű toroid két külön tekercsből áll: mindkettőt a tórusz teljes kerülete mentén egyenletesen csévélték fel; menetszámuk N_1 és N_2,
(a) Mekkora az (önállóan használt) tekercsek L_1 és L_2 induktivitása?
(b) Mekkora a két tekercs M kölcsönös induktivitása?
(c) Mutassuk meg, hogy $M^2 = L_1 L_2$. (Ez az egyenlet csak akkor teljesül, ha bármelyik tekercs teljes fluxusa egyúttal benne van a másik tekercs belsejében is.)

Megoldás:
(a) Az L_1 és L_2 önindukciós együtthatók kiszámolása esetén hasonlóan járunk el. A mágneses indukciót az Ampère-törvény ($\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i$) segítségével határozzuk meg

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}. \tag{14.5.1}$$

A fluxus

$$\Phi = NBA = \mu_0 \frac{IN^2 A}{l}, \tag{14.5.2}$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{14.5.3}$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}. \tag{14.5.4}$$

Ezért L_1 és L_2

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}, \tag{14.5.5}$$

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 A}{l}. \tag{14.5.6}$$

(b) Az M kölcsönös indukciós együttható kiszámolása esetén az N_1 beli fluxusváltozás feszültséget indukál az N_2 tekercsben és *vice versa*. A mágneses indukció

$$B = \mu_0 \frac{I N_1}{l}. \tag{14.5.7}$$

A fluxus

$$\Phi = N_2 B A = \mu_0 \frac{I N_1 N_2 A}{l}, \tag{14.5.8}$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{14.5.9}$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \tag{14.5.10}$$

(c) Ezt követően könnyen belátható, hogy az $M^2 = L_1 L_2$ kapcsolat fenn áll.

14.6. Feladat: (HN 32B-17) Egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, N_1 menetszámú hosszú szolenoid közepére szorosan és elektromosan szigetelve egy másik, N_2 menetszámú tekercset csévélnek. Számítsuk ki a szolenoid és a tekercs kölcsönös induktivitását, elhanyagolva a tekercsvégek hatását.

Megoldás: Az N_1 menetszámú tekercsben I áramerősség hatására

$$B = \mu_0 \frac{I N_1}{l} \tag{14.6.1}$$

mágneses indukció jön létre. Ez az N_2 menetszámú huzaltekercs számára

$$\Phi = N_2 B A = \mu_0 \frac{I N_1 N_2 A}{l} \tag{14.6.2}$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{14.6.3}$$

ahonnan a kölcsönös indukciós együttható

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \tag{14.6.4}$$

14.7. Feladat: (HN 32B-18) Egy áramkör a sorba kötött, $\varepsilon = 10$ V-os feszültségforrásból, az S kapcsolóból, az $R = 50\ \Omega$ ellenállásból és az $L = 5$ H induktivitású tekercsből áll. Számítsuk ki azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy az áramerősség elérje a stacionárius állapotnak megfelelő értekének

(a) felét, illetve

(b) a 90 %-át.

Megoldás: A hurokra felírható, hogy

$$\varepsilon = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI, \tag{14.7.1}$$

ahol $I(t)$ az áramkörben folyó áram. Az egyenletet szeparálva és az integrálási határokat kijelölve írhatjuk, hogy

$$\int_0^{I(t)} \frac{\mathrm{d}I}{I - \frac{\varepsilon}{R}} = -\int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{d}t. \tag{14.7.2}$$

Az integrálást végrehajtva és az eredményt átrendezve az időfüggő áramerősség

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{14.7.3}$$

Az adatok felhasználásával a megválaszolandó időtartamok:

(a) $t = 0,069$ s és

(b) $t = 0,23$ s.

14.8. Feladat: (HN 32A-23) Számítsuk ki a 3800 menet/m menetsűrűségű,hosszú szolenoid középen a mágneses tér energiasűrűségét, ha a szolenoidon áthaladó áram erőssége 4 A. Függ-e az energiasűrűség a menetek sugarától?

Megoldás: Adatok: $N/l = 3800$ menet/m; $I = 4A$.

A mágneses indukció nagysága

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}, \tag{14.8.1}$$

amellyel a mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I^2 N^2}{l^2} = 145,2\,\mathrm{J/m^3}. \tag{14.8.2}$$

14.9. Feladat: (HN 32A-25) Egy 10 V-os telepet 5 Ω-os ellenállással és 10 H induktivitású tekerccsel kötünk sorba, és megvárjuk, amig az áramerősség állandósul. Számitsuk ki ekkor a) a telep által leadott teljesitményt; b) az ellenállás által disszipált teljesitményt; c) a tekercsben disszipált teljesitményt; d) a tekercs mágneses erőterében tárolt energiát.

Megoldás: A stacionárius állapot beállása után a tekercsen nincs indukált feszültség, ezért az áramerősség és a telep által leadott teljesítmény csak az ellenállástól függ, továbbá az ellenálláson disszipált teljesítmény megegyezik a telep által leadott teljesítménnyel:

$$I = \frac{U}{R} = 2\,\mathrm{A}. \tag{14.9.1}$$

$$P_{telep} = P_R = I^2 \cdot R = 20\,\mathrm{W}. \tag{14.9.2}$$

A tekercsben mágneses terében tárolt energia

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 = 20\,\mathrm{J}. \tag{14.9.3}$$

14.10. Feladat: (HN 32C-33) Egy 30 cm átmérőjű 2 Ω ellenállású vezető karika asztal lapján fekszik, ahol a Föld mágneses terének fluxussűrűsége 48 μT és iránya 65^o-os szöget zár be a vizszintessel. Számitsuk ki, mekkora töltés halad át a karika valamely pontján, ha azt hirtelen 180^o-kal átforditjuk.

Megoldás: A feladat analóg a **32B-3** feladattal. Az egyetlen különbség, hogy a mágneses tér és a vezető hurok síkja nem merőlegesek, ezért a fluxusban megjelenik a **B** és a felület normális vektora közötti szög koszínusza. Mivel azonban a normális vektor függőleges de a mágneses tér iránya a vízszinteshez képest van megadva, ezért a számolásnál vagy az eredeti szög színuszát, vagy a kiegészítő 25^o-os szög koszínuszát kell használni. Behelyettesítve az $R = 2\,\Omega$, $r = 0,15\,m$, és $B = 4,8 \cdot 10^{-5}\,T$ értékeket.

$$< \varepsilon >= -\frac{\Delta\,\Phi_B}{\Delta t} \tag{14.10.1}$$

$$\Phi(t=0) = \int_A \mathbf{B}\,d\mathbf{A}\,|_{t=0} = BA\,sin65^o = B\,r^2\,\pi\,sin65^o \tag{14.10.2}$$

$$\Phi(t=\Delta t)=\int_A \mathbf{B}\,d\mathbf{A}\mid_{t=\Delta t} = -B r^2 \pi\, sin65^o \tag{14.10.3}$$

$$<\varepsilon>=-\frac{2B r^2 \pi\, sin65^o}{\Delta t} \tag{14.10.4}$$

$$\Delta Q =< I > \Delta t = \frac{<\varepsilon>}{R}\cdot\Delta t = \frac{2B r^2 \pi\, sin65^o}{R} \tag{14.10.5}$$

$$quad = \frac{2\cdot 4,8\cdot 10^{-5}\cdot 0,15^2\cdot\pi\cdot sin65^o}{2} = \underline{3.075\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}. \tag{14.10.6}$$

14.11. Feladat: (HN 32C-35) A 89 ábrán vázolt áramkör homogén, időben egyenletesen csökkenő fluxussűrűségű mágneses erőtérben helyezkedik el. dB/dt = —k, ahol k pozitiv állandó. Az áramkör egy *a* sugarú hurok, melyben egy *R* ellenállás és egy *C* kapacitású kondenzátor van (az utóbbi lemezei az ábra szerinti módon helyezkednek el). a) Mekkora a kondenzátor maximális *Q* töltése? b) A kondenzátor melyik lemezének nagyobb a potenciálja? c) Elemezzük, hogy milyen erők okozzák a töltések szétválását.

89. ábra. A 32C-35 feladathoz

Megoldás: A körben indukált feszültség nagyságát a fluxusváltozás sebességéből kapjuk meg

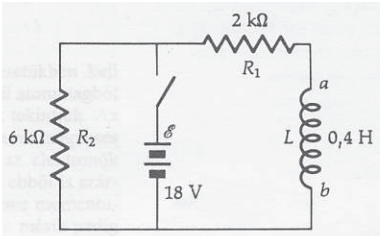
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB a^2\pi}{dt} = k a^2 \pi \tag{14.11.1}$$

Ez állandó. Az állandó feszültségre kapcsolt kondenzátor töltése exponenciálisan közelíti a maximális töltést, aminek elérése után a kondenzátor feszültsége és az indukált feszültség azonos nagyságú és ellentétes irányú, vagyis a maximális töltés a $C\cdot\varepsilon = Q_{max}$ egyenletből számítható ki. Innen

$$Q_{max} = C k a^2 \pi \tag{14.11.2}$$

Az indukált elektromos tér önmagukban záródó erővonalai a mágneses tér megváltozására merőleges síkú körök. Irányukat a balkéz-szabály alapján lehet meghatározni: mivel az indukcióvektor $d\mathbf{B}$ megváltozása a lap síkjából kifelé mutat az $\mathbf{E}$ erővonalak az óramutató járásával megegyező irányba mutatnak, ezért a pozitív töltések a kondenzátor felső lapján gyűlnek össze. A töltések szétválását a mágneses indukciófluxus változása okozza.

14.12. Feladat: (HN 32C-40) A 90. ábra áramkörében lévő kapcsolót zárjuk és megvárjuk, amíg az áramerősségek állandósulnak. Ezután a kapcsolót nyitjuk; ennek pillanata legyen $t = 0$.
(a) Számítsuk ki az L tekercsben indukálódó ε_0 feszültséget közvetlenül a kapcsoló nyitása után. A tekercs melyik vége pozitívabb potenciálú, a vagy b?
(b) Vázoljuk fel az R_1 és R_2 ellenállásokon átfolyó áram időtől való függését a $t < 0$ és $t > 0$ időtartományban (a stacionárius áramerősségeket válasszuk pozitív előjelűeknek).
(c) A kapcsoló nyílása után mennyi idő elteltével csökken az R_2 ellenálláson átfolyó áram erőssége 2 mA-re?



90. ábra.

Megoldás: X

14.13. Feladat: (HN 32C-45) Egy R sugarú hengeres vezetőn I_0 erősségű áram halad át; az áramsűrűség a vezető keresztmetszetén egyenletes. Határozzuk meg a vezető belsejében egységnyi hosszúságú szakaszra jutó mágneses energia nagyságát. (Útmutatás: mekkora a mágneses energia egy l hosszúságú, r ($r < R$) sugarú dr vastagságú hengerpalástban (csőben)?

Megoldás: Jelölje j_0 a keresztmetszeten egyenletes áramsűrűséget. Ekkor az $R^2\pi$ teljes felületen folyó I áramerősség

$$I_0 = j_0 R^2 \pi, \tag{14.13.1}$$

míg az $r < R$ sugárhoz tartozó $r^2\pi$ felületen

$$I(r) = j_0 r^2 \pi. \tag{14.13.2}$$

Ezekből

$$I(r) = I_0 \frac{r^2}{R^2}. \tag{14.13.3}$$

Az Ampère-törvény szerint

$$B(r)2r\pi = \mu_0 I(r), \tag{14.13.4}$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}. \tag{14.13.5}$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 I_0^2 r^2}{8\pi^2 R^4}. \tag{14.13.6}$$

14.14. Feladat: (HN 32C-46) Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a J áramsűrűség a henger sugara mentén lineárisan változik, azaz $J(r) = J_0 r$.

(a) Fejezzük ki a teljes I_0 áramot J_0 és R függvényeként.

(b) Adjuk meg a vezető belsejében hosszegységenként tárolt mágneses energia nagyságát.

Megoldás:

(a) A henger keresztmetszetén a felületelem $\mathrm{d}A = 2r\pi\mathrm{d}r$, amellyel r sugárhoz tartozó áram

$$I(r) = \int_0^r J(r)\mathrm{d}A = \int_0^r J_0 r 2r\pi \mathrm{d}r = 2\pi J_0 \int_0^r r^2 \mathrm{d}r = \frac{2\pi J_0}{3} r^3. \tag{14.14.1}$$

A teljes keresztmetszeten folyó áram

$$I_0 = I(R) = \frac{2\pi J_0}{3} R^3. \tag{14.14.2}$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$B(r)2r\pi = \mu_0 I(r), \tag{14.14.3}$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 j_0}{3} r^2. \tag{14.14.4}$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 j_0^2}{18} r^4. \tag{14.14.5}$$

A hosszegységenkénti energia a következő felületi integrál kiszámolását jelenti:

$$E_h = \int \varepsilon_B \mathrm{d}A = \int_0^R \varepsilon_B 2r\pi \mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\mu_0 j_0^2}{18} r^4 2r\pi \mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\mu_0 j_0^2 \pi}{9} r^5 = \frac{1}{54}\mu_0 j_0^2 \pi R^6. \tag{14.14.6}$$

14.15. Feladat: (HN 33B-4) Egy 25 cm hosszú, sűrűn tekercselt, 600 menetű szolenoidon 30 mA erősségű áram folyik it. Számitsuk ki H és B nagyságát a szolenoid középpontjában (a) ha a szolenoid légmagos és (b) ha a szolenoid magja 45 Permalloyból készült, melynek szuszceptibilitása a maximális telítési értéknek háromnegyede.

Megoldás: A szolenoid középpontjában

$$H = \frac{I \cdot N}{\ell} \tag{14.15.1}$$

$$B = \mu \frac{I \cdot N}{\ell} \qquad (\mu = \mu_r \cdot \mu_0) \tag{14.15.2}$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$. Mivel H képletében nem szerepel a permeabilitás az ugyanakkora lesz légmagos és vasmagos tekercsre. Légmagos tekercsre $\mu_r^{(1)} = 1$. A HN könyv 33-1 táblázatából a 45 Permalloy mágneses szuszceptibilitása $\chi = 25000$, ennek 3/4-ével ($\chi = 18750$) kell számolni a feladatban, vagyis $\mu_r^{(2)} = 1 + \chi = 18751$. Ezekkel az adatokkal

$$H^{(1)} = H^{(2)} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 600}{0,25} = 72 \frac{A}{m} \tag{14.15.3}$$

$$B^{(1)} = \mu_0 \cdot H = 9.048 \cdot 10^{-5} \frac{Vs}{m^2} \tag{14.15.4}$$

$$B^{(2)} = \mu_0 \mu_r \cdot H = 1.697 \frac{Vs}{m^2}. \tag{14.15.5}$$

14.16. Feladat: (HN 33B-8) Egy 50 cm kerületű toroid tekercs 1000 menetű és rajta 200 mA erősségű áram halad it. A vasmag olyan anyagból készült, amelynek telítési szuszceptibilitása 3000. (a) Számitsuk ki a B mágneses indukcióvektort a magban, ha anyaga 85%-ig telítődött. (b) Számitsuk ki a H mágneses térerősséget a tekercs belsejében. (c) Számitsuk ki B azon részét, amely csak tekercsben folyó áramtól ered.

Megoldás: Sűrűn tekercselt toroidra hasonló képletek adhatóak meg, mint szolenoidra, csak a tekercs hossza helyett a szolenoid középvonalának hosszát kell használni, ami az esetünkben - mivel a toroid átmérőjét nem adták meg, tehát elhanyagolhatónak tekinthetjük - $K = 0,5$ m. Behelyettesítve az egyes kérdésekre adott válaszok (célszerű először a (b) és utána az (a) kérdésre kiszámolni az eredményt):

$$b) \quad H = \frac{I \cdot N}{K} = \frac{0,2 \cdot 1000}{0,5} = 400 \frac{A}{m} \tag{14.16.1}$$

$$a) \quad B = \mu_r \mu_o \cdot H = 1.257 \cdot 10^{-6} \cdot (3000 \cdot 0,85 + 1) \cdot 400 = 1,282\,T \tag{14.16.2}$$

$$c) \quad B_{lev} = \mu_o \cdot H = 1.257 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 5.027 \cdot 10^{-4}\,T. \tag{14.16.3}$$

14.17. Feladat: (HN 33C-9) Hosszú, vasmagos szolenoid sugara 1,25 cm; menetsűrűsége 1200 menet/m. Erre a tekercsre szorosan egy másik, 40 menetű tekercset is csévélünk, amelynek teljes ellenállása 5 Ω. Az utóbbi tekercs két kivezetését rövidre zárjuk. A szolenoidon 50 mA erősségű áramot indítunk, aminek következtében a vas mágnesesen teljesen telítődik. A második tekercsben a mágneses indukció változása következtében áram indukálódik. Számítsuk ki e tekercs valamely pontján áthaladó töltés mennyiségét.

Megoldás: Adatok: $r = 1,25$ cm; $N_1/l = 1200$ menet/m; $N_2 = 40$ menet; $R = 5\Omega$; $I = 50$ mA. A vas relatív mágneses permeabilitása $\mu_r = 5000$.
A lemágnesezéshez használt tér

$$B = \mu_0\mu_r\frac{IN_1}{l}, \tag{14.17.1}$$

amely a másik tekercsben

$$\Delta\Phi = N_2\mu_0\mu_r\frac{IN_1}{l}r^2\pi \tag{14.17.2}$$

fluxusváltozást jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{14.17.3}$$

Ez az R ellenálláson

$$I' = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \tag{14.17.4}$$

áramot jelent, amely a Δt idő alatt

$$Q = I'\Delta t = \frac{\varepsilon}{R}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = N_2\mu_0\mu_r\frac{IN_1}{lR}r^2\pi = 1,48\cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}. \tag{14.17.5}$$

töltés átáramlását jelenti.

Váltakozó áramú áramkörök

14.18. Feladat: (HN 34A-6) Sorbakapcsolt RC körre ($R = 30\Omega$, $C = 10\mu$F) $U(t) = U_0\cdot\sin\omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100$ V; $\omega = 2500$ 1/s.)
(a) Mekkora az áramkör impedanciája?
(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!
(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!
(d) Számítsuk ki a kondenzátor elektromos erőterében tárolt maximális energiát!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 50\,\Omega. \tag{14.18.1}$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 2\,\mathrm{A}, \tag{14.18.2}$$

a fázisszög

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1/\omega C}{R}\right) = -53,1^0 = -0,927\,\mathrm{rad}. \tag{14.18.3}$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2 \cdot \sin(2500t + 0,927)$ A.

(c) Az ohmikus és kapacitív elenállás $R = 30\Omega$ illetve $X_C = 1/\omega C = 40\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 60$ V és $U_{C0} = 80$ V.

(d) A kondenzátor maximális energiája

$$E_C = \frac{1}{2} C U_{C0}^2 = 0,032\,\mathrm{J}. \tag{14.18.4}$$

14.19. Feladat: (HN 34A-7) Sorbakapcsolt RL körre ($R = 30\Omega$, $L = 15$ mH) $U(t) = U_0 \cdot \sin\omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100$ V; $\omega = 2500$ 1/s.)

(a) Mekkora az áramkör impedanciája?

(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!

(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!

(d) Számítsuk ki a tekercs mágneses erőterében tárolt maximális energiát!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 48,02\,\Omega. \tag{14.19.1}$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 2,08\,\mathrm{A}, \tag{14.19.2}$$

a fázisszög

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 51,3^0 = 0.896\,\mathrm{rad}. \tag{14.19.3}$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2,08 \cdot \sin(2500t - 0,896)$ A.

(c) Az ohmikus és az induktív reaktancia $R = 30\Omega$ illetve $X_L = L\omega = 37,5\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 62,4$ V és $U_{L0} = 78$ V.

(d) A kondenzátor maximális energiája

$$E_L = \frac{1}{2} L I_0^2 = 0,032\,\mathrm{J}. \tag{14.19.4}$$

14.20. Feladat: (HN 34A-8) Sorbakapcsolt RLC körre ($R = 30\Omega$, $L = 15$ mH, $C = 10\mu$F) $U(t) = U_0 \cdot \sin\omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100$ V; $\omega = 2500$ 1/s.)

(a) Mekkora az áramkör impedanciája?

(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!

(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 30,1\,\Omega. \tag{14.20.1}$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 3,32\,\mathrm{A}, \tag{14.20.2}$$

a fázisszög

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = 4,76^0 = 0.083\,\mathrm{rad}. \tag{14.20.3}$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2,08 \cdot \sin(2500t - 0,083)$ A.

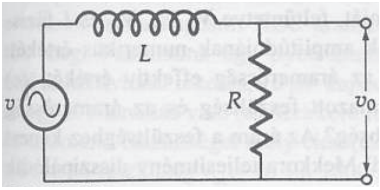
(c) Az ohmikus ellenállás, az induktív reaktancia illetve a kapacitív ellenállás $R = 30\Omega$, $X_L = L\omega = 37,5\Omega$ illetve $X_C = 1/\omega C = 40\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 99,6$ V, $U_{L0} = 124,5$ V illetve $U_{C0} = 132,8$ V.

14.21. Feladat: (HN 34B-11) Tekintsünk egy fázistoló áramkört (91. ábra). A bemenetre adott feszültség $V(t) = V_{be} sin\omega t$ ($V_{be} = 10$ V; $\omega = 200$ 1/s). Ha $L = 500$ mH,

(a) számítsuk ki R értékét, hogy a kimeneten megjelenő V_0 feszültség 30^0-nyit késsen V-hoz képest és

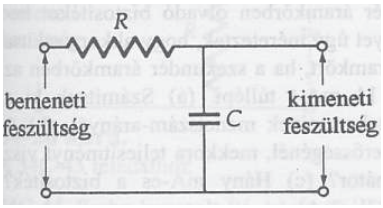
(b) számítsuk ki a V_0 amplitúdóját.

Megoldás: X



91. ábra.

14.22. Feladat: (HN 34B-12) A 92. ábrán látható áramkört aluláteresztő szűrőnek nevezik. A kondenzátor impedanciája nagyobb frekvenciákon kisebb, így a kimenő feszültség is kisebb. A szűrő karakterisztikus vagy ún. levágási frekvenciájánál a kimenő feszültség a bemenő feszültség $1/\sqrt{2}$-szerese.
(a) Fejezzük ki a levágási frekvenciát R és C függvényeként.
(b) Mekkora ezen a frekvencián a kimenő és bemenő feszültség közötti fáziskülönbség?



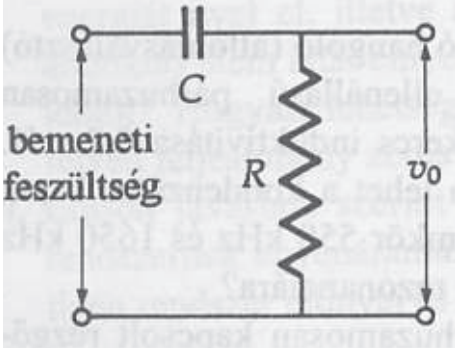
92. ábra.

Megoldás: X

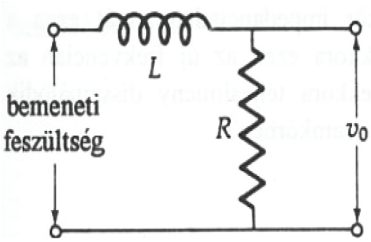
14.23. Feladat: (HN 34B-29) A 93. ábrán látható áramkört felüláteresztő szűrőként lehet használni. Elegendően nagy frekvenciákon, ha a bemenetre V_{eff} effektív értékű feszültséget kapcsolunk, az ellenálláson V_{eff}^2/R teljesítmény disszipálódik. Milyen frekvencián disszipálódik e teljesítmény fele?

Megoldás: X

14.24. Feladat: (HN 34C-43) Tekintsük a 94. ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a v_{ki} kimenő feszültség közelítőleg arányos a bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha az R ellenállás az induktiv



93. ábra.



94. ábra. A 34C-43 feladathoz

reaktanciánál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak).

Megoldás: A v_{ki} kimenő feszültség az R ellenálláson eső $I \cdot R$ feszültség. Kirchoff huroktörvénye szerint

$$U_{be} - L\frac{dI}{dt} - I \cdot R = 0 \tag{14.24.1}$$

$$\frac{dI}{dt} + I \cdot \frac{R}{L} - \frac{U_{be}}{L} = 0. \tag{14.24.2}$$

Az induktiv reaktancia $X_L = \omega L$. Ha $R \ll \omega L$ minden ω-ra, akkor a második tag az I áramban jelen levő összes frekvenciára elhanyagolható[9] (közelítőleg 0), tehát az egyenlet leegyszerűsödik

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{U_{be}}{L} \tag{14.24.3}$$

Ennek megoldása

$$I(t) = \frac{1}{L}\int U_{be}\, dt. \tag{14.24.4}$$

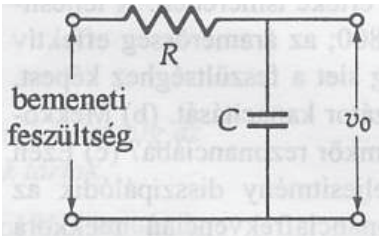
Tehát a kimenő feszültség közelítőleg valóban arányos a bemenő feszültség idő szerinti integrál-

[9] Pl. $\omega = 1\,s^{-1}$ -re is, amikor $\frac{R}{\omega L} = \frac{R}{L}$

jával.

$$v_{ki} = I(t) \cdot R = R \cdot \frac{1}{L} \cdot \int U_{be}\, dt. \tag{14.24.5}$$

14.25. Feladat: (HN 34C-49) Tekintsük a 95. ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a V_0 kimenő feszültség közelítőleg arányos a V bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha a kapacitív reaktancia az R ellenállásnál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak.



95. ábra.

Megoldás: X

15. Feladatok az elektromágneses hullámok témaköréből

Az eltolódási áram

15.1. Feladat: (HN 35B-2) Síkkondenzátor lemezei l0 cm átmérőjűek és 1 mm-es távolságban vannak egymástól. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor szélénél, ha a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség 1000 V/s sebességgel nő? (Az elektromos erőtér inhomogenitását a lemezek szélénél el lehet hanyagolni.)

Megoldás: Jelölések: $D = 2r = 10$ cm, r a lemezek sugara; $d = 1$ mm; $\Delta U/\Delta t = 1000$ V/s.
Az elektromos térerősség változása

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{d}\frac{\Delta U}{\Delta t}. \tag{15.1.1}$$

Az gyik Maxwell-egyenlet értelmében a változó elektromos tér mágneses teret kelt, azaz

$$\oint B\mathrm{d}s = \mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta t}r^2\pi. \tag{15.1.2}$$

Ebből következik, hogy

$$B2r\pi = \mu_0\varepsilon_0\frac{1}{d}\frac{\Delta U}{\Delta t}r^2\pi, \tag{15.1.3}$$

amelyből a mágneses indukció

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2d}\frac{\Delta U}{\Delta t} = 2,78\cdot 10^{-13}\,\mathrm{Vs/m^2}. \tag{15.1.4}$$

15.2. Feladat: (HN 35B-4) Egy 0,5 μF-os síkkondenzátort 100 Ω-os ellenálláson keresztül 9 V-os telepről töltünk. Számítsuk ki a kondenzátoron folyó eltolódási áramot a töltés megkezdése után 50 μs eltelte után.

Megoldás: Jelölések: $C = 0,5$ μF; $R = 100$ Ω; $\varepsilon = 9$ V; $t = 50$ μs.
Az eltolódási áram

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{15.2.1}$$

ahonnan a kérdezett időpontban

$$I = 0,0332\,\mathrm{A}. \tag{15.2.2}$$

Elektromágneses hullámok

15.3. Feladat: (HN 35A-8) Az elektromágneses hullám mágneses indukcióvektorának az amplitúdója vákuumban $3\cdot 10^{-8}$ T.
(a) Számítsuk ki a megfelelő elektromos térerősség amplitúdóját.
(b) Ha az elektromos térerősség -y irányú és a hullám -x irányban terjed, milyen irányú a mágneses indukcióvektor?

Megoldás:
(a) Ha a mágneses indukcióvektor amplitúdója $B_0 = 3\cdot 10^{-8}$ T, akkor az elektromos térerősség amplitúdója

$$E_0 = B_0 c = 9\,\mathrm{V/m}. \tag{15.3.1}$$

(b) A mágneses indukcióvektor +z irányú.

15.4. Feladat: (HN 35A-13) Az URH rádió által vett elektromágneses hullám elektromos térerősség-komponensének amplitúdója $5 \cdot 10^{-5}$ V/m.
(a) Mekkora az ehhez tartozó mágneses indukcióvektor amplitúdója?
(b) Számítsuk ki a hullám intenzitását.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ V/m
(a) A mágneses indukció amplitúdója

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,67 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{Vs/m^2}. \tag{15.4.1}$$

(b) A hullám intenzitása

$$I = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = 3,32 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}. \tag{15.4.2}$$

15.5. Feladat: (HN 35B-15) Egy +x irányban terjedő elektromágneses síkhullám elektromos térerősség-komponensét SI egységekben az $\mathbf{E} = 6\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]\sin(kx - 10^{16}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]t)\mathbf{j}$ függvény írja le.
(a) Írjuk fel a mágneses indukcióvektor jellemző képletét is.
(b) Számítsuk ki a sugárzás hullámhosszát.
(c) Számítsuk ki a sugárzás átlagos energiasűrűségét.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 6$ V/m, $\omega = 10^{16}$ 1/s.
(a) A mágneses indukcióvektor

$$\mathbf{B} = 2 \cdot 10^{-8}\left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}}\right]\sin(kx - 10^{16}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]t)\mathbf{k}. \tag{15.5.1}$$

(b) A terjedési sebesség $c = \omega/k$, ahonnan a k (cirkuláris) hullámszám

$$k = \frac{\omega}{c}, \tag{15.5.2}$$

amellyel a hullámhossz

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = 1,88 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}. \tag{15.5.3}$$

(c) A sugárzás energiasűrűsége

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = 1,59 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J/m^3}. \tag{15.5.4}$$

15.6. Feladat: (HN 35B-17) Impulzuslézer 4 ns hosszúságú, 2 J energiájú fényimpulzusokat ad le. A fénynyaláb átmérője 3 mm.

(a) Számitsuk ki a kibocsátott fénynyaláb hosszát.

(b) Számitsuk ki a fénynyaláb energiasűrűségét (J/m^3 egységben).

(c) Mekkora a hullám E_o, elektromos térerősség komponensének az amplitúdója?

Megoldás: Jelölések: $t = 4 \cdot 10^{-9} s$, $\varepsilon = 2J$, $d = 3 \cdot 10^{-3} m$ és $A = \dfrac{d^2\pi}{4}$

(a) A fénynyaláb hossza $l = c \cdot t = 1,199m$.

(b) Energiasűrűsége $w = \dfrac{\varepsilon}{Al} = \dfrac{4\varepsilon}{l d^2 \pi} = 2.360 \cdot 10^5 \frac{J}{m^3}$

(c) E amplitudója:

A $\mathbf{S} = \dfrac{1}{\mu}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Poynting vektor megadja a terjedési irányra merőleges egységnyi felületen, idő-egység alatt átáramló energia mennyiségét. Vákumban $\mu \equiv \mu_o$. Az EM hullámokban $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ egymásra merőlegesek, továbbá $E = cB$ ezért $B = \dfrac{E}{c}$, vagyis

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_o} E \cdot B = \frac{E^2}{c\,\mu_o} \tag{15.6.1}$$

A lézer fényét elektromágneses síkhullámnak tekinhetjük, amiben a nyaláb keresztmetszetén t idő alatt ε energia áramlik át. Ez kifejezhető a Poynting vektor periodusidőre vett integráljával, vagy, ekvivalens módon, a Poynting vektor átlagának, a nyaláb keresztmetszetének és az időnek a szorzatával,azaz

$$\begin{aligned} \varepsilon &= < S > \frac{d^2\pi}{4} t \\ &= \frac{1}{c\,\mu_o} < E^2 > \frac{d^2\pi}{4} t \end{aligned} \tag{15.6.2}$$

$$< E^2 >= \frac{4\varepsilon\, c\,\mu_o}{d^2\,\pi\, t} \tag{15.6.3}$$

Ha E harmonikus (színusz, vagy koszinusz) függvény, akkor négyzetének átlaga helytől függetlenül az amplitudójának éppen a fele[10]:

$$< E^2 >= \frac{1}{T}\int_0^T E_o^2 sin^2(\omega t - kx)\, dt = \frac{1}{2} E_o^2 \tag{15.6.4}$$

[10]

$$\begin{aligned} < E^2 > &= \frac{1}{T}\int_0^T E_o^2 sin^2(\omega t - kx)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T E_o^2 \frac{1 - cos2(\omega t - kx)\, dt}{2} \\ &= E_o^2 \frac{1}{T}\left[\frac{t}{2}\right]_0^T - E_o^2 \frac{1}{2T}\int_0^T cos2(\omega t - kx)\, dt = \frac{E_o^2}{2} - \frac{E_o^2}{4\omega T}\left[sin2(\omega t - kx)\right]_0^T \\ &= \frac{E_o^2}{2} - \frac{E_o^2}{4\omega T}\left(sin2(2\pi - kx) - sin(-2kx)\right) = \frac{E_o^2}{2} \end{aligned}$$

Tehát (15.6.3)-ből

$$E_o = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot \varepsilon c \mu_o}{d^2 \pi t}} \tag{15.6.5}$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot 2J \cdot 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{(3 \cdot 10^{-3})^2 m^2 3.1415}} = 2.309 \cdot 10^8 \frac{V}{m}. \tag{15.6.6}$$

15.7. Feladat: (HN 35A-22) Egy 100 mW-os lézernyaláb egy tükörről merőlegesen visszaverődik. Mekkora erő hat a tükörre?

Megoldás: Jelölés: $P_{telj} = 100$ mW.
A sugárzás U energiája és p impulzusa között összefüggés:

$$U = pc. \tag{15.7.1}$$

Az t időegységgel osztva a P_{telj} teljesítmény és az F erő között a

$$P_{telj} = Fc \tag{15.7.2}$$

kapcsolat áll fenn. Mivel tökéletes visszaverődésről van szó, így az impulzus változás és – ennek megfelelően – az erőhatás kétszeres lesz, azaz

$$F = \frac{2P_{telj}}{c} = 6,66 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}. \tag{15.7.3}$$

15.8. Feladat: (HN 35A-23) Tiszta időben a Föld felszínen a napfény intenzitása 840 W/m^2. Ha egy, a napsugarakra merőleges felület tökéletesen reflektál, mekkora rajta a sugárnyomás?

Megoldás: Tökéletes reflexió esetén a sugárnyomás

$$p_{ny} = \frac{2I}{c} = 5,6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}, \tag{15.8.1}$$

ahol I a napfény intenzitása.

15.9. Feladat: (HN 35B-25) Egy 15 mW teljesitményű hélium-neon lézer kör keresztmetszetű fénynyalábot bocsát ki. A nyaláb átmérője 2 mm, a fény hullámhossza 632,8 nm.
(a) Mekkora a nyalábban az elektromos térerösség maximális értéke?

(b) Mekkora energia van a nyaláb 1 méteres szakaszában?

(c) Mekkora impulzusa van a nyaláb 1 méteres szakaszának?

Megoldás:

(a) Jelöljük P, d, λ, E_o-val rendre a teljesítményt, átmérőt, hullámhosszat és a térerősség amplitudóját!

Első megoldás: Poynting vektorral

Ez a feladat csak annyiban különbözik az előzőtől, hogy most a teljesítmény van megadva és nem a leadott teljes energia és az energialeadás ideje. Vagyis a 15.6.5 képletbe ε/t helyére kell P-t helyettesíteni:

$$\begin{aligned} E_o &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot P c \mu_o}{d^2 \pi}} = \\ &= \sqrt{\frac{8 \cdot 15 \cdot 10^{-3} W \cdot 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{V s}{A m} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{(2 \cdot 10^{-3})^2 m^2 3.1415}} \\ &= \underline{1.897 \cdot 10^3 \frac{V}{m}} \end{aligned} \tag{15.9.1}$$

Második megoldás: Energiasűrűséggel

A $T = \dfrac{\lambda}{c}$ periódusidő alatt kisugárzott energia $w = P \cdot T$ és ez az energia egy $V = d^2 \pi \lambda / 4$ térfogatban oszlik el. Az átlagos energiasűrűség

$$\begin{aligned} < w > &= \frac{\Delta w}{V} = \frac{4 P \cdot T}{d^2 \pi \lambda} = \frac{4 P}{d^2 \pi c} \\ < w > &= \frac{4 P}{d^2 \pi c} \end{aligned} \tag{15.9.2}$$

Ugyanakkor vákumban

$$< w >= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o < E^2 > + \frac{1}{\mu_o} < B^2 > \right) \tag{15.9.3}$$

A lézer által kisugárzott fény egy EM síkhullám, tehát az elektromos és mágneses energasűrűség

átlagai benne egyenlőek[11]

$$\varepsilon_o < E^2 >= \frac{1}{\mu_o} < B^2 > \tag{15.9.9}$$

$$\begin{aligned} < w > &= \varepsilon_o < E^2 > \\ &= \varepsilon_o E_o^2 \cdot < sin^2(kx-\omega t) > \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_o E_o^2 \end{aligned} \tag{15.9.10}$$

ahonnan, mivel $< w >= P \cdot T$

$$\begin{aligned} E_o &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot P}{d^2 \pi \varepsilon_o c}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 15 \cdot 10^{-3} W}{(2 \cdot 10^{-3})^2 m^2 \, 3.1415 \, 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \, 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}} \\ &= \underline{1,897 \cdot 10^3 \, \frac{V}{m}} \end{aligned} \tag{15.9.11}$$

(b) A nyaláb $l = 1\,m$ hosszúságú darabjában levő energia:

$$\varepsilon = P \cdot t_l = P \cdot \frac{l}{c} = 15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2.998 \cdot 10^8} = 5.004 \cdot 10^{-11} J \tag{15.9.12}$$

(c) A fény impulzusa és energiája közötti kapcsolat:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = 1.669 \cdot 10^{-19} kg\,m/s. \tag{15.9.13}$$

15.10. Feladat: (HN 35C-33) Elektromágneses sugárzást kibocsátó forrás hosszú egyenes mentén sugároz (vonalforrás); teljesítménye méterenként 20 W. Mekkora az elektromos térerősség amplitúdója a vonalforrástól 5 m-re?

[11] Levezetés: $cB = E$, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$, azaz $B = \sqrt{\varepsilon_o \mu_o} E$

$$\begin{aligned} < w > &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_o < E^2 > + \frac{1}{\mu_o} < B^2 >\right) && (15.9.4) \\ &= c\frac{1}{2}\left(\varepsilon_o < E^2 > + \varepsilon_o < E^2 >\right) && (15.9.5) \\ &= \varepsilon_o < E^2 >= \varepsilon_o < E_o^2 \cdot sin^2(kx-\omega t) > && (15.9.6) \\ &= \varepsilon_o E_o^2 \cdot < sin^2(kx-\omega t) > && (15.9.7) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_o E_o^2 && (15.9.8) \end{aligned}$$

Megoldás: Jelölések: $P = 20$ W /nem feledve, hogy méterenként/; $r = 5$ m. Mivel vonalforrásról van szó, így egy r sugarú és $l = 1$ m hengerpalásttal számolunk. /Itt vesszük figyelembe az méterenkénti hosszt./
A kisugárzott S energiaáram sűrűség egyrészt az

$$S = \frac{P}{2r\pi l}, \tag{15.10.1}$$

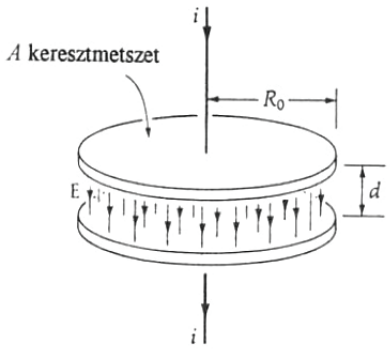
másrészt az

$$S = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \tag{15.10.2}$$

alakban írható fel. A (15.10.1) és (15.10.2) egyenletek egyenlőségéből a térerősség amplitúdója

$$E_0 = \sqrt{\frac{p\mu_0 c}{r\pi l}} = 21,9\,\text{V/m}. \tag{15.10.3}$$

15.11. Feladat: (HN 35C-37) Síkkondenzátort i áramerősséggel töltünk (96. ábra).



96. ábra. A 35C-37 feladathoz

(a) Mutassuk meg, hogy mialatt az elektromos térerősség növekszik, az **S** Poynting-vektor a lemezek közötti térben mindenütt a kondenzátor tengelye felé mutat. (A lemezek szélénél a térerősség inhomogenitásait figyelmen kívül hagyhatjuk.)

(b) Ha a Poynting vektort a kondenzátort körbevevő hengerpalást mentén integráljuk, akkor a felület által bezárt térrészbe áramló energia nagyságát kapjuk meg. Mutassuk meg, hogy ez az energiaáram egyenlő a kondenzátor elektromos erőterében tárolt energia növekményével. (Ebben az értelemben, a kondenzátor energiája nem az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik".)

Megoldás:

(a)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_o}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{15.11.1}$$

Ha **E** változik, akkor ennek hatására önmagukba záródó mágneses erővonallakkal jellemezhető **B** tér indukálódik a

$$\frac{1}{\mu_o}\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = \int \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,d\mathbf{A} \tag{15.11.2}$$

egyenlet szerint. Az indukált mágneses tér merőleges az elektromos tér változására és egy adott r távolságban a kondenzátor tengelyétől mindenhol ugyanakkora nagyságú. Amennyiben $d\mathbf{s}$-et **H**-val párhuzamosnak választjuk a baloldali integrál:

$$\frac{1}{\mu_o}\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = 2\pi r \frac{1}{\mu_o} B. \tag{15.11.3}$$

A jobboldali integrált a baloldali integrálás zárt görbéjére illeszkedő tetszőleges felületre kell venni. Legyen ez a felület a kondenzátorlemezekkel párhuzamos körlap. Mivel a lemezek között mind **E**, mind $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ homogén és lefelé mutat, vagyis párhuzamos a felület normálvektorával, ez az integrál is egyszerűen kiszámítható:

$$\int \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,d\mathbf{A} = \varepsilon_o \frac{dE}{dt}\cdot r^2\pi \tag{15.11.4}$$

Behelyettesítve 15.11.2 egyenletbe

$$2\frac{1}{\mu_o}B = \varepsilon_o r \frac{dE}{dt} \tag{15.11.5}$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_o \varepsilon_o r \frac{dE}{dt} \tag{15.11.6}$$

Az **E** vonalak az ábrán lefelé mutatnak. Az **E** nő, ezért $\Delta\mathbf{E}$ változása azonos irányú vele, vagyis a mágneses erővonalak a lemezek síkjával párhuzamos, a pozitív lemez irányából nézve az óramutató járásával megegyező irányú, körök. **S** iránya minden pontban mind **E**-re, mind **B**-re merőleges, így a kondenzátor tengelye felé (befelé) mutat. **S** integrálja a kondenzátort körülvevő hengerpalástra [12] megadja az energiaáramlás fluxusát:

$$\begin{aligned}\Phi(\varepsilon) &= \oint \mathbf{S}\,d\mathbf{A} = 2\pi r d\cdot|\mathbf{S}| = 2\pi r d\cdot E\cdot\frac{1}{\mu_o}B \\ &= 2\pi r d\cdot E\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_o r\frac{dE}{dt} \\ &= \varepsilon_o r^2\pi d E\frac{dE}{dt}\end{aligned} \tag{15.11.7}$$

[12] A dA felületelem irányát a tengely felé mutató irányba vesszük fel.

Mivel ez a kondenzátor belseje felé mutat a kondenzátor energiája időegységenként ennyivel növekszik.

$$\Delta\varepsilon_C(\Delta t) = \Phi(\varepsilon)\Delta t = \varepsilon_o r^2 \pi E \frac{dE}{dt}\Delta t\, d \tag{15.11.8}$$

A kondenzátor energiájának kis Δt idő alatti növekedését az árammal is kiszámolhatjuk:

$$\Delta\varepsilon_C(\Delta t) = \Delta q \cdot U_C = i \cdot \Delta t \cdot U_C \tag{15.11.9}$$

$$= i \cdot \Delta t \cdot E \cdot d = i \cdot E \cdot \Delta t \cdot d \tag{15.11.10}$$

Az i áram azonban a lemezek között nulla. Nagysága azonban megegyezik a $j_{elt} = \varepsilon_o \frac{dE}{dt}$ *eltolási áramsűrűség*

$$i_{elt} = j_{elt} A = \varepsilon_o \frac{dE}{dt} \cdot A \tag{15.11.11}$$

fluxusával, az i_{elt} *eltolási árammal*, ahol $A = r^2\pi$. Behelyettesítve:

$$\Delta\varepsilon_C(\Delta t) = \varepsilon_o \frac{dE}{dt} \cdot r^2 \pi E \cdot \Delta t \cdot d$$

$$= \varepsilon_o r^2 \pi E \frac{dE}{dt}\Delta t\, d \tag{15.11.12}$$

Láthatjuk, hogy 15.11.8 és 15.11.12 valóban megegyeznek. A feladat állítását ezzel igazoltuk.

16. Feladatok a geometriai optika témaköréből

Fénytörés

16.1. Feladat: (HN 37B-2) Ha keskeny lézernyaláb vastag üveglemezről verődik vissza, akkor két párhuzamos nyaláb keletkezik. Az egyik a lemez előlapjáról, a másik a lemez hátlapjáról verődik vissza. Tegyük fel, hogy a beesési szög θ, a lemez vastagsága D, a lemez üvegének törésmutatója n. Adjuk meg a két visszavert sugár merőleges d távolságát θ, D és n függvényében.

Megoldás: X

16.2. Feladat: (HN 37B-11) Nyugodt vizű tó fenekén lévő hal a vízfelszín felett a tájnak, a haltól induló, függőleges tengelyű körkúpba eső részét láthatja. Számoljuk ki azt a térszöget (szteradiánokban), amelyet a hal szeme befog.

Megoldás: X

16.3. Feladat: (HN 37C-37) Vezessük le a Snellius fénytörési törvényt a Fermat-elvből kiindulva.

Megoldás: Legyen a két közeg határa az x tengely. Az x tengely feletti anyag törésmutatója n_1, a tengely alatti anyag törésmutatója n_2. A fénysugár induljon az n_1 közeg (x_1, y_1) pontjából és érkezzen meg az n_2 közeg $(x_2, -y_2)$ pontjába. Az áthaladási pont koordinátája $(x, 0)$. Az x koordináták között álljon fenn: $x_1 < x < x_2$. A Fermat-elv értelmében az optikai út (eikonál) minimális:

$$S(x) = \int_{(1)}^{(2)} n\,ds = n_1\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2} + n_2\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2} = \text{min.}, \tag{16.3.1}$$

azaz

$$\frac{dS(x)}{dx} = 0 = n_1 \underbrace{\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}}_{\sin\alpha} + n_2 \underbrace{\frac{x_2-x}{(x_2-x)^2+y_2^2}}_{\sin\beta}. \tag{16.3.2}$$

Itt α a beesési, β a törési szög. Az összefüggést más alakban írva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{16.3.3}$$

amit bizonyítani akartunk.

17. Feladatok a hullámoptika témaköréből

Interferencia

17.1. Feladat: (HN 38A-3) Kétréses kísérletben a nátriumlámpa fénye ($\lambda_1 = 589$ nm) egymástól $d_1 = 1,8$ mm-re lévő csíkokat hoz létre az ernyőn. Mekkora lesz a csíkok közti távolság, ha higanygőzlámpával ($\lambda_2 = 436$ nm) világítjuk meg a réseket?

Megoldás: A nátriumlámpa fényére az erősítések helyei

$$d\sin\theta = m\lambda_1, \tag{17.1.1}$$

ahol d a két rés közötti távolság. Ha kis szögeket tekintünk, akkor ehelyett írhatjuk, hogy

$$d\theta = m\lambda_1. \tag{17.1.2}$$

Az ernyőn a csíkok helyzetét az

$$x_1 = L\mathrm{tg}\theta \sim L\theta = m\frac{L}{d}\lambda_1, \tag{17.1.3}$$

ahol L az ernyő résektől való távolsága. Két csík közötti távolság

$$d_1 = \frac{L}{d}\lambda_1. \tag{17.1.4}$$

Hasonló összefüggés áll fenn a higanygőz lámpa fényre:

$$d_2 = \frac{L}{d}\lambda_2. \tag{17.1.5}$$

E két egyenletből a higanygőz lámpa csíkjainak távolsága

$$d_2 = d_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,33\,\mathrm{mm}. \tag{17.1.6}$$

17.2. Feladat: (HN 38B-8) A hélium-neon lézer ($\lambda = 633$ nm) sugárnyalábját egy ernyőre irányítjuk. Hány hullámhossznyival nő meg az optikai úthossz, ha a nyaláb útjába merőlegesen $d = 0,11$ mm vastag, $n = 1,55$ törésmutatójú üveglapot helyezünk?

Megoldás: A d úthosszon

$$N_1 = \frac{d}{\lambda} = 173,78 \tag{17.2.1}$$

hullám fér el. Az n törésmutatójú üvegben a hullámhossz

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}, \tag{17.2.2}$$

így a d távolságban

$$N_2 = \frac{d}{\lambda/n} = \frac{nd}{\lambda} = 269,35 \tag{17.2.3}$$

hullám fér el. A kettő közötti különbség 95,57 hullámhossznyi.

17.3. Feladat: (HN 38B-12) Kettős rést 600 nm hullámhosszúságú fénnyel világitunk meg és ezzel egy ernyőn interferenciát hozunk létre. Ezután igen vékony flintüvegből (n = 1,65) készült lemezt helyezünk csak az egyik résre. Ennek következtében az interferenciakép főmaximuma pontosan oda tolódik el, ahol az eredeti elrendezésben a tizedrendü maximum volt. Számitsuk ki ebből, hogy milyen vastag volt az üveglemez!

Megoldás: Legyen a rések távolsága d, az üveglemez vastagsága w! Az üveglemez behelyezése

előtt az intenzitásmaximum a rések középvonalában volt, ami a zérus fáziskülönbséghez tartozik. Az üveglemez behelyezése után a zérus fáziskülönbségű hely poziciója eltolódik, mégpedig úgy, hogy az üveglemez fázistolását az üveglemezzel nem fedett résen áthaladó fény hosszabb útja kompenzálja. Ha az ernyő távolsága elég nagy, a két résen áthaladó fénysugarak párhuzamosaknak tekinthetőek. A tizedik maximumhoz tartozó α_{10} szög a flintüveg nélküli esetben így a

$$\Delta s^{\text{levegő}} = 10\,\lambda$$

$$d \cdot sin\,\alpha_{10} = 10\,\lambda \tag{17.3.1}$$

egyenletből kapható meg. A w vastagságú flintüveg behelyezése $\Delta\Phi$-vel megváltoztatja az illető résen áthaladó fényhullám fázisát. Hogy mennyivel azt úgy kaphatjuk meg, hogy kiszámoljuk mindkét résre a w úthosszhoz tartozó fázisokat és ezeket kivonjuk egymásból. Az üveglemezzel nem fedett rés esetén ezt a távolságot a fény a levegőben teszi meg, a másik résnél üvegben, ahol nagyobb az optikai úthossz[13]. :

$$\Delta\Phi_{\text{levegő}} = 2\,\pi\,\frac{w}{\lambda}$$

$$\Delta\Phi_{\text{üveg}} = 2\,\pi\,\frac{w}{\lambda_{\text{üveg}}} = 2\,\pi\,\frac{w \cdot n}{\lambda}$$

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{\text{üveg}} - \Delta\Phi_{\text{levegő}} = 2\,\pi\,\frac{w \cdot (n-1)}{\lambda} \tag{17.3.2}$$

ami az optikai úthosszkülönbségekkel is kiszámítható:

$$s_0 = w \qquad \text{optikai úthossz levegőben}$$

$$s_{\text{üveg}} = n \cdot w \qquad \text{optikai úthossz az üvegben}$$

$$\Delta s = s_{\text{üveg}} - s_0 = w \cdot (n-1) \tag{17.3.3}$$

$$\Delta\Phi = 2\,\pi\,\frac{\Delta s}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{w \cdot (n-1)}{\lambda} \tag{17.3.4}$$

Vegyük észre, hogy az optikai úthossz 17.3.3 képletében a hullámhossz nem szerepel.

A flintüveggel a zéró fáziskülönbséghez tartozó szög meg kell egyezzen α_{10}-el:

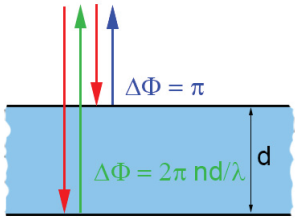
$$\begin{aligned} \Delta s &= d \cdot sin\,\alpha_{10}\ (= 10\,\lambda) \\ w \cdot (n-1) &= 10\,\lambda \\ \underline{w} &= \frac{10\,\lambda}{n-1} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{0,65} = \underline{9.23 \cdot 10^{-6}\,m} \end{aligned} \tag{17.3.5}$$

A flintüveg lemez vastagsága tehát 0,00923 mm.

[13] A két közegben a fény sebessége és hullámhossza más a frekvenciája ($\nu = c(n)/\lambda = c/(n \cdot \lambda)$) viszont nem.

17.4. Feladat: (HN 38A-16) Adjuk meg annak a legvékonyabb szappanhártyának (n = 1,33) a vastagságát, amely a legnagyobb intenzitással a 400 nm hullámhosszúságú kék fényt veri vissza.

Megoldás: Legyen a szappanhártya levegőben. A beeső fény a 38-16a ábra szerint a szappanhártya mindkét felületén visszaverődik[14]. A két visszavert hullám interferenciája adja meg a teljes



97. ábra. A 38A-16 feladathoz

visszavert hullámot. Maximális akkor lesz a visszavert intenzitás, ha a két visszavert hullám optikai útjának különbsége a hullámhossz egész számú többszöröse ($\Delta s = m \cdot \lambda$), vagyis a fáziskülönbség $\Delta\Phi = 2\pi \cdot m$, ahol $m = 0, 1, 2, \ldots$ Figyelembe kell azonban azt is venni, hogy amikor a fényhullám optikailag sűrűbb közegről verődik vissza akkor egy $\lambda/2$ útkülönbségnek megfelelő π nagyságú fázisugrás történik mig az optikailag ritkább közeg határfelületéről visszaverődésnél nincs fázisugrás. Az ábra alapján

$$\Delta s_u = 2dn \text{ optikai útkülönbség a szappanhártyában} \tag{17.4.1}$$

$$\Delta s_f = \frac{1}{2}\lambda \text{ fázisugrás} \tag{17.4.2}$$

$$\Delta s = 2dn - \frac{1}{2}\lambda \text{ teljes optikai útkülönbség} \tag{17.4.3}$$

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta s - \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \text{ teljes fáziskülönbség} \tag{17.4.4}$$

Maximális amplitudó eléréséhez a teljes optikai útkülönbségnek $m\,\lambda$-val kell megegyeznie, vagyis (17.4.3)-t felhasználva

$$2dn - \frac{1}{2}\lambda = m \cdot \lambda \tag{17.4.5}$$

$$d = \frac{(m + \frac{1}{2})\,\lambda}{2n} \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{17.4.6}$$

[14] Az ábrán a beeső és visszavert hullámokat párhuzamos vonalak adják meg, a valóságban az ezekre a vonalakra merőleges hullámfelületek interferálnak.

Behelyettesítve a hullámhosszat az első három lehetőség a maximális reflexió eléréséhez

$$d_0 = \frac{\frac{1}{2}400\cdot 10^{-9}}{21,33} = 7,519\cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \tag{17.4.7}$$

$$d_1 = \frac{\frac{3}{2}400\cdot 10^{-9}}{21,33} = 2,256\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \tag{17.4.8}$$

$$d_2 = \frac{\frac{5}{2}400\cdot 10^{-9}}{21,33} = 3,759\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \tag{17.4.9}$$

Tehát a legvékonyabb szappahártya, amelyik a legnagyobb intenzitással a 400 nm hullámhosszúságú kék fényt veri vissza $7,519\cdot 10^{-8}$ m vastag.

17.5. Feladat: (HN 38B-19) Víz felszínén úszó olajréteg (n = 1,45) merőlegesen beeső fehér fénnyel van megvilágítva. A folt d = 280 nm vastag. Adjuk meg, hogy melyik szín dominál
(a) a visszavert fényben és
(b) az átmenő fényben!

Megoldás: Mindkét esetben az a fény dominál, amelyikre erősítés van.
(a) A visszavert fényben két nyaláb interferenciáját tekintjük. Az egyik a felületről verődik vissza. A nagyobb törésmutatójú közeg miatt a visszavert nyaláb π fázisugrás szenved, amely $\lambda/2$ úthosszkülönbségnek felel meg. A másik nyaláb az olajban halad, majd a víz felszínén reflektálódik. Az optikai úthossz $2nd$. Mivel a feladat nem tartalmazza a víz törésmutatóját, így ha kisebb mint az olajé, akkor nincs fázisugrás, ha nagyobb, akkor π.
A kisebb törésmutató esetén erősítés feltétele

$$2nd - \frac{1}{2}\lambda = m\lambda. \tag{17.5.1}$$

A látható tartományba eső hullámhossz λ = 541 nm.
A nagyobb törésmutató esetén az erősítés feltétele

$$2nd = m\lambda, \tag{17.5.2}$$

ahonnan λ = 406 nm.
(b) A feladatrész az előzőhöz hasonló meggondolásokkal oldható meg.

17.6. Feladat: (HN 39A-1) Résen elhajló 550 nn hullámhosszúságú fény diffrakciós képét a réstől 3 m távolságra lévő ernyőn fogjuk fel. A centrális maximum két oldalán lévő harmadrendű

minimumok távolsága 25 mm. Mekkora a rés szélessége?

Megoldás: Adatok: $\lambda = 550$ nm; $L = 3$ m; $D = 25$ mm.

Rés esetén a minimumok az

$$m\lambda = \sin\theta \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.6.1}$$

összefüggésből határozhatjuk meg, ahol m a kioltási helyek sorszáma, θ az elhajlás szöge. (Ne feledjük, hogy középen erősítés van!) Mivel két harmadrendű (m=3 és m=-3 szimmetrikusan) vonal távolsága adott, így elég a félszögre vonatkozó adatokkal számolni. Így pl. az m=3-hoz tartozó elhajlási szög

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{D/2}{L}. \tag{17.6.2}$$

Felhasználva, hogy kis szögekre a $\sin\theta = \mathrm{tg}\theta$ közelítés alkalmazható, a rész szélességére az

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{2m\lambda L}{D} \tag{17.6.3}$$

adódik. Az adatok behelyettesítésével: $a = 0,4$ mm.

17.7. Feladat: (HN 39-A2) Egy rést az 550 nm hullámhosszúságú fény világít meg és a réstől 3 m-re lévő ernyőn elhajlási kép alakul ki. Határozzuk meg a centrális maximum teljes szélességét, ha a rés (a) 0,2 mm és (b) 0,4 mm szélességű.

Megoldás: Egy résre

$$d \cdot sin\,\alpha = m \cdot \lambda \qquad m = 1, 2, 3, \cdots \qquad \text{minimumok} \tag{17.7.1}$$

Jelöljük a hullámhosszat λ-val, az ernyő távolságát L-lel és a rés szélességét d-vel! A centrális maximum teljes W szélessége megegyezik az $m = 1$-hez tartozó minimumok távolságával, ami az első minimumokhoz tartozó $\alpha_{min,1}$ szöggel számolható ki:

$$\text{ahol } sin\,\alpha_{min,1} = \frac{\lambda}{d} \text{ és}$$
$$W = 2 \cdot L \cdot tg\,\alpha \tag{17.7.2}$$

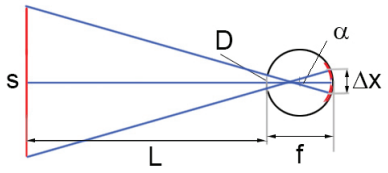
$$sin\,\alpha_{min,1} = \begin{cases} 2.75 \cdot 10^{-3} & (d = 0,2\,mm) \\ 1.38 \cdot 10^{-3} & (d = 0,4\,mm) \end{cases} \tag{17.7.3}$$

Mivel $\alpha_{min,1}$ kicsi $sin\,\alpha_{min,1} \approx tg\,\alpha_{min,1} \approx \alpha_{min,1}$, így

$$W \approx 2 \cdot L \cdot sin\,\alpha_{min,1} = \begin{cases} 8.25 \cdot 10^{-3}\,m \\ 1.65 \cdot 10^{-2}\,m \end{cases} \tag{17.7.4}$$

17.8. Feladat: (HN 39A-11) Egy bizonyos távolságra eltávolodott autó két hátsó lámpája éjszaka alig különböztethető meg egymástól, mint két különálló fényforrás. Becsüljük meg az autótól való távolságunkat, feltéve, hogy a lámpák közötti távolság 1,5 m és átlagosan 640 nm hullámhosszúságú fénysugarat bocsátanak ki, a megfigyelő szemének a pupillája pedig 6 mm átmérőjű. (Megjegyzés: különböző sűrűségű levegőrétegekben a fénytörés hatására a kép homályossá válik, így a távolság valójában kisebb a számítottnál.)

Megoldás: Az autólámpák elég messze vannak ahhoz, hogy pontszerűnek tekinthessük azokat és a belőlük kiinduló fény a megfigyelő szeméhez jó közelítéssel két, nem azonos szögben terjedő síkhullámként érkezzen. Ha a szemet egy D átmérőjű kör alakú diafragmával ellátott f fókusztávolságú lencsével modellezzük, az a síkhullámot egy $\Delta x = \alpha \cdot f$ méretű foltra képezi le, ahol $\alpha \approx sin\,\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$. A két hátsó lámpa akkor különböztethető meg, ha a nekik megfelelő foltok a látókérgen éppen Δx távolságba esnek. A 17. ábrán piros vonal jelöli a lámpák távolságát és a szemen belül a pupilla véges mérete miatti Δx méretű foltokat. A foltok mérete és középpontjaik távolsága megegyezik. A 17. ábra alapján



98. ábra. A 39A-11 feladathoz

$$\begin{aligned} \Delta x &= f \cdot \alpha = f \cdot 1.22\frac{\lambda}{D} \\ S &= (L+f) \cdot \alpha \approx L \cdot \alpha \\ L \approx \frac{S}{\alpha} &= \frac{SD}{1,22\,\lambda} = \frac{1,5 \cdot 0,006}{1,22 \cdot 6,4 \cdot 10^{-7}} = 1,15 \cdot 10^4\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{17.8.1}$$

Vagyis az autó távolsága 11.5 km.

17.9. Feladat: (HN 39A-27) A $\lambda = 0,30$ nm hullámhosszúságú röntgensugarak NaCl kristályon elsőrendű visszaverődést hoznak létre $\varphi = 30^0$-os szögben érkezve. Számítsuk ki, mekkora az a rácsállandó, ami ennek a visszaverődésnek felel meg.

Megoldás: A Bragg-féle szórás feltétel szerint a diffrakció maximuma a

$$m\lambda = 2d\sin\varphi, \text{ ahol } m = 1,2,3,\ldots. \tag{17.9.1}$$

Innen a rácsállandó

$$d(m=1) = \frac{m\lambda}{2d\sin\varphi} = 0,3\text{nm}. \tag{17.9.2}$$

17.10. Feladat: (HN 40A-2) Két ideális polárszűrő lemez úgy van egymásra helyezve, hogy a transzmissziós tengelyeik közötti szög θ. Adjuk meg a lemezek közötti szöget úgy, hogy a beeső polarizálatlan fény intenzitásának $\eta = 45\%$-a átjusson.

Megoldás: A második lemez utáni intenzitás a Malus-törvény értelmében

$$I(\theta) = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta, \tag{17.10.1}$$

amelyből az áteresztés aránya

$$\eta = \frac{1}{2}\cos^2\theta. \tag{17.10.2}$$

Az adatok behelyettesítésével $\theta = 18,43^0$.

17.11. Feladat: (HN 40A-7) Üveglemez Brewster-szöge 57^0, ha a lemez a levegőben van. Számítsuk ki a lemez Brewster-szöget, ha vízbe helyezzük (n = 1,33)

Megoldás: A Brewster-szög azt jelenti, hogy a visszavert és megtört nyaláb által bezárt szög 90^0, így a törés szöge 33^0. Ezzel az üveg törésmutatója

$$n_{\text{ü}} = \frac{\sin 57^0}{\sin 33^0} = 1,54. \tag{17.11.1}$$

A vízbe helyezés esetén jelentse α a beesési, β a törési szöget. Ekkor egyrészt

$$\frac{n_{\text{ü}}}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{17.11.2}$$

másrészt a Brewster-szög miatt teljesül, hogy

$$90^0 = \alpha + \beta. \tag{17.11.3}$$

Az egyenletrendszert megoldva a beesési szög $\alpha = 49,2^0$.

18. A kvantummechanika előzményei

A kvantummechanika előzményei

18.1. Feladat: (HN 42A-7) Az emberi szem kb. 555 nm hullámhossznál a legnagyobb érzékenységű. Adjuk meg annak a fekete testnek a hőmérsékletét, amely sugárzásának a spektrális teljesitménye ezen a hullámhosszon a maximális!

Megoldás: Wien törvénye:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,8977721 \cdot 10^{-3}\, K\, m, \tag{18.1.1}$$

ahonnan

$$T = \frac{2,8977721 \cdot 10^{-3}}{555 \cdot 10^{-9}} = 5221\, K. \tag{18.1.2}$$

18.2. Feladat: (HN 42A-15) A nátrium kilépési munkája 2,75 eV. Adjuk meg a fotoelektromos hatás küszöbhullámhosszát Na esetére!

Megoldás: Az Einstein–képlet szerint

$$h \cdot \nu = W + E_{kin} = W + \frac{1}{2} m v^2. \tag{18.2.1}$$

A küszöbhullámhossz esetén a kilépő elektronok kinetikus energiája nulla

$$h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = W \tag{18.2.2}$$

$$\lambda = \frac{hc}{W} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} J\, s \cdot 2,998 \cdot 10^{8}\, m/s}{2,75 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} J} \tag{18.2.3}$$

$$\lambda = \underline{4,509 \cdot 10^{-7} m}. \tag{18.2.4}$$

18.3. Feladat: (HN 42B-22) Egy gamma–foton, melynek energiája az elektron nyugalmi energiájával (511 kev) egyenlő, összeütközik egy elektronnal, ami kezdetben nyugalomban volt. Számitsuk ki, mekkora mozgási energiát nyer az elektron az ütközésben, ha a foton az eredeti pályaegyeneséhez képest 30^o-os szögben szóródik!

Megoldás: A feladatban leírt folyamat a Compton effektus, amelynek képlete

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_{Compton}(1 - \cos\theta), \tag{18.3.1}$$

ahol

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-12}\, m \tag{18.3.2}$$

z elektron Compton hullámhossza. Behelyettesítve

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= 2,43 \cdot 10^{-12}\, m (1 - cos 30^o) = \\ &= 2,43 \cdot 10^{-12} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \\ &= 3,251 \cdot 10^{-13} m \\ \lambda' &= \lambda + 3,251 \cdot 10^{-13} m. \end{aligned} \tag{18.3.3}$$

Tudjuk, hogy a foton kezdeti energiája

$$\varepsilon_{foton} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 511 \cdot 10^3\, eV = 511 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 8,187 \cdot 10^{-14} J,$$

ahonnan $\lambda = 2,426 \cdot 10^{-12}\, m$. Mivel a kimenő foton hullámhossza nagyobb, energiája kisebb lesz és ez az energiacsökkenés lesz egyenlő az elektron kinetikus energiájának növekedésével. Mivel kezdetben az elektron nyugalomban volt ez egyúttal a teljes mozgási energiája is lesz

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{foton} &= \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1,987 \cdot 10^{-25}}{2,751 \cdot 10^{-12}} = 7,220 \cdot 10^{-14} J = 450,6\, keV \\ \varepsilon_{kin} &= -(\varepsilon'_{foton} - \varepsilon_{foton}) = 9,674 \cdot 10^{-15} J = 60,38\, keV. \end{aligned} \tag{18.3.4}$$

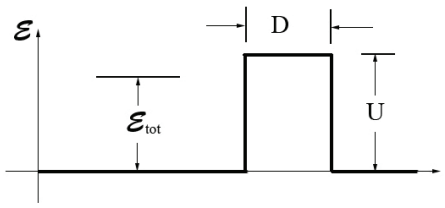
18.4. Feladat: (HN 43A-12) Egy mozgó neutron de Broglie-bullámhossza 0,2 nm. Adjuk meg a neutron sebességét és a mozgási energiáját eV egységekben!

Megoldás: A de Broglie képlet szerint

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ v &= \frac{h}{m_n \lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 1981 \frac{m}{s} \\ \varepsilon_{kin} &= \frac{1}{2} m_n v^2 = 3,281 \cdot 10^{-21}\, J = 2,048 \cdot 10^{-2}\, eV. \end{aligned} \tag{18.4.1}$$

18.5. Feladat: (HN 43B-23) A T áteresztési tényező azt adja meg, mekkora a valószínűsége annak, hogy egy m tömegű részecske a 99. ábrán bemutatott derékszögű potenciálfalhoz közeledve „átalagútazik" a potenciálfalon

$$T = e^{-2kD}, \qquad \text{ahol } k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m_e (U - \varepsilon)}{h^2}}. \tag{18.5.1}$$



99. ábra. A 43B-23 feladathoz

Vizsgáljunk olyan potenciálfalat, melyre $U = 5\,eV$ és $D = 950\,pm$ (pikométer). Tegyük fel, hogy egy E= 4,5 eV energiája elektron közeledik a potenciálfalhoz. Klasszikusan az elektron nem képes áthaladni a potenciálfalon, mert $E < U$. A kvantummechaníka szerint azonban véges valószinűsége van az átalagútozásnak. Számitsuk ki ezt a valószínűséget!

Megoldás:

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 9,109\cdot 10^{-31}(5-4,5)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{(6.626\cdot 10^{-34})^2}}$$

$$= 3.623\cdot 10^9 \frac{1}{m} \tag{18.5.2}$$

$$T = e^{-2\,3.623\cdot 10^9\, 950\cdot 10^{-12}} = \underline{1.025\cdot 10^{-3}} \tag{18.5.3}$$

18.6. Feladat: (HN 43B-28) Egy atomot az 1,8 eV energiával az alapállapot fölötti szintre gerjesztve, az atom ott átlagosan $2\cdot 10^{-6}$ s időt tölt el, mielött alapállapotba kerülne vissza.
(a) Adjuk meg a kibocsátott foton frekvencíáját!
(b) Adjuk meg a foton hullámhosszát!
(c) Adjuk meg a foton energiájának bizonytalanságát!

Megoldás:
(a) Az alapállapotba visszatérés során kibocsátott foton frekvenciája

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{1,8\cdot 1,602\cdot 10^{-19} J}{6,626\cdot 10^{-34} J\,s} = 4,352\cdot 10^{14} Hz \tag{18.6.1}$$

(b) és hullámhossza

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 6,888\cdot 10^{-7}\, m. \tag{18.6.2}$$

(c) Egy adott állapot ΔE energiabizonytalansága és az adott állapotban tartozkodás Δt időtar-

tama között is fennáll egy határozatlansági összefüggés:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \tag{18.6.3}$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = 5,27286 \cdot 10^{-29} J = 3,29106 \cdot 10^{-10} eV. \tag{18.6.4}$$

18.7. Feladat: (HN 44B-9) A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. 21 cm-es sugárzás keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogenfelhök detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakat, ezért az elöbb emlitett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n-nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az n = 1 alapállapotban az elektron és a proton spinje paralel vagy antiparalel lehet; a két állapot energiája kissé különböző.
(a) Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak?
(b) A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége?
(c) A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számitsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

Megoldás:
(a) Az elemi részecskék (példánkban a proton és az elektron) spinjéhez mágneses momentum is kapcsolódik a

$$\mu = Q g \frac{1}{2m} S \tag{18.7.1}$$

képlet szerint, ahol S a spin, μ a mágneses momentum nagysága, Q a részecske töltése és g az ún. g–faktor. Mivel a proton töltése pozitív az elektron töltése negatív a proton mágneses momentuma spinjével egyirányú, az elektroné azzal ellentétes. A proton mágneses momentumához tartozó mágneses térben az elektron akkor lesz magasabb energiájú, ha a mágneses momentumok egyirányúak, vagyis a spin momentumok ellentétes irányúak.
(b) A két állapot energiakülönbsége felel meg a kibocsátott foton energiájának. Mivel $\lambda = 0,2111\,m$, az energiakülönbség

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6,62607 \cdot 10^{-34} Js \cdot 2,99793 \cdot 10^{8} m/s}{0.2111\,m} = 9.40998 \cdot 10^{-25} J \\ &= 5,87325 \cdot 10^{-6} eV \end{aligned} \tag{18.7.2}$$

(c) Az energiabizonytalanság

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon \cdot \Delta T &\geq \hbar \\ \Delta\varepsilon &\geq \frac{\hbar}{\Delta T} = \frac{1.05457 \cdot 10^{-34} Js}{10^7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s} = 3,344 \cdot 10^{-49} J = 2,087 \cdot 10^{-30} eV. \end{aligned} \quad (18.7.3)$$

18.8. Feladat: (HN 43C-33) Amikor egy atom fotont bocsát ki, az energia valamilyen hányada az atom visszalökődésére fordítódik. Mutassuk meg, hogy ez a hányad közelítőleg $\frac{\varepsilon}{2mc^2}$, ahol ε az átmenet energiája és m az atom tömege.

Megoldás: A feladat szerint a keletkező fotonok ε_{foton} energiája kisebb lesz, mint az átmenet energiája. Jelöljük a kettő különbségét $\delta\varepsilon$! Igazolnunk kell, hogy

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2mc^2}$$

ahol, mivel $\varepsilon << mc^2$, a feladat állítása szerint ε és ε_{foton} csak kicsit különbözhet egymástól

$$\delta\varepsilon << \varepsilon \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} << 1.$$

Használjuk az energia és impulzusmegmaradás feltételeit! A ε energiájú átmenet során az energia és az impulzus megmarad, vagyis

$$p_{atom} + p_{foton} = p'_{atom} + p'_{foton} \quad (18.8.1)$$

$$\varepsilon_{atom} + \varepsilon_{foton} = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \quad (18.8.2)$$

$$(18.8.3)$$

Maradjunk az emisszió előtt nyugalomban levő atom vonatkoztatási rendszerében. Ekkor az impulzusokra

$$p_{atom} = p_{foton} = 0 \quad (18.8.4)$$

$$p'_{atom} = p'_{foton}, \text{ és mivel} \quad (18.8.5)$$

$$p'_{foton} = \frac{\varepsilon_{foton}}{c} \quad (18.8.6)$$

$$p'_{atom} = 0 - p'_{foton} = -\frac{\varepsilon_{foton}}{c} \quad (18.8.7)$$

Innentől mind klasszikus, mind relativisztikus módon megoldhatjuk a feladatot. Figyelembe véve, hogy a visszalökődő atom sebessége sokkal kisebb, mint a fénysebesség ezen a szinten elegendő a klasszikus fizikai megoldás. A teljesség kedvéért azonban felírjuk a relatitáselmélet szerinti megoldást is.

(a) Klasszikus fizikai (nem relativisztikus) megoldás

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának! A kibocsátott foton ε_{foton} energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek ε távolságával. (18.8.1) és (18.8.2) -be a foton $p_{foton} = \frac{\varepsilon}{c}$ és az atom impulzusának klasszikus fizikai $p = mv$ formuláit behelyettesítve

$$0 = mv + \frac{\varepsilon_{foton}}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\varepsilon_{foton}}{c} = -mv \tag{18.8.8}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + \varepsilon_{foton}, \text{ és mivel}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}\cdot(mv)^2 = \frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{c}\right)^2$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} + \varepsilon_{foton} \tag{18.8.9}$$

Az egyenlet jobboldalán az $\varepsilon_{foton} = (\varepsilon - \delta\varepsilon)$ ismeretlen fotonenergia szerepel. Vagyis

$$\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{foton} = \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} = \frac{(\varepsilon-\delta\varepsilon)^2}{2mc^2}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} - \frac{2\delta\varepsilon\cdot\varepsilon}{2mc^2} + \frac{\delta\varepsilon^2}{2mc^2} \approx \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} \tag{18.8.10}$$

Ez az az energia rész, ami az atom visszalökődésére fordítódik, vagyis a foton energiája ennyivel kisebb lesz. Ezért

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2mc^2}. \tag{18.8.11}$$

Ezzel az állítást igazoltuk[15].

(b) Relativisztikus megoldás

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának. A kibocsátott foton energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek ε távolságával. Jelöljük ezt E_{foton}-nal! Felhasználva a speciális relativitáselmélet energia, impulzus és nyugalmi

[15] Szilárd testekben a képletbe helyettesítendő tömeg az atomok kölcsönhatása miatt nem feltétlen azonos a szabad atom tömegével, lehet annál nagyobb, kisebb, sőt akár végtelen is. Ezt a tömeget az atom *effektív tömeg*ének nevezzük. Ezt a Mössbauer-effektust használjuk ki pl. a meteorok és holdkőzetek analízisére a Mössbauer-spektroszkópiában.

tömeg között fennálló $E^2 - p^2c^2 = (mc^2)^2$ képletét[16]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{atom} &= mc^2 + \varepsilon \\ \varepsilon_{foton} &= 0 \\ \varepsilon'_{foton} &= \varepsilon \\ \varepsilon'_{atom} &= \sqrt{p^2_{atom}c^2 + (m'c^2)^2}, \end{aligned} \tag{18.8.12}$$

ahol $m'c^2$ azt jelöli, hogy a mozgó atom energiájának számolásánál nem a nyugvó atom m tömegével kell számolni[17]. Ebben a folyamatban a kibocsátott foton energiája sokkal kisebb az atom nyugalmi energiájánál: $\varepsilon_{foton} << mc^2$, ezért $m' \approx m$, vagy másképpen $\delta m \equiv m' - m << m$. A (18.8.12) egyenletbe behelyettesítve (18.8.1)-et:

$$\varepsilon'_{atom} = \sqrt{p'^2_{atom}c^2 + (m'c^2)^2} \tag{18.8.13}$$

$$= \sqrt{p'^2_{foton}c^2 + (m'c^2)^2} \tag{18.8.14}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{c}\right)^2 c^2 + (m'c^2)^2} \tag{18.8.15}$$

$$= \sqrt{\varepsilon^2_{foton} + ((m+\delta m)c^2)^2}. \tag{18.8.16}$$

Emeljünk ki mc^2-et, és használjuk ki, hogy $(1+x)^2 \approx (1+2x)$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, ha $x << 1$, valamint, hogy $\varepsilon_{foton} << mc^2$ és $\delta m << m$

$$\varepsilon'_{atom} = \sqrt{(mc^2)^2 \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\delta m}{m}\right)^2\right)} \tag{18.8.17}$$

$$= mc^2 \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\delta m}{m}\right)^2\right)} \tag{18.8.18}$$

$$= mc^2 \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + 1 + 2\frac{\delta m}{m}\right)} \tag{18.8.19}$$

$$= mc^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{mc^2}\right)^2 + 2\frac{\delta m}{m}\right)\right] \tag{18.8.20}$$

azaz

$$\varepsilon'_{atom} = mc^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta mc^2 \tag{18.8.21}$$

[16] Szilárd testekben a képletben szereplő tömeg az atom *effektív tömege*, ami nem azonos a szabad atom tömegével, ezt használjuk ki pl. a Mössbauer-effektusnál, ahol az atom visszalökődését a többi atom akadályozza.

[17] Ezt szokás hagyományosan tömegnövekedésnek nevezni.

18.8.2 alapján

$$\varepsilon_{atom} = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \tag{18.8.22}$$

$$mc^2 + \varepsilon = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \tag{18.8.23}$$

$$mc^2 + \varepsilon = \varepsilon'_{foton} + mc^2 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta mc^2 \tag{18.8.24}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{foton} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta mc^2 \tag{18.8.25}$$

Tehát a visszalökődés miatt a foton energiája

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2_{foton}}{mc^2} + \delta mc^2 \quad \text{-el} \tag{18.8.26}$$

kisebb, lesz, mint az átmenet energiája. Ez a képlet a klasszikus fizikaitól a δmc^2-el különbözik, ami az első tagnál is sokkal kisebb.

18.9. Feladat: (HN 44B-9) A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. 21 cm-es sugárzás keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogenfelhök detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakat, ezért az elöbb emlitett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n-nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az n = 1 alapállapotban az elektron és a proton spinje paralel vagy antiparalel lehet; a két állapot energiája kissé különböző.
(a) Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak?
(b) A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége?
(c) A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számitsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

Megoldás:
(a)
Az elemi részecskék (példánkban a proton és az elektron) spinjéhez mágneses momentum is kapcsolódik a

$$\mu = Qg\frac{1}{2m}S \tag{18.9.1}$$

képlet szerint, ahol S a spin, μ a mágneses momentum nagysága, Q a részecske töltése és g az ún. g–faktor. Mivel a proton töltése pozitív az elektron töltése negatív a proton mágneses momentuma spinjével egyirányú, az elektroné azzal ellentétes. A proton mágneses momentumához

tartozó mágneses térben az elektron akkor lesz magasabb energiájú, ha a mágneses momentumok egyirányúak, vagyis a spin momentumok ellentétes irányúak.
(b)
A két állapot energiakülönbsége felel meg a kibocsátott foton energiájának. Mivel
$\lambda = 0,2111\,m$, az energiakülönbség

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6.62607\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 2.99793\cdot 10^{8}\,m/s}{0.2111\,m} = 9.40998\cdot 10^{-25}\,J \\ &= 5.87325\cdot 10^{-6}\,eV \end{aligned} \tag{18.9.2}$$

(c) Az energiabizonytalanság

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon\cdot\Delta T &\geq \hbar \\ \Delta\varepsilon &\geq \frac{\hbar}{\Delta T} = \frac{1.05457\cdot 10^{-34}\,Js}{10^{7}\cdot 365\cdot 24\cdot 3600s} = 3.34403\cdot 10^{-49}J \\ &= 2.08718\cdot 10^{-30}\,eV \end{aligned} \tag{18.9.3}$$

18.10. Feladat: (HN 44C-36) Mi a valószinűsége annak, hogy az ls-állapotú hidrogén elektronját a magtól 2,50 a_o-nál nagyobb távolságra találjuk meg?

Megoldás: Az 1s állapotbeli gömbszimmetrikus hullámfüggvény szorzat alakban írható (*szeparálható*): $\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\cdot y(\vartheta,\varphi)$, ennek radiális és szögfüggő része

$$R(r) = 2\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2}\cdot e^{-r/a_o} \tag{18.10.1}$$

$$Y(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \tag{18.10.2}$$

A teljes hullámfüggvény az 1s állapotban csak a távolságtól függ:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_o^3}}\,e^{-r/a} \tag{18.10.3}$$

Annak a valószínűsége, hogy az elektront a magtól r' -nél nagyobb távolságra találjuk

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(r',\infty) &= \int_{r'}^{\infty}|\psi(r)|^2\cdot 4\pi r^2\,dr = \\ &= \frac{4}{a_o^3}\int_{r'}^{\infty} r^2\cdot e^{-2r/a_o}\,dr. \end{aligned} \tag{18.10.4}$$

Integráltáblázatból kinézve az integrál értékét[18]

$$\mathcal{P}(r') \equiv \mathcal{P}(r', \infty) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\,r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2\,r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2\,r'}{a_o}} \tag{18.10.9}$$

Behelyettesítve az $r' = 2,50\,a_o$ értéket[19]: $\dfrac{2\,r'}{a_o} = 5.00$

$$\mathcal{P}(r') = \left(\frac{1}{2} 5.00^2 + 5.00 + 1 \right) e^{-5.00} = 0.125 \tag{18.10.10}$$

19. Feladatok a speciális relativitáselmélet tárgyköréből

Relativisztikus kinematika

19.1. Feladat: Egy űrhajósnak a saját ideje szerint egy feladat elvégzéséhez 2 percre van szüksége. Mennyi idő telik el ezalatt a Föld vonatkoztatási rendszerében, ha az űrhajó $0,5c$ sebességgel

[18] Ez az integrál integráltáblázat nélkül két egymás utáni parciális integrálás alkalmazásával könnyen kiszámolható:
Ehhez egy kis segítség: Vezessünk be egy új változót (18.10.4)-be! Legyen $x = \dfrac{2\,r}{a_0}$, ekkor $r = \dfrac{a_0\,x}{2}$ és $dr = \dfrac{a_0}{2}\,dx$, az integrálás határai pedig $\dfrac{2\,r'}{a_0}$ és ∞:

$$\frac{4}{a_o^3} \int_{r'}^{\infty} r^2 \cdot e^{-2\,r/a_o}\,dr = \frac{4}{a_o^3} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} \frac{a_o^2}{4} x^2 \cdot e^{-x} \frac{a_o}{2}\,dx = \frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2\,e^{-x} dx \tag{18.10.5}$$

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx. \tag{18.10.6}$$

Először legyen $u' \equiv e^{-x}$,és $v \equiv \dfrac{1}{2}x^2$, ekkor $u = -e^{-x}$ és $v' = x$

$$\frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx = \left[-\frac{1}{2} x^2\,e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x(-e^{-x})\,dx \tag{18.10.7}$$

A jobboldali integrál ugyancsak parciálisan integrálható. Most $u' \equiv -e^{-x}$,és $v \equiv x$, ahonnan $u = e^{-x}$ és $v' = 1$.

$$\int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x(-e^{-x})\,dx = \left[x\,e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-x\,e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} - \left[-e^{-x} \right]_{2\,r'/a_0}^{\infty} \tag{18.10.8}$$

A végeredmény:

$$\frac{1}{2} \int_{2\,r'/a_0}^{\infty} x^2\,e^{-x} dx = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\,r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2\,r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2\,r'}{a_o}}$$

[19] $a_o = 0,0529\,nm$

halad a Földhöz képest?

Megoldás: Jelölések: $\tau = 2$ perc = 120 s és $v = 0,5c$.
A Föld vonatkoztatási rendszerében

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 138,56\,\mathrm{s} \tag{19.1.1}$$

idő telik el.

19.2. Feladat: Két távoli galaxis a Földtől ellenkező irányban távolodik, mindegyik 0,8c sebességgel. Mekkora volna a másik galaxis távolodási sebessége az egyiken lévő megfigyelő számára?

Megoldás: Gondolatban helyezkedjünk el az egyik galaxison. Most ez a K rendszer. A Föld ehhez képest mozog $v_0 = 0,8c$ sebességgel. A Föld a K' rendszer. Ebben a rendszerben mozog a másik galaxis $u'_x = 0,8c$ sebességgel. E galaxis K rendszerbeli u_x sebességének kiszámolására alkalmazzuk a sebesség-összeadás

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1+\frac{v_0 u'_x}{c^2}} \tag{19.2.1}$$

összefüggését. Behelyettesítés után kapjuk, hogy K rendszerbeli (egyik galaxisbeli) megfigyelő számára a másik

$$u_x = 0,9756c \tag{19.2.2}$$

sebességgel távolodik.

Relativisztikus dinamika

19.3. Feladat: Egy m_0 tömegű test sebessége $v_1 = 0,6c$-ről $v_2 = 0,8c$-re változik. a.) Mekkora munkavégzés volt ehhez szükséges? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is! b.) Mekkora a test impulzusváltozása? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is!

Megoldás: a, A munkavégzés a klasszikus mechanika szerint:

$$W_{kl} = \frac{1}{2}m_0 v_2^2 - \frac{1}{2}m_0 v_1^2 = 0,14 m_0 c^2, \tag{19.3.1}$$

míg relativisztikusan:

$$W_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{12}m_0c^2 = 0,4167m_0c^2. \tag{19.3.2}$$

b, Az impulzusváltozás a klasszikus mechanika szerint:

$$\Delta P_{kl} = m_0v_2 - m_0v_1 = 0,2m_0c, \tag{19.3.3}$$

míg relativisztikusan:

$$\Delta P_{rel} = \frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{7}{12}m_0c = 0,5833m_0c. \tag{19.3.4}$$

19.4. Feladat: Részecskegyorsítóban különböző töltött részecskéket tudunk gyorsítani.
(a) Mekkora egy proton sebessége, ha tömege kétszerese nyugalmi tömegének? ($m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg)
(b) Mekkora energiával gyorsítható fel a proton erre a sebességre?
(c) Mekkora lenne a nyugalomból induló elektron sebessége ekkora gyorsítási energia befektetése után?

Megoldás:
(a) A feladat matematikai megfogalmazása:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0, \tag{19.4.1}$$

amiből a proton sebessége

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0,866c = 2,598 \cdot 10^8\,\text{m/s}. \tag{19.4.2}$$

(b) E sebesség felhasználásával a gyorsításhoz befektetett energia

$$\Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10}\,\text{J} = 9,394 \cdot 10^8\,\text{eV}. \tag{19.4.3}$$

(c) A fenti összefüggés átrendezésével és az elektron tömegének alkalmazásával

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_ec^2}{\Delta E + m_ec^2}\right)^2} = 2,9999992 \cdot 10^8\,\text{m/s}. \tag{19.4.4}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a ΔE befektetett energia növelésével a fénysebesség egyre jobban megközelíthető.

19.5. Feladat: Két azonos, kezdetben nyugvó m_0 tömegű részecske egyikével $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$, a másikkal $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energiát közlünk.
(a) Mekkora lesz a testek sebessége a nyugvó laborrendszerben?
(b) Feltételezve, hogy egy irányban mozognak, mekkora sebességűnek érzékeli a lassabban mozgó részecske a gyorsabban mozgót a saját rendszeréből nézve?

Megoldás:
(a) A nyugvó részecske v sebességre történő felgyorsításához szükséges energia befektetés

$$\Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2. \tag{19.5.1}$$

Ennek felhasználásával a $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$ esetén

$$v_1 = 0,8c \tag{19.5.2}$$

az elért sebesség, míg a $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energia esetén

$$v_2 = 0,6c \tag{19.5.3}$$

a sebesség.
(b) Ez a két sebesség a két részecske K nyugvó (laborrendszerbeli sebessége). A kérdés, hogy a nyugvó rendszerhez képest $v_0 = v_2 = 0,6c$ sebességgel mozgó /a lassabb részecskéhez rögzített/ K' rendszerben milyen a másik részecske u'_x sebessége. A gyorsabb részecske sebességét a K rendszerben jelölje $u_x = v_2 = 0,8c$. A sebesség összeadás szerint

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1+\frac{v_0u'_x}{c^2}}, \tag{19.5.4}$$

amelyből

$$u'_x = \frac{u_x - v_0}{1-\frac{v_0u_x}{c^2}} = 0,384c. \tag{19.5.5}$$

19.6. Feladat: A kezdetben $v_0 = 0,6c$ sebességű m_0 nyugalmi tömegű részecske impulzusát 16/9-szeresére növeljük. Mekkora lesz a végső v_2 sebesség és mekkora energia befektetés kellett ehhez?
(a) Számítsa ki klasszikusan!
(b) Számítsa ki relativisztikus közelítésben!

Megoldás:

(a) Klasszikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben $m_0 v_0$, a gyorsítás végén $m_0 v_2$. A feladat szövege szerint

$$m_0 v_2 = \frac{16}{9} m_0 v_0, \tag{19.6.1}$$

amelyből

$$v_2 = \frac{16}{9} v_0 = \frac{16}{15} c. \tag{19.6.2}$$

A befektetendő energia

$$W_{kl} = \frac{1}{2} m_0 v_2^2 - \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = 0,389 m_0 c^2. \tag{19.6.3}$$

(b) Relativisztikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben

$$\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}, \tag{19.6.4}$$

a gyorsítás végén

$$\frac{m_0 v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}. \tag{19.6.5}$$

A feladat szövege szerint fennáll, hogy

$$\frac{m_0 v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{16}{9} \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}. \tag{19.6.6}$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy

$$v_2 = 0,8c. \tag{19.6.7}$$

A befektetendő energia

$$W_{rel} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{12} m_0 c^2 = 0,4167 m_0 c^2. \tag{19.6.8}$$

19.7. Feladat: Egy M tömegű részecske $v_1 = 0,6c$ sebességgel összeütközik egy másik m tömegű és $v_2 = 0,8c$ sebességű ellenkező irányba mozgó részecskével. Az ütközés után a két részecske egy összetett rendszert képez, amely a laboratóriumhoz képest nyugalomban van. Mekkora az M/m arány?

Megoldás: Az impulzus megmaradás ez esetben

$$\frac{M v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{m v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \tag{19.7.1}$$

alakban fogalmazható meg. Az adatok behelyettesítése után a kérdezett hányados

$$\frac{M}{m} = \frac{16}{9}. \tag{19.7.2}$$