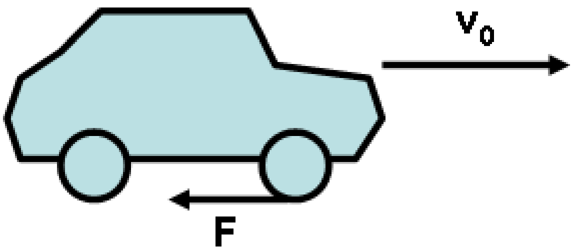
Útmutató fizika feladatok megoldásához

(Fizika1 villamosmérnököknek)

Sarkadi Tamás, Márkus Ferenc

A fizika1 tárgy egyik célkitűzése, hogy a hallgatókat hozzászoktassuk a fizika feladatok **szimbolikus** számítás segítségével való megoldásához, szemben az egyes középiskolákban megszokott numerikus megoldási módszerekkel. Az alábbi példával szeretnénk megmutatni a szimbolikus számítás előnyeit, valamint a numerikus megoldási módszer hátrányait.

Feladat. Egy m=1200 kg tömegű autó v_0=108 km/h sebességgel közlekedik. A sofőr fékezni kezd. A fékezés során az autóra mindvégig F=5000 N fékezőerő hat az ábra szerint. Mekkora s utat tesz meg az autó a fékezés kezdetétől a megállásig, azaz mekkora az autó fékútja?



1. Szimbolikus megoldási módszer (Javasolt!)

Nézzük meg, hogyan oldhatjuk meg a fenti feladatot **szimbolikus számítási módszerrel**. A megoldási módszer lényege, hogy a fizikai mennyiségeket szimbólumokkal, „betűkkel" jelöljük. Az egyenleteket a **szimbólumok rendezésével oldjuk meg**, amíg el nem jutunk a végső formulához, a szimbolikus megoldáshoz. **Utolsó lépésként behelyettesíthetjük** az adatokat a szimbolikus megoldás képletébe.

A rendelkezésre álló adatokat átváltjuk SI mértékrendszerbe.

$$m = 1200kg$$
$$v_0 = 108\frac{km}{h} = 30\frac{m}{s}$$
$$F = 5000N$$

Az autót tömegpontnak tekintjük, a probléma megoldásához tehát a tömegpont mozgásegyenletét, Newton II. törvényét használjuk, melyet az alábbi vektoregyenlet fejez ki:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (1.1)$$

A probléma tekinthető egydimenziósnak, hiszen a mozgás pályája egyenes. Pozitív iránynak tekintsük az autó haladási irányát. A fékező erő negatív irányban ébred, tehát az autó gyorsulása előjelhelyesen az (1.2) kifejezéssel adható meg. Mivel a feladatot **szimbolikusan** oldjuk meg, a tömeg és erő adatokat **nem helyettesítjük be** a képletbe.

$$a = -\frac{F}{m} \qquad (1.2)$$

A következő lépésben meghatározzuk, mennyi idő szükséges ahhoz, hogy az autó megálljon. Tudjuk, hogy az autó egyenletesen változó mozgást végez, így az alábbi kinematikai összefüggésből indulhatunk ki:

$$v(t) = v_0 + at \tag{1.3}$$

Mely a test sebességét adja meg az idő függvényében. Az autó abban a *t* időpillanatban áll meg, amikor a fenti függvény *v(t)*=0 értéket vesz fel. Az alábbi egyenletből kell tehát kifejeznünk *t*-t.

$$0 = v_0 + at \;\Rightarrow\; t = -\frac{v_0}{a} \tag{1.4}$$

Ezzel kaptunk egy kifejezést, mely megadja, mennyi idő kell az autó megállásához, **a numerikus adatokat** azonban **nem helyettesítjük be**.
Számítsuk ki, mekkora utat tesz meg a lassuló jármű ennyi idő alatt. Ehhez az alábbi kinematikai összefüggést használjuk:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \tag{1.5}$$

A fenti egyenletben *t* helyére behelyettesítjük a (1.4)-ben kapott összefüggést, és a kapott eredményt algebrailag egyszerűsítjük.

$$s = -v_0 \frac{v_0}{a} + \frac{a}{2}\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0^{\,2}}{2a} \tag{1.6}$$

