1. Feladatok a termodinamika tárgyköréből

Hővezetés, hőterjedés sugárzással

1.1. Feladat: (HN 19A-25) Egy épület téglafalának mérete: 4 m × 10 m és, a fal 15 cm vastag. A hővezetési együtthatója $\lambda = 0,8$ W/m K. Mennyi hő áramlik át a falon 12 óra alatt, ha az átlagos belső hőmérséklet 20 ^{0}C, a külső pedig 5 ^{0}C?

Megoldás: Jelölések: a fal felülete A = 4 m × 10 m = 40 m^2; a falvastagság d = 15 cm; az eltelt idő t = 12 óra = 43200 s; T_1 = 20 ^{0}C és T_2 = 5 ^{0}C.
A hőáram (a belső energia árama, itt most a fal teljes felületére vett teljesítmény) a Fourier-törvény szerint

$$I = P = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A. \tag{1.1.1}$$

A 12 óra alatt átáramlott hő

$$Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A t = 1,38 \cdot 10^8 \text{J}. \tag{1.1.2}$$

1.2. Feladat: (HN 19B-33) Egy 3 cm élhosszúságú alumínium kockát lámpakorommal vontak be és így ideális hősugárzó lett. A kockát vákuumkamrába tették, amelynek falait 27 ^{0}C-on tartották. Milyen teljesítményű legyen az a fűtőtest, amely annyi energiát ad a kockának, hogy hőmérséklete állandóan 90 ^{0}C maradjon?

Megoldás: Jelölések, adatok: $a = 3$ cm; $T_0 = 27\ ^0\text{C} = 300$ K; $T_1 = 90\ ^0\text{C} = 363$ K és $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4).
A stacionárius (időben állandó) állapot beálltakor a fűtőtest teljesítménye

$$P = \sigma (T_1^4 - T_0^4) A \tag{1.2.1}$$

ahol a kocka felszíne $A = 6a^2$. Az adatok behelyettesítése után

$$P = 2,836 \text{W}. \tag{1.2.2}$$

Ideális gázok állapotegyenlete

1.3. Feladat: (HN 20B-26) Egy tó fenekén, ahol a hőmérséklet 4 ^{0}C, egy 0,2 cm átmérőjű légbuborék képződött. Ez 25 m-t emelkedik a felszínig, ahol a víz hőmérséklete 24 ^{0}C. Határozzuk meg a gömb alakú buborék méretét, amint éppen eléri a víz felszínét, feltételezve, hogy a buborék belsejében lévő levegő mindig felveszi a környező víz hőmérsékletét! A légköri nyomás 10^5 Pa.

Megoldás: Jelölések: $T_1 = 4\ ^0\mathrm{C} = 277$ K; $d_1 = 0,2$ cm; $h = 25$ m; $T_2 = 24\ ^0\mathrm{C} = 297$ K; a külső légnyomás $p_k = 10^5$ Pa; a víz sűrűsége $\varrho = 1000$ kg/m^3.
Az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{(p_k + \varrho g h)\frac{4}{3}(\frac{d_1}{2})^3\pi}{T_1} = \frac{p_k\frac{4}{3}(\frac{d_2}{2})^3\pi}{T_2}, \tag{1.3.1}$$

ahonnan — behelyettesítés után — a buborék átmérője

$$d_2 = 0,31\mathrm{cm}. \tag{1.3.2}$$

1.4. Feladat: (HN 20B-36) Milyen hőmérsékleten egyenlő az oxigén atomok négyzetes középsebessége a Föld felszínéről való szökési sebességgel?

Megoldás: Adatok: A Föld sugara $R_F = 6370$ km, tömege $M_F = 6 \cdot 10^{24}$ kg; gravitációs állandó $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; egyetmes gázállandó $R = 8,31$ J/(mol K); az oxigén móltömege $M = 16$ g/mol.
A v_{sz} szökési sebesség

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\gamma M_F}{R_F}}, \tag{1.4.1}$$

a v_{nks} négyzetes középsebesség

$$v_{nks} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{1.4.2}$$

A kettő egyenlőségéből a fenti adatokkal a kérdéses hőmérséklet

$$T = 80642\mathrm{K}. \tag{1.4.3}$$

Körfolyamatok ideális gázzal

1.5. Feladat: (HN 21C-22) Kezdeti p_1, V_1, T_1 állapotjelzőkkel jellemzett egyatomos ideális gázzal a következő, három lépésből álló körfolyamatot végezzük: