Matematikai összefoglaló

Vektorok

Nagyon sok olyan mennyiség van, amely nem jellemezhető egyetlen számmal. Az ilyen mennyiségre a legegyszerűbb és mindenki által jól ismert példa, valamely pontnak a helyzete a térben. Amikor tájékozódunk és egy pont helyzetét meg akarjuk határozni, akkor mindig más ponthoz képesti helyzetét adjuk meg. Ezt a pontot vonatkoztatási pontnak, vagy origónak nevezzük. Ettől mérjük a pont távolságát. Ahhoz, hogy a pont helyzete egyértelmű legyen, két kiválasztott irányhoz képesti két szöget is meg kell adni. Vagyis egy pont helyzetét így három adat fogja jellemezni, egy távolság és két szög.

Általában az olyan mennyiségeket, amelyek a nagyságukkal és irányukkal jellemezhetőek, vektoroknak nevezzük.

Jelölésükre nyomtatásban vastagon szedett kis és nagy betűket használunk. Kézírásban pedig alul, vagy felül vonással jelezzük az adott mennyiség vektor voltát.

Például:

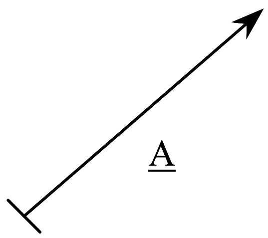
	nyomtatásban	kézírásban
helyvektor	**r**	$\underline{r}$ vagy $\bar{r}$

Általában ha “A” egy vektor, akkor

	nyomtatásban	kézírásban
bármely vektor	**A**	$\underline{A}$ vagy $\overline{A}$

Grafikus ábrázolás:

Vektorok ábrázolása rendkívül szemléletes, amelyet egy irányított szakasz jelképez. A vektor nagyságát (hosszát) a szakasz hossza jelzi, az irányát pedig a szakasz egyik végére tett nyíl (lásd 1. ábra).



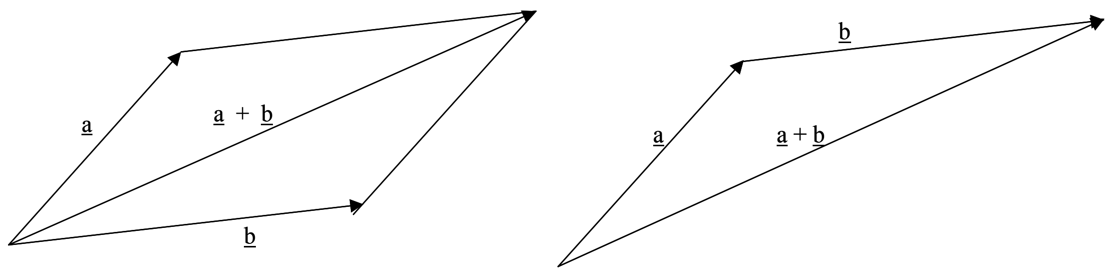
1. ábra.
Az $\underline{A}$ vektor grafikus ábrázolása

Az $\underline{A}$ vektor hosszát $|\underline{A}|$-val jelöljük, amit a vektor abszolutértékének is szokás nevezni. Előfordul, hogy az abszolutértéket egyszerűen csak A-val jelölik. Az $|\underline{A}|$ mindig nagyobb, vagy egyenlő 0.

<u>Műveletek vektorokkal:</u>

<u>Összeadás:</u>

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két vektor, akkor az $\underline{a}+\underline{b}$ vektort úgy értelmezzük, hogy a két vektor kezdőpontjait egy pontba helyezzük az egyik vektor önmagával párhuzamos eltolásával, és két vektor által kifeszített parallelogramma átlóját tekintjük az $\underline{a}+\underline{b}$ vektornak. Az összegvektor iránya a közös pontból a parallelogramma átellenes csúcsa felé mutat.



a) b)

2. ábra.
Két vektor összege (parallelogramma szabály)

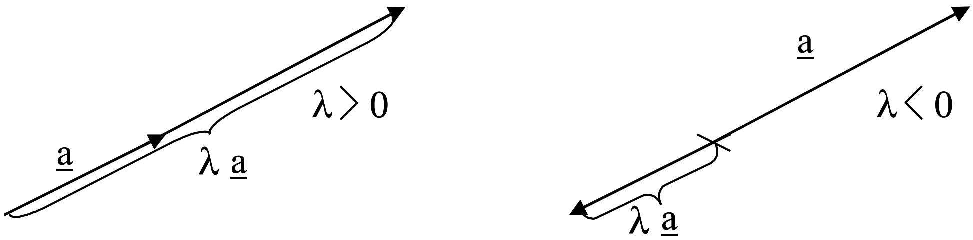
A 2. ábra b) ábrája jelzi az $\underline{a}+\underline{b}$ vektor egy ekvivalens előállítását.

Az összeadás műveletének definíciójából jól látszik, hogy a vektorok összeadása kommutatív (felcserélhető) művelet, azaz

$$\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$$

Vektor valós számmal való szorzása:

Ha $\underline{a}$ egy vektor és λ egy valós szám, akkor a $\lambda\underline{a}$ vektort úgy értelmezzük, amelynek iránya $\underline{a}$-val azonos, ha $\lambda > 0$, és $\underline{a}$-val ellentétes, ha $\lambda < 0$, nagysága pedig $|\lambda| \cdot |\underline{a}|$ (lásd 3. ábra).



3. ábra

Kivonás:

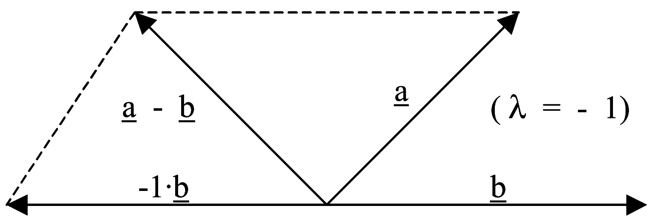
Két vektor kivonását az összeadás és a valós számmal való szorzás definíciója alapján értelmezzük.

Az összeadás és a valós számmal való szorzás alapján értelmezni lehet két vektor különbségét is.

Legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két vektor, akkor

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-1 \cdot \underline{b})$$

módon lehet értelmezni a két vektor különbségét (lásd 4. ábra).



4. ábra.
Két vektor különbsége

Egységvektor:

Az olyan vektort, amelynek abszolútértéke (hossza) egységnyi, egységvekornak nevezzük. Ha $\underline{a}$ egy vektor és „a” a vektor nagysága, akkor 1/a-val szorozva az $\underline{a}$ vektort, $\underline{a}$ irányába mutató egységvektort kapunk.

Jelöljük ezt $\underline{e}$-vel $\qquad \underline{e} = \frac{1}{a}\underline{a}$

Valóban $\qquad |\underline{e}| = \frac{1}{a}|\underline{a}| = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Ez azt jelenti, hogy bármely vektor a saját irányába mutató egységvektor és egy λ szám szorzataként előállítható.

$\underline{a} = \lambda \underline{e}$ ahol $\underline{e}$ az $\underline{a}$ irányába mutató egységvektor és $\lambda = |\underline{a}|$

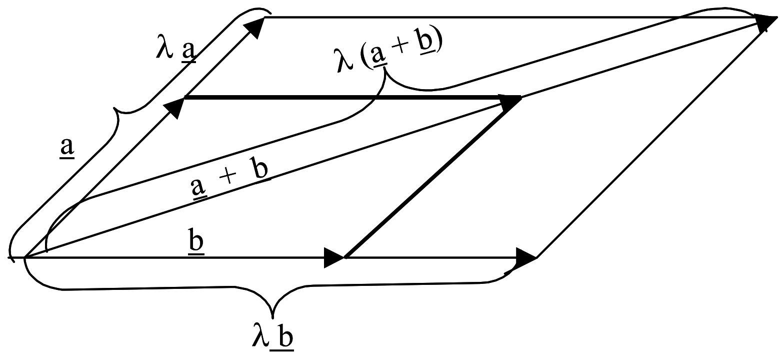
Disztributivitás a számmal való szorzásra:

Két vektor összegét szorozva λ valós számmal

arra nézve igaz a következő állítás: $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$

Biz:

(lásd 5. ábra).



5. ábra

A háromszögek hasonlóságából következik, hogy λb és λa oldalhosszúságú parallelogramma átlója is λ szorosára változik.

Továbbá ha μ és λ valós számok és $\underline{a}$ egy vektor, akkor igaz a következő állítás:

$$(\mu + \lambda)\,\underline{a} = \mu\,\underline{a} + \lambda\,\underline{a}$$

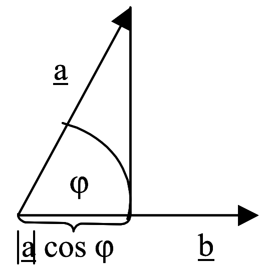
Biz.: Mivel a valós számmal való szorzás az $\underline{a}$ vektor irányát nem változtatja meg csak a vektor hosszát, ezért az állítás ekvivalens a valós számokra vonatkozó disztributív szorzási szabállyal.

Skaláris szorzás:

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor skaláris szorzatán azt a valós számot értjük, amelyet $\underline{a} \cdot \underline{b}$-vel jelölünk és a következő módon definiálunk:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a \cdot b \cos \varphi,$$

ahol „a" és „b" az $\underline{a}$ illetve $\underline{b}$ vektorok hosszai (nagyságai), φ pedig a két vektor által bezárt kisebbik szög (lásd 6. ábra).



6. ábra.

Két vektor skaláris szorzata az 6. ábra szerint megadja az $\underline{a}$ vektornak $\underline{b}$ vektor irányába eső vetületének $\underline{b}$ vektor hosszával való szorzatát. Az előállításból látszik, hogy

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

azaz a skaláris szorzat kommutatív.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a \cdot b \cos \varphi = b \cdot a \cos \varphi = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

Két vektor skaláris szorzását a „·"jel jelzi szemben a valós számoknál nem kiírt szorzásjellel. Előforduló jelölés még két vektor skaláris szorzására $(\underline{a}\ \underline{b})$ jelölés is. A skaláris szorzat lehetőséget ad arra, hogy megállapítsuk azt, hogy két vektor merőleges egymásra. Ugyanis ha két nem nulla vektor skaláris szorzata 0, az csak úgy lehetséges, hogy a definícióban szereplő $\cos \varphi = 0$ azaz $\varphi = \frac{\pi}{2}\left(90^\circ\right)$.

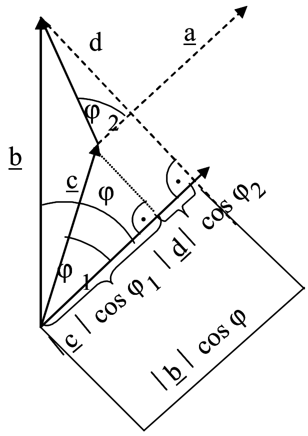
Skaláris szorzás disztributivitása:

Ha pl. a $\underline{b}$ vektor két másik vektor összege

$$\underline{b} = \underline{c} + \underline{d}$$

akkor $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\underline{c} + \underline{d}) = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} \cdot \underline{d}$

Ezt nevezzük a skaláris szorzat disztributivitásának (szétválaszthatóság). Bizonyítást lásd 7. ábra szerint.



7. ábra

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\varphi = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} \cdot \underline{d} = |\underline{a}| \cdot |\underline{c}| \cos\varphi_1 + |\underline{a}|\,|\underline{d}| \cos\varphi_2 = |\underline{a}| \left(|\underline{c}| \cos\varphi_1 + |\underline{d}| \cos\varphi_2 \right)$$

de a 7. ábra szerint

$$|\underline{c}| \cos\varphi_1 + |\underline{d}| \cos\varphi_2 = |\underline{b}| \cos\varphi$$

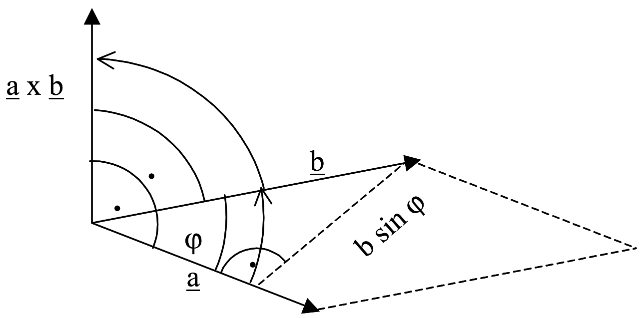
így valóban igaz a disztributivitás.

Vektoriális szorzat:

A vektoriális szorzat eredménye vektor, amelynek nagyságát a két vektor hosszának (nagyságának) és a két vektor által bezárt szög szinuszának szorzata adja úgy mérve a szöget, hogy az $\underline{a}$ vektortól $\underline{b}$ felé az óramutató járásával ellentétesen jutunk.

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = ab \sin\varphi \qquad \text{(az } \underline{a} \times \underline{b} \text{ nagysága)}$$

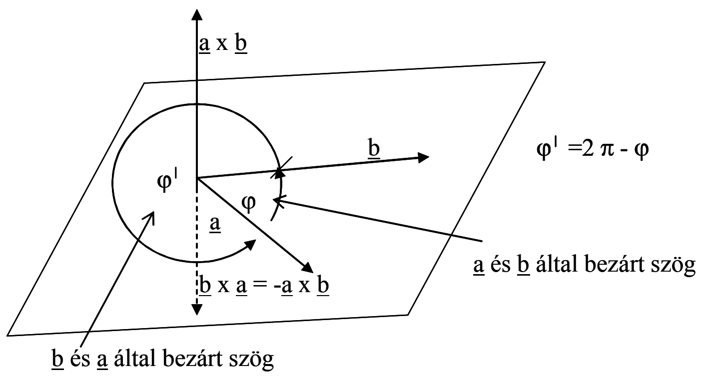
Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor iránya pedig az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok által kifeszített síkra merőleges irány, úgy, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok jobbsodrású tengelyrendszert alkotnak (8. ábra).



8. ábra
Vektoriális szorzat

Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor mind az $\underline{a}$, mind a $\underline{b}$ vektorra merőleges és nagysága az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor által kifeszített parallelogramma területével egyezik (lásd 8. ábra).

Az $\underline{a}$-ból a $\underline{b}$-n keresztül, az óramutató járásával ellentétesen jutunk az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor irányába. A definícióból rögtön következik, hogy a vektoriális szorzat nem kommutatív, hanem $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$ (lásd 9. ábra)



9. ábra
„jobb kéz szabály”

A fenti szorzási szabály „jobb kéz szabály” néven is ismert.

<u>Vektoriális szorzás disztributivitása</u>:

Ha $\underline{b}$ két vektor összege $\underline{b} = \underline{c} + \underline{d}$

akkor a vektoriális szorzásra is igaz a disztributivitás (szétoszthatóság)

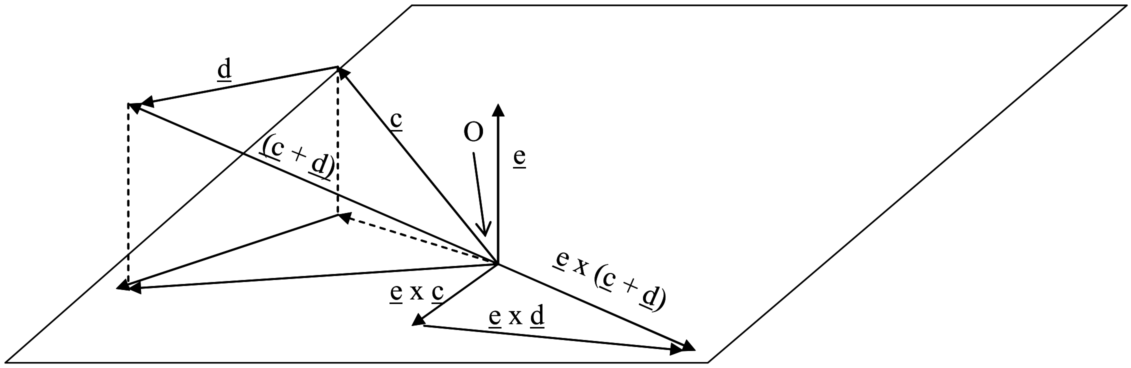
$$\underline{a} \times (\underline{c} + \underline{d}) = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{a} \times \underline{d}$$

mivel $\underline{a} = \lambda \underline{e}$

alakban előállítható, ezért λ-val való osztással a fenti egyenlet

$$\underline{e} \times (\underline{c} + \underline{d}) = \underline{e} \times \underline{c} + \underline{e} \times \underline{d} \quad \text{alakú.}$$

Ezért elegendő elvégezni a bizonyítást $\underline{a}$ irányába mutató egységvektorra, mert λ-val való szorzással az eredeti állítást kapjuk.



10. ábra

Vetítsük az $\underline{e}$-re merőleges síkra a $\underline{c}$ vektort a $\underline{d}$ vektort és a $\underline{c}+\underline{d}$ vektort. Ezen vetületeknek a hossza rendre (lásd 10. ábra).

$$|\underline{c}|\ \sin(\underline{c},\underline{e}),$$

$$|\underline{d}|\ \sin(\underline{d},\underline{e}),$$

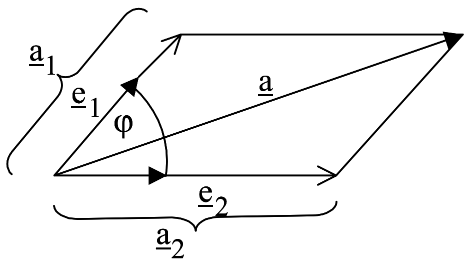
$$|\underline{c}+\underline{d}|\ \sin(\underline{c}+\underline{d},\ \underline{e})$$

ahol $(\underline{c},\underline{e})$, $(\underline{d},\underline{e})$ és $(\underline{c}+\underline{d},\ \underline{e})$ az $\underline{e}$ vektornak és a $\underline{c}$, illetve $\underline{d}$, valamint $\underline{c}+\underline{d}$-vel bezárt szögeit jelöli.

Ezek az értékek éppen az $\underline{e}\times\underline{c}$, az $\underline{e}\times\underline{d}$ és $\underline{e}\times(\underline{c}+\underline{d})$ szorzatok abszolút értékei. Így ha a levetített szakaszból álló háromszöget 90°-al az O körül $\underline{e}$-re merőleges síkban az óra járásával ellentétes irányban elfordítjuk, éppen az $\underline{e}\times\underline{c}$ a $\underline{e}\times\underline{d}$ és a $\underline{e}\times(\underline{c}+\underline{d})$ vektorokat kapjuk. Ezzel állításunkat beláttuk.

Vektorok koordinátás alakjai

Legyen $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ ugyanazon síkban lévő egymással $\varphi \neq 0$ szöget bezáró egységvektorok, akkor egy ugyanezen síkban lévő tetszőleges $\underline{a}$ vektor ezen egységvektorok segítségével előállítható (lásd 11. ábra). Helyezzük e három vektor kezdőpontját egy közös pontba, a vektorok önmagukkal párhuzamos eltolásával. Az $\underline{a}$ vektor végpontján keresztül húzzunk egy-egy párhuzamos egyenest az $\underline{e}_1$, illetve $\underline{e}_2$ irányával. Ezen egyenesek egyike az $\underline{e}_1$ irányban kijelöl egy $\underline{a}_1$ vektort, és a másik az $\underline{e}_2$ irányban egy $\underline{a}_2$ vektort.



11. ábra

$\underline{a}$ vektor felbontása két $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$ egységvektor irányába mutató vektorra

A parallelogramma szabály szerint

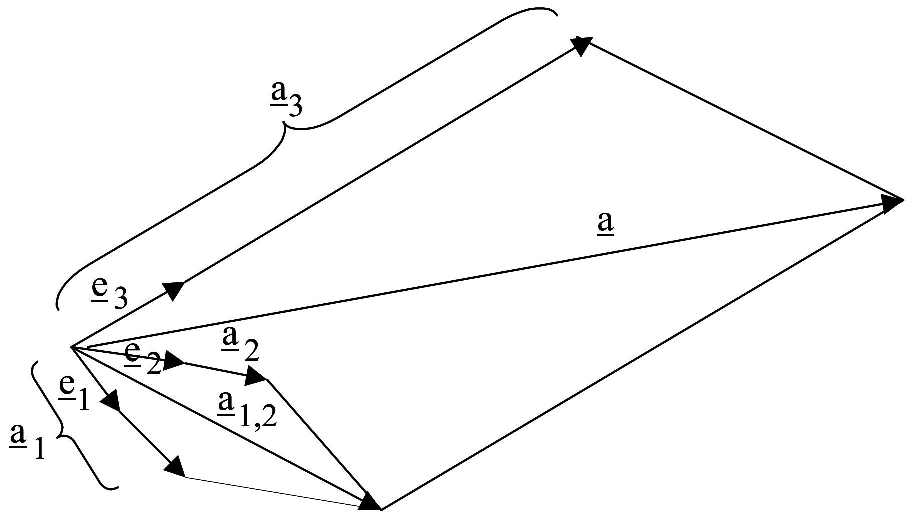
$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 \qquad \text{de} \qquad \underline{a}_1 = a_1\underline{e}_1 \qquad \text{és} \qquad \underline{a}_2 = a_2\underline{e}_2$$

így

$$\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2$$

Ez azt jelenti, hogy bármely egy síkban lévő, nem azonos irányú két egységvektor alkalmas arra, hogy az általuk kifeszített sík bármely $\underline{a}$ vektorát előállítsuk. Más szavakkal, az a_1 és a_2 számok az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ egységvektorok által kifeszített síkban egyértelműen meghatározzák az $\underline{a}$ vektort.

Ha nem két egységvektort hanem három nem egysíkban lévő egységvektort választunk, ugyanezt az eredményt kapjuk háromdimenziós esetben is (lásd 12. ábra).



12. ábra

Az ábrából a parallelogramma szabály szerint

$$\underline{a} = \underline{a}_{1,2} + \underline{a}_3$$

de $\underline{a}_{1,2} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$,

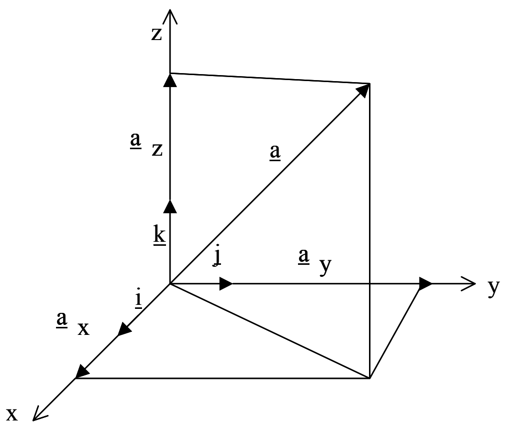
így $\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3$

Mivel $\underline{a}_1 = a_1 \underline{e}_1$, $\underline{a}_2 = a_2 \underline{e}_2$ és $\underline{a}_3 = a_3 \underline{e}_3$

Így $\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3$

Vagyis az $\underline{a}$ vektor az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ úgynevezett bázisvektorok által meghatározott bázison az a_1, a_2 és a_3 számokkal egyértelműen meghatározott.

Az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ ilyen választása a legáltalánosabb. A gyakorlat számára igazán fontos eset, amikor az $\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ kölcsönösen merőlegesek egymásra. Ez megfelel a Descartes-féle derékszögű koordináta rendszernek, amelynek tengelyei merőlegesek egymásra. Általánosan elfogadott, hogy a Descartes rendszerben az x, y és z irányokba mutató egységvektorok jelölése $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$.



13. ábra
Descartes-féle koordináta rendszerben az $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ egységvektorok

Így egy tetszőleges $\underline{a}$ vektor

$$\underline{a} = \underline{a}_x + \underline{a}_y + \underline{a}_z$$

de $\underline{a}_x = a_x \underline{i}$, $\underline{a}_y = a_y \underline{j}$, $\underline{a}_z = a_z \underline{k}$

amiből $\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$

Így egy tetszés szerinti $\underline{a}$ vektor a Descartes-féle koordináta rendszerben jellemezhető egy a_x, a_y, a_z számhármassal, azaz $\underline{a}$ vektor azonosítható ezen számhármassal.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Az a_x, a_y, és a_z-t a vektor x, y és z komponenseinek (koordinátáinak) nevezzük.

Mivel $\underline{i}$, $\underline{j}$ és $\underline{k}$ kölcsönösen merőleges egységvektorok, így a skaláris szorzat definíciójából következnek a következő összefüggések:

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = \underbrace{|\underline{i}|}_{|\underline{i}|=1} \underbrace{|\underline{i}|}_{|\underline{i}|=1} \cos(\underline{i}, \underline{i}) = 1$$

ahol $\cos(\underline{i}, \underline{i})$ jelöli $\underline{i}$ vektornak önmagával bezárt szög (0º) koszinuszát.

Hasonlóan

$$\underline{j} \cdot \underline{j} = 1 \qquad \text{és} \qquad \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$$

A kölcsönös merőlegességből

$$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underbrace{|\underline{i}|}_{|\underline{i}|=1} \underbrace{|\underline{i}|}_{|\underline{i}|=1} \cos(\underline{i}, \underline{j}) = 0$$

ahol $\cos(\underline{i}, \underline{j})$ jelenti az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok által bezárt szög (90º) koszinuszát.

Hasonlóan $\underline{j} \cdot \underline{k} = 0$

$$\underline{k} \cdot \underline{i} = 0$$

Ugyanúgy a vektoriális szorzás szabályából kapjuk:

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k} \quad \rightarrow \quad \underline{j} \times \underline{i} = -\underline{k}$$

$$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i} \quad \rightarrow \quad \underline{k} \times \underline{j} = -\underline{i}$$

$$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j} \quad \rightarrow \quad \underline{i} \times \underline{k} = -\underline{j}$$

Összeadás koordinátás szabályai (Descartes rendszer):

Legyen két vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k} \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

Ekkor felhasználva a vektorok valós számokkal való szorzásra vonatkozó disztributív szabályokat:

$$\underline{a}+\underline{b}=(a_x+b_x)\underline{i}+(a_y+b_y)\underline{j}+(a_z+b_z)\underline{k}, \qquad \underline{a}+\underline{b}=\begin{pmatrix} a_x+b_x \\ a_y+b_y \\ a_z+b_z \end{pmatrix}$$

Vagyis két vektor összegének koordinátái a vektorok koordinátáinak összege.

Skalárral való szorzás koordinátás alakja:

Legyen $\underline{a}$ egy vektor és λ egy valós szám.

Az $\underline{a}$ koordinátás alakja: $\underline{a}=a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k}$

A skalárral való szorzás disztributív tulajdonság miatt

$$\lambda\underline{a}=\lambda a_x\underline{i}+\lambda a_y\underline{j}+\lambda a_z\underline{k}$$

Vagyis $$\lambda\underline{a}=\begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

azaz minden koordináta λ-szorosára változik.

Skaláris szorzás koordinátás alakja:

Legyen két vektor $\underline{a}=a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k}$

$\underline{b}=b_x\underline{i}+b_y\underline{j}+b_z\underline{k}$

Ekkor a skaláris szorzás disztributív szabálya miatt

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=(a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k})(b_x\underline{i}+b_y\underline{j}+b_z\underline{k})=$$
$$=a_xb_x\underline{i}\cdot\underline{i}+a_xb_y\underline{i}\cdot\underline{j}+a_xb_z\underline{i}\cdot\underline{k}+$$
$$+a_yb_x\underline{j}\cdot\underline{i}+a_yb_y\underline{i}\cdot\underline{j}+a_yb_z\underline{j}\cdot\underline{k}+$$
$$+a_zb_x\underline{k}\cdot\underline{i}+a_zb_y\underline{k}\cdot\underline{j}+a_zb_z\underline{k}\cdot\underline{k}$$

Mivel $\underline{i}\cdot\underline{j}=\underline{i}\cdot\underline{k}=\underline{j}\cdot\underline{k}=0$ és $\underline{i}\cdot\underline{i}=\underline{j}\cdot\underline{j}=\underline{k}\cdot\underline{k}=1$

így kapjuk:

$$\boxed{\underline{a}\cdot\underline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

Speciálisan $\underline{a} = \underline{b}$ esetén $\qquad \underline{a}\cdot\underline{a} = |\underline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

Amelyből $\qquad |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad$ ami a vektor abszolút értéke.

Megjegyezzük, hogy $\underline{a}\cdot\underline{a}$ helyett gyakran az $\underline{a}^2$ jelölést használják.

<u>Vektoriális szorzás koordinátás alakja</u>

Legyen $\qquad \underline{a} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}$

és $\qquad \underline{b} = b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k}$

Ekkor

$$\underline{a}\times\underline{b} = a_x b_x \underline{i}\times\underline{i} + a_x b_y \underline{i}\times\underline{j} + a_x b_z \underline{i}\times\underline{k} +$$

$$+ a_y b_x \underline{j}\times\underline{i} + a_y b_y \underline{j}\times\underline{j} + a_y b_z \underline{j}\times\underline{k} +$$

$$+ a_z b_z \underline{k}\times\underline{i} + a_z b_y \underline{k}\times\underline{j} + a_z b_z \underline{k}\times\underline{k}$$

Kihasználtuk a vektoriális szorzás disztributív voltát.

Mivel $\qquad \underline{i}\times\underline{i} = \underline{j}\times\underline{j} = \underline{k}\times\underline{k} = 0$

és $\qquad \underline{i}\times\underline{j} = \underline{k} \qquad \underline{j}\times\underline{k} = -\underline{k}$

$\underline{j}\times\underline{k} = \underline{i} \qquad \underline{k}\times\underline{j} = -\underline{i}$

$\underline{k}\times\underline{i} = \underline{j} \qquad \underline{i}\times\underline{k} = -\underline{j}$

Kapjuk

$$\boxed{\underline{a}\times\underline{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\underline{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\underline{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\underline{k}}$$

A könnyebb megjegyezhetőség végett

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

A determináns kifejtési szabály szerint éppen a fenti eredményt adja.

Kettős vektoriális szorzat (kifejtési tétel)

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ három vektor, akkor értelmezni lehet az

$(\underline{a} \text{ x } \underline{b}) \text{x } \underline{c}$ és az $\underline{a} \text{ x}(\underline{b} \text{ x } \underline{c})$ vektoriális szorzatokat.

A $(\underline{b} \text{ x } \underline{a}) \text{x } \underline{c}$ a $\underline{c} \text{ x}(\underline{a} \text{ x } \underline{b})$ és az $\underline{a} \text{ x}(\underline{c} \text{ x } \underline{b})$ szorzatok is értelmesek de ezek az előbbi kettő -1-el való szorzásából megkaphatók. Ezért elegendő az $(\underline{a} \text{ x } \underline{b}) \text{x } \underline{c}$ és az $\underline{a} \text{ x}(\underline{b} \text{ x } \underline{c})$ vektoriális szorzatokat vizsgálni.

Kifejtési tétel:

Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ tetszőleges vektorok, akkor a következő két azonosság igaz:

$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a}\,\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c})\underline{a}$ illetve $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\,\underline{b})\underline{c}$

A második egyenlőség az elsőből megkapható, hiszen egy tényezőcserével az első egyenletből kapjuk -1-el való szorzás után.

$\underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = -(\underline{a}\underline{c})\underline{b} + (\underline{b}\,\underline{c})\underline{a}$

Betűcserével $\underline{c} \leftrightarrow \underline{a}$ pedig ebből $\underline{a} \times (\underline{c} \times \underline{b}) = -(\underline{c}\,\underline{a})\underline{b} + (\underline{b}\,\underline{a})\underline{c}$ -t kapunk, amelyből a $\underline{c} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{c}$ helyettesítés és -1-el való szorzás után $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}\,\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\,\underline{b})\underline{c}$ egyenlőséget kapjuk, ami éppen a második azonosság. Ezért elegendő belátni csak az első azonosságot, azaz a $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a}\,\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c})\underline{a}$ -t.

Bizonyítás:

1) Nézzük először azt az esetet, amikor $\underline{a} \parallel \underline{b}$. Ekkor mindkét vektor egy $\underline{e}$ egységvektorral kifejezhető: $\underline{a} = \alpha\,\underline{e}$ és $\underline{b} = \beta\,\underline{e}$

A baloldal nyilván 0, hiszen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ párhuzamos esetben $0^\circ-$os szöget zár be, ekkor pedig a vektoriális szorzat értéke 0. A jobb oldalról pedig behelyettesítéssel láthatjuk be, hogy 0, ugyanis $(\alpha\,\underline{e}\,\underline{c})\beta\,\underline{e} - (\beta\,\underline{e}\,\underline{c})\alpha\,\underline{e} = \alpha\,\beta\{(\underline{e}\,\underline{c})\underline{e} - (\underline{e}\,\underline{c})\underline{e}\} = 0$

Vagyis $\underline{a} \parallel \underline{b}$ esetén beláttuk az állítást.

2) $\underline{a}$ és $\underline{b}$ ne legyen egyirányú.

a. Ekkor, ha $\underline{c}$-re igaz az állítás, akkor $\lambda \cdot \underline{c}$ is igaz. Ugyanis az $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a}\,\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c})\underline{a}$ egyenletet megszorozva λ-val $(\underline{a} \times \underline{b})\lambda\,\underline{c} = (\underline{a}\,\lambda\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\,\lambda\underline{c})\underline{a}$ egyenletet kapjuk.

b. ha $\underline{c}_1$-re és $\underline{c}_2$-re igaz az állítás, akkor $\underline{c}_1 + \underline{c}_2$-re is igaz. Ugyanis felírva az egyenlőséget $\underline{c}_1$ és $\underline{c}_2$-re, ezeket összeadva a $\underline{c}_1 + \underline{c}_2$-re vonatkozó egyenlőséget kapunk.

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}_1 = (\underline{a}\,\underline{c}_1)\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c}_1)\underline{a}$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}_2 = (\underline{a}\,\underline{c}_2)\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c}_2)\underline{a}$$

összeadás után

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c}_1 + \underline{c}_2) = (\underline{a}\;\;\underline{c}_1 + \underline{c}_2)\underline{b} - (\underline{b}\,\underline{c}_1 + \underline{c}_2)\underline{a}$$

Mivel $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ három nem egyirányú vektor, ezért bármely $\underline{c}$ vektor előállítható az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{c} = \alpha\,\underline{a} + \beta\,\underline{b} + \gamma\,\underline{a} \times \underline{b}$. Így az előbbiek alapján elég a tételt belátni $\underline{c} = \underline{a}$-ra, $\underline{c} = \underline{b}$-re és $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$-re.

Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektora az állítás nyilvánvaló, ugyanis baloldal 0, hiszen minden vektor önmagával képzett vektoriális szorzata 0, jobb oldal pedig helyettesítéssel adódik. $o = (\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{a}\ \underline{a} \times \underline{b})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{a} \times \underline{b})\underline{a}$

Mivel az $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges mind $\underline{a}$-ra, mind $\underline{b}$-re, így az $(\underline{a}\ \underline{a} \times \underline{b})$ és $(\underline{b}\ \underline{a} \times \underline{b})$ tényezők 0-t adnak. Már csak $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re kell igazolnunk az állítást, azaz a

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = (\underline{a}\ \ \underline{a})\underline{b} - (\underline{a}\ \underline{b})\underline{a} \text{ és a}$$

$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b} = (\underline{a}\ \ \underline{a})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{b})\underline{a}$ egyenlőségeket kell belátni. A második egyenletet nem kell belátni, mert az az elsőből következik. Ugyanis az első egyenletben $\underline{a}$-t felcserélve $\underline{b}$-re $(\underline{b} \times \underline{a}) \times \underline{b} = (\underline{b}\ \ \underline{b})\underline{a} = (\underline{a}\ \underline{b})\underline{b}$-t kapjuk.

Felhasználva a $\underline{b} \times \underline{a} = -(\underline{a} \times \underline{b})$-t és szorozva az egyenletet -1-el, kapjuk: $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{b} = (\underline{a}\ \ \underline{a})\underline{b} - (\underline{b}\ \underline{b})\underline{a}$-t, ami éppen a $\underline{b}$-re vonatkozó egyenlőség. Ezért elegendő belátni csak $\underline{a}$-ra az egyenlőséget, azaz $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a} = (\underline{a}\ \underline{a})\underline{b} - (\underline{a}\ \underline{b})\underline{a}$. Legyen $\underline{e}$ $\underline{a}$ irányba mutató egységvektor. Ekkor $\underline{a} = \alpha\, \underline{e}$ alakba írható, ahol $\alpha = |\underline{a}|$. Beírva $\underline{a}$ kifejezését az egyenlőségbe

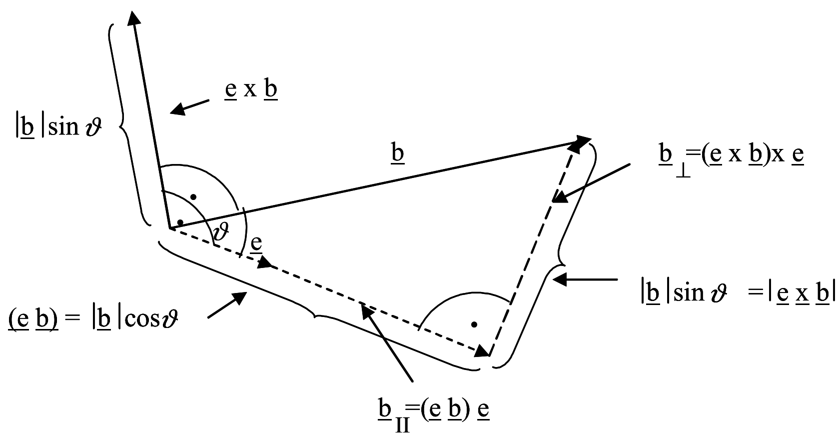
$$(\alpha\ \ \underline{e} \times \underline{b}) \times \alpha\, \underline{e} = \alpha^2 (\underline{e}\ \underline{e})\underline{b} - \alpha(\underline{e}\ \underline{b})\alpha\, \underline{e}$$

$$\alpha^2 (\underline{e} \times \underline{b}) \times\ \ \underline{e} = \alpha^2 \underline{b} - \alpha^2 (\underline{e}\ \underline{b})\, \underline{e}$$

Elosztva α^2 -el a következő egyenlőséget kapjuk:

$$(\underline{e} \times \underline{b}) \times\ \ \underline{e} = \underline{b} - (\underline{e}\ \underline{b})\, \underline{e}, \text{ vagy átrendezve } \underline{b} = (\underline{e} \times \underline{b}) \times\ \ \underline{e} + (\underline{e}\ \underline{b})\, \underline{e}$$

Az ábráról az egyenlőség jelentése könnyen leolvasható:



Ez pedig azt fejezi ki, hogy bármely $\underline{b}$ vektort fel lehet bontani tetszőleges $\underline{e}$ irányú $\underline{b}_{II}$ vektorra és az $\underline{e}$-re merőleges, az $\underline{e}$, $\underline{b}$ által meghatározott síkban lévő $\underline{b}_{\perp}$ vektorra. Vagyis $\underline{b} = \underline{b}_{\perp} + \underline{b}_{II}$ ami az ábrából is nyilvánvaló. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Vektor-skalár függvények

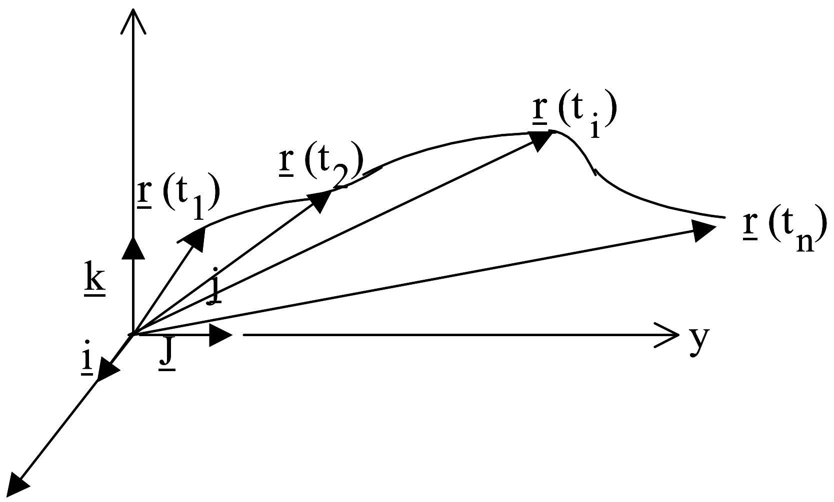
A fizikában gyakran előfordul, hogy egy vektor nagysága és iránya (tehát a vektor) egy skalár mennyiségtől függ. Egyik legnyilvánvalóbb példa egy test helyzetvektora, amely ha a test mozog, akkor az időnek függvénye.

$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$

Ez azt jelenti teljes általánosságban, hogy mindhárom koordináta a t skalár (az említett esetben az idő) függvénye.

Az olyan függvényt, amely egy skalár értékéhez vektort rendel, vektor skalár függvénynek nevezzük.

Ábrázolás: Ha veszünk egy $t_1, t_2 ... t_n$, növekedő paraméter sorozatot, akkor minden egyes t_i-hez a függvény hozzárendeli az $\underline{r}(t_i)$ vektort, amelynek komponensei $x(t_i)$, $\underline{y}(t_i)$ és $z(t_i)$. Ha az $\underline{r}(t_1)$, $\underline{r}(t_2) \ldots \underline{r}(t_n)$ vektorok végpontjait összekötjük, egy térbeli görbét kapunk. (14. ábra).



14. ábra

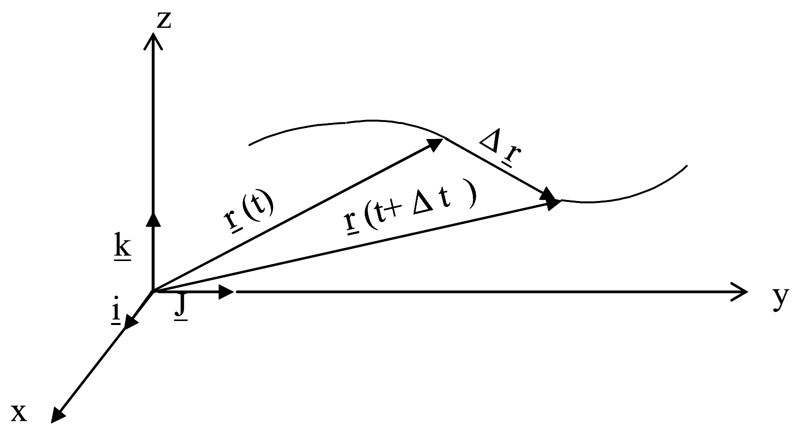
Ha az $\underline{r}(t)$ történetesen egy pont helyzete az idő függvényében, akkor az $\underline{r}(t)$ térbeli görbét a pont pályájának nevezzük.

Vektor-skalár függvény deriváltja:

Sokszor fontos kérdés az, hogy a vektor skalár függvény változójának bizonyos megváltozására mennyivel változik meg a vektor. Ennek jellemzésére legalkalmasabb a differencia hányados, amelyet a következő módon definiálunk.

Legyen t és $t+\Delta t$ a független változó két értéke és $\underline{r}(t)$, $\underline{r}(t+\Delta t)$ a hozzájuk rendelt vektorok.

Értelemszerűen a differenciahányadoson a $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$ kifejezést értjük (lásd 15. ábra).



15. ábra

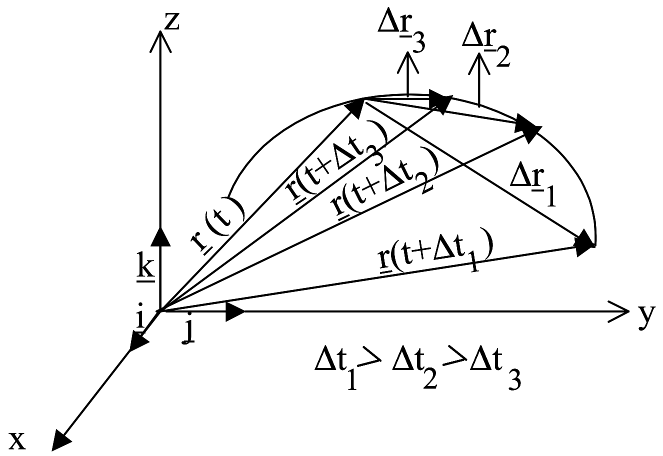
A $\Delta \underline{r}$-t az $\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$ adja és mivel a valós számmal való szorzás értelmezett, így van értelme $\frac{1}{\Delta t}$-vel szorozni $\Delta \underline{r}$ vektort. A $\Delta \underline{r}$ vektor az $\underline{r}(t)$ görbe $\underline{r}(t)$ és $\underline{r}(t+\Delta t)$ pontjai által meghatározott húrvektort jelenti.

Ha a független változó a „t" változását egyre kisebbre választjuk, akkor a húr hossza is egyre kisebb lesz, így van értelme azt vizsgálni, hogy ha Δt-vel minden határon túl tartunk a nullához a $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$ differenciahányados (ami egy vektor) milyen értékű lesz (nagyság és irány szerint). Ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy képezzük a $\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$ határértéket.

Jelölésben: $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \dot{\underline{r}}(t)$$

Ha ez a határérték létezik, akkor az így kapott vektort az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény t skalárértékhez tartozó derivált vektorának vagy differenciálhányados vektorának nevezzük. (Rövidítve deriváltja, differenciálhányadosa). Jelölésére a $\frac{d\underline{r}(t)}{dt}$ és $\dot{\underline{r}}(t)$-t szokás használni.

Az előállításból nyilvánvaló, hogy $\dot{\underline{r}}(t)$ iránya a $\underline{r}(t)$ görbe ezen pontjához tartozó érintőjének irányába mutat, hiszen ha a Δt-t egyre csökkentjük, akkor a húr fokozatosan átmegy a görbe $\underline{r}(t)$ pontbeli érintőjébe (16. ábra).



16. ábra

A $\Delta\underline{r}_1, \Delta\underline{r}_2$ és $\Delta\underline{r}_3$ vektorok hossza egyre csökken és irányuk egyre jobban közelíti a $\underline{r}(t)$ pontbeli érintő irányát. Ha az $\underline{r}(t)$ éppen egy anyagi pont helyzetvektora, akkor $\dot{\underline{r}}(t)$ jelentése éppen a sebességvektor, mivel az $\dot{\underline{r}}(t)$-t a $\frac{\Delta\underline{r}}{\Delta t}$ határértékeként értelmeztük, amelynek irányát $\Delta\underline{r}$ iránya, nagyságát pedig $\frac{|\Delta\underline{r}|}{\Delta t}$ adja meg, ami az időegység alatt megtett út. Így határesetben $(\Delta t \to 0)$ éppen a $\underline{r}(t)$ pályán mozgó anyagi pont sebességét adja meg az $\dot{\underline{r}}(t)$ vektor. Szokás pillanatnyi sebességnek is nevezni.

Derivált vektor koordinátás alakjai:

Mivel a deriválás művelete lineáris, azaz két vektor-skalár függvény összegének deriváltja az egyes deriváltak összege, így ha az $\underline{r}(t)$ koordinátás alakjából indulunk ki, akkor:

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\times(t) + \underline{j}\, y(t) + \underline{k}\, z(t).$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i}\,\dot{x}(t) + \underline{j}\,\dot{y}(t) + \underline{k}\,\dot{z}(t)$$

vagyis az $\dot{\underline{r}}(t)$ vektort úgy kapjuk, hogy az $\underline{r}(t)$ vektor egyes komponenseit deriváljuk.

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

ahol $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ és $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$

Skalár-vektor függvények:

Az olyan függvényeket, amelyek vektorhoz skalárt rendelnek skalár-vektor függvényeknek nevezzük. Jelölése például $\phi(\underline{a})$ vagy $\Psi(\underline{a})\ldots$

Legegyszerűbb példák erre, amikor egy vektorhoz hozzárendeljük az abszolút értéket, vagy annak négyzetét.

$$\phi(\underline{a}) = |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \text{vagy} \quad \phi(\underline{a}) = |\underline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

A legtöbb skalár-vektor függvény esetében a vektor változó a helyvektor.

A későbbiekben az általánosság sérelme nélkül jelöljük a vektorváltozót $\underline{r}$-el. Jelölésben ez egyrészt $\phi(\underline{r})$ módon írható, de figyelembe véve hogy $\underline{r}$-nek három komponense van, $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ azt is írhatjuk, hogy

$$\phi(x, y, z)$$

Vagyis a skalár-vektor függvény úgy is tekinthető, mint egy háromváltozós függvény .

Például: $$\phi = \alpha \frac{1}{|\underline{r}|^2} = \alpha \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

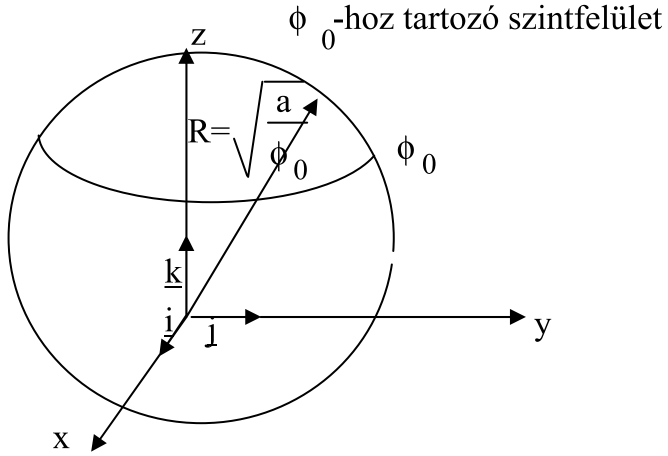
A kifejezésben α egy állandó. Ha a fenti példában a ϕ értéke éppen ϕ_0, akkor $\phi_0 = \alpha \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ kifejezés azon pontok mértani helyét jelenti, azon x, y, z értékhármasokat, amelyekre a függvény értéke éppen ϕ_0. Átalakítással

$$\frac{\phi_0}{\alpha} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

véve az egyenlet reciprokát:

$$\frac{\alpha}{\phi_0} = x^2 + y^2 + z^2$$

Ez egy gömb egyenlete, amelynek sugara $R = \sqrt{\frac{\alpha}{\phi_0}}$. Vagyis ϕ_0 értékhez tartozik egy gömbfelület, amelynek minden pontjában a függvény ϕ_0 értéket vesz fel.



17. ábra

Általában az így adódó felületeket (ami nem feltétlenül gömb) az adott skalár-vektor függvény szintfelületeinek nevezzük.

Sokszor fontos azt tudni, hogy egy adott skalár-vektor függvény az $\underline{r}$ pontban felvett értékéhez képest egy $\Delta\underline{r}$ vektorral arrébb lévő pontban mennyivel változik meg. Ezt a ϕ függvény differenciája határozza meg:

$$\Delta\phi = \phi(\underline{r} + \Delta\underline{r}) - \phi(\underline{r}) = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)$$

Végezzük el a következő azonos átalakításokat.

$$\Delta\phi = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y + \Delta y + z + \Delta z) +$$
$$+ \phi(x, y + \Delta y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z + \Delta z) +$$
$$+ \phi(x, y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z).$$

Látható, hogy az összeg 2. és 3. tagja illetve a 4. és 5. tagja kiejtik egymást. Osszuk el jobb oldal első különbségét Δx -el és szorozzuk is meg, hasonlóan Δy -al második különbséget és Δz -vel a harmadikat. Így a $\Delta\phi$ -re a

$$\Delta\phi = \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y + \Delta y\ z + \Delta z)}{\Delta x}\Delta x +$$
$$+ \frac{\phi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y}\Delta y +$$
$$+ \frac{\phi(x, y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta z}\Delta z$$

kifejezést kapjuk.

Látható, hogy a kifejezés első tagja a ϕ háromváltozós függvénynek a differenciahányadosa méghozzá úgy, hogy az y és a z változó állandó. Ugyanígy a második tag az y változó szerinti differencia hányadosa miközben az x és z változó változatlan és végül a z szerinti differenciahányadosa miközben x és y változó állandó.

Ha a Δx, Δy és Δz kicsik, akkor a fenti differenciahányadosok jól közelíthetőek a megfelelő változók szerinti differenciálhányadosokkal, hiszen a differenciálhányadosok a differenciahányadosok határértékeként értelmezettek. Mivel a ϕ függvénynek mindhárom változója szerinti differenciahányados szerepel a kifejezésben, ezért az egyes változók szerinti differenciálhányadosokat az egyváltozós függvényektől eltérően jelöljük:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Ezeket parciális differenciálhányadosoknak nevezzük. A parciális differenciálási szabályok az egyváltozós függvényekével azonosak. Az adott változó szerinti differenciálásnál a másik két változót egyszerűen állandónak tekintjük.

Így a ϕ függvény megváltozása:

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \Delta h(\underline{r})$$

Ahol $\Delta h(\underline{r})$ olyan, hogy $\lim\limits_{|\Delta \underline{r}|\to 0}\frac{\Delta h(\underline{r})}{|\Delta \underline{r}|} = 0$. A $\Delta h(\underline{r})$ hibafüggvény megjelenése azzal függ össze, hogy a differenciahányadosokat a megfelelő differenciálhányadosokkal helyettesítettük. A jobb oldal első tagja úgy tekinthető, mint két vektor a

$$\text{grad}\,\phi \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{ és a} \qquad \Delta\underline{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

vektorok skaláris szorzata. Azaz $\Delta\phi = \text{grad}\,\phi \cdot \Delta\underline{r} + \Delta h(\underline{r})$. A $\Delta h = 0$ csak végtelen kicsiny mennyiségek esetén áll fent, ekkor $d\phi = \text{grad}\,\phi \cdot d\underline{r}$ alakban szokás írni, ahol $d\phi$ és $d\underline{r}$ a ϕ, illetve $\underline{r}$ differenciáljai. ($\Delta\phi$ és $\Delta\underline{r}$ határértékei végtelen kicsiny mennyiségeket jelölnek).

A $\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$ vektort a $\phi(x, y, z)$ skalár-vektor függvény $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pontbeli

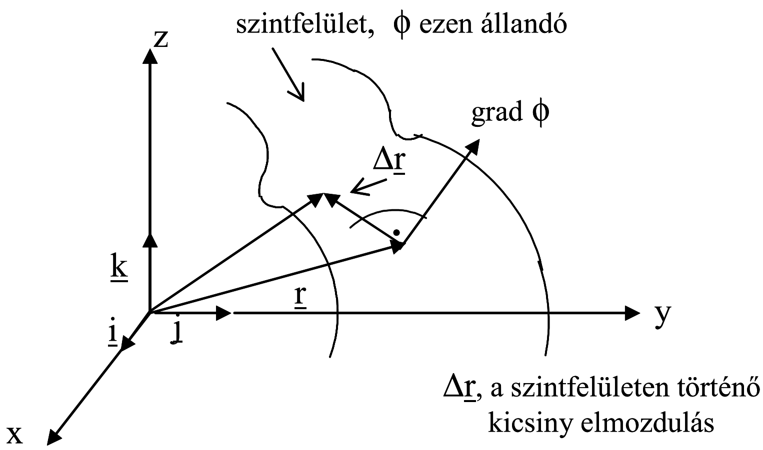
gradiensének, gradiens vektorának nevezzük. Jelölésére használjuk a $\text{grad}\,\phi$ vagy $\underline{\nabla}\,\phi$, ahol $\underline{\nabla}$-t nabla operátornak nevezzük:

$\underline{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$. A nabla operátor egy vektor operátor, amely skalár-vektor függvényre úgy hat, hogy azt x, y és z szerint differenciálja és az így előálló parciális differenciálhányadosokból egy vektort képez.

$$\underline{\nabla}\phi \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \text{grad } \phi$$

Kézírásban a nabla operátornál sokszor a vektor jelölést -az aláhúzást- el szokás hagyni. Egyszerűbb írásmóddal $\nabla\phi$.

A gradiens jellemzője, hogy mindig merőleges ϕ szintfelületére. Ez abból következik, hogy a szintfelület mentén a ϕ értéke egy ϕ_0 állandó, így a ϕ megváltozása ha a $\Delta\underline{r}$ vektor szintfelületen van 0 kell, hogy legyen, azaz $0 \equiv \Delta\phi = \text{grad } \phi \cdot \Delta\underline{r}$, ami éppen a merőlegességet jelenti (Lásd 18. ábra).



18. ábra

A végtelen kicsiny mennyiségek közötti kapcsolatot leíró összefüggésből az is következik, hogy a gradiens vektor iránya az az irány, amely irányban elmozdulva a skalár függvény változása a leggyorsabb, a legnagyobb, ugyanis

$$d\phi = \text{grad } \phi \cdot d\underline{r} = |\text{grad } \phi| \, |d\underline{r}| \cos \gamma$$

$d\phi$ akkor a legnagyobb, ha $\cos\gamma = 1$, azaz $d\underline{r}$ és $\text{grad}\,\phi$ iránya azonos, azaz $\gamma = 0$.