A kapott kifejezésbe behelyettesítjük a gyorsulás értékére korábban meghatározott (1.2)-es összefüggést, miáltal a következő eredményt kapjuk:

$$\boxed{s = \frac{m v_0^{\,2}}{2F}} \tag{1.7}$$

A fenti összefüggés **a feladat szimbolikus megoldása**. A képlet ugyanis **megmutatja, hogy a megadott paraméterektől hogyan függ** a fékút.
Utolsó lépésben behelyettesíthetjük a numerikus értékeket az (1.7)-es összefüggésbe:

$$s = \frac{m v_0^{\,2}}{2F} = \frac{1200kg\left(30\frac{m}{s}\right)^2}{2 * 5000N} = \underline{\underline{108m}} \tag{1.8}$$

Az autó fékútja tehát 108 m.

Lássuk, **miért célszerű** a feladatokat szimbolikus számítással megoldani!

1) A számológépet csak a végén kell elővenni. A minimalizált mennyiségű numerikus számolás **kevesebb hibalehetőséget** rejt magában. Az elvégzendő számolási feladat sokszor olyan egyszerű, hogy akár fejben is kiszámítható. Jelen esetben például az egész számok halmazán is elvégezhető a művelet.

2) **Kevesebb kerekítésből származó pontatlanságot** viszünk a számolásba ahhoz képest, mintha minden részeredményt kiszámítottunk volna numerikusan. Ugyanis minden részeredmény meghatározásakor bizonyos kerekítéssel élnénk, amely a számolást lépésről lépésre pontatlanabbá teszi. (v.ö. 2. fejezet)

3) **Ha megváltoztatjuk** a kiindulási paramétereket, nem kell a teljes gondolatmenetet újra végigjárni, **elég csak az új adatokat behelyettesíteni** az (1.7) összefüggésbe. Ezzel adott esetben „gépidőt" takaríthatunk meg.

4) A végeredményként kapott szimbolikus kifejezés **feltárja az összefüggéseket a mennyiségek között. Ez a Fizika lényege!** Az összefüggések elemzését, következtetések levonását diszkussziónak hívják. Erre látunk példát az alábbiakban:

Az (1.7)-es kifejezésből könnyedén kiolvashatjuk, hogy a fékút egyenesen arányos az autó tömegével, hiszen az *m* a számlálóban szerepel. Ez hétköznapi tapasztalatainkkal teljesen egybevág. Egy nehéz, pontosabban nagy tehetetlenségű jármű, pl. egy vonat fékútja általában hosszabb, mint egy kis tömegű autóé.

Az *F* fékezőerő a nevezőben szerepel. Tehát minél erősebb a fék, annál rövidebb a fékút. Ez világos. Igen meglepő lenne, ha *F* a számlálóban bukkanna fel. Nyomban átnéznénk a levezetést, nincs-e benne hiba. Tehát **a szimbolikus számolás könnyebben ellenőrizhető**. (Tanárként is könnyebb javítani a szimbolikus számítással leírt levezetéseket, a dolgozatban könnyebb részpontokat adni az egyes levezetési lépésekre.)

Még egy érdekes összefüggés is kiolvasható az (1.7)-es megoldásból. A fékút a kezdősebesség négyzetével arányos. (Az autóvezetők számára életbevágóan fontos lehet, hogy ezek szerint a sebességkorlát 20 %-os túllépése a fékutat 44 %-kal növeli meg.) Mindez rejtve marad az előtt, aki a feladatot numerikusan oldja meg.

Ha tovább nézzük az (1.7) végeredményt, felfedezhetjük benne a jármű kezdeti kinetikus energiájára vonatkozó $E_0={}^1/_2 m v_0^2$ összefüggést.

$$s = \frac{m{v_0}^2}{2F} = \frac{1}{2} m{v_0}^2 \cdot \frac{1}{F} = \frac{E_0}{F} \qquad (1.9)$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy az autó fékútja egyenesen arányos a kezdeti kinetikus energiájával, és fordítottan arányos a fékező erővel. Az (1.9)-es összefüggés és a munkatétel közötti kapcsolat feltárását az Olvasóra bízzuk.

2. Numerikus megoldási módszer **(Kerülendő!)**

Elrettentés gyanánt bemutatjuk a sokak számára megszokott, de kevésbé szerencsés **numerikus megoldási módszert**. A fizikai mennyiségek konkrét numerikus értékeit leírva állítjuk fel az egyenleteinket, **az egyenletrendezés során mindvégig „számokkal” dolgozunk**.

A rendelkezésre álló adatokat átváltjuk SI mértékrendszerbe.

$$m = 1200 kg$$
$$v_0 = 108\frac{km}{h} = 30\frac{m}{s}$$
$$F = 5000 N$$

Az autót tömegpontnak tekintjük, a probléma megoldásához tehát a tömegpont mozgásegyenletét, Newton II. törvényét használjuk, melyet az alábbi vektoregyenlet fejez ki:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1}$$

A probléma tekinthető egy dimenziósnak, hiszen a mozgás pályája egyenes. Pozitív iránynak tekintsük az autó haladási irányát. A fékező erő negatív irányban ébred, tehát az autó gyorsulása előjelhelyesen a (2.2) kifejezéssel határozható meg. Mivel a feladatot **numerikusan** oldjuk meg, a tömeg és erő adatokat **egyből behelyettesítjük** a képletbe, és két tizedesjegy pontossággal kiszámítjuk a gyorsulást:

$$a = -\frac{F}{m} = -\frac{5000 N}{1200 kg} = -4{,}16\frac{m}{s^2} \tag{2.2}$$

A következő lépésben meghatározzuk, mennyi idő szükséges ahhoz, hogy az autó megálljon. Tudjuk, hogy az autó egyenletesen változó mozgást végez, így az alábbi kinematikai összefüggésből indulhatunk ki:

$$v(t) = v_0 + at \tag{2.3}$$

Mely a test sebességét adja meg az idő függvényében. Az autó abban a t időpillanatban áll meg, amikor a fenti függvény $v(t)=0$ értéket vesz fel. Mivel a feladatot **numerikusan** oldjuk meg, az adatokat **rögtön behelyettesítjük** a fenti egyenletbe, és egyenlővé tesszük nullával:

$$0 = 30\frac{m}{s} - 4{,}16\frac{m}{s^2}\cdot t \tag{2.4}$$

A numerikus egyenletet megoldjuk t-re két tizedesjegy pontossággal, az alábbi eredményt kapjuk:

$$t = 7{,}21s$$

Tehát 7,21 s idő alatt áll meg az autó. Számítsuk ki, mekkora utat tesz meg a lassuló jármű ennyi idő alatt. Ehhez az alábbi kinematikus összefüggést használjuk:

$$s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \tag{2.5}$$

A **numerikus adatokat behelyettesítjük** a képletbe, és kiszámítjuk a fékút hosszát:

$$s = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 = 30 \frac{m}{s} 7{,}21s - \frac{4{,}16 \frac{m}{s^2}}{2} (7{,}21s)^2 = 216{,}3m - 108{,}12m = \underline{\underline{108{,}18m}} \tag{2.6}$$

Tehát az autó fékútja 108,18 m.

Lássuk, **miért nem célszerű** a fenti megoldási módszert használni!

1) Sokat kell **feleslegesen nyomkodni** a számológépet.

2) A számolás eredménye **igen pontatlan**. A helyes eredmény ugyanis 108 m lenne, (v.ö. szimbolikus számítási módszer (1.8)) A pontatlanság oka, hogy minden részeredmény kiszámításakor kerekítettük az eredményeinket, a **kerekítési hibák** a feladat megoldása során pedig **halmozódtak.** Hiába számoltunk tehát két tizedesjegy pontossággal, már a végeredmény első tizedesjegye is fals információt hordoz. (Egy autó fékútjánál 18 cm tévedés akár balesetveszélyes is lehet)

3) A papírra vetett sok szám **eltakarja a gondolatmenet lényegét**. Nehezen derül ki, ha hibát vétettünk a számolásban, még nehezebben, hogy hol vétettük a hibát! (Egy tanár aligha tud értékelni egy számokkal áttekinthetetlenül teleírt dolgozatot.)

4) **Ha módosítjuk** a kezdeti adatokat, pl: nézzük meg, hogy alakul a fékút 50 km/h sebesség mellett, teljesen **újra kell számolnunk az egészet**.

Eredményes tanulást kívánunk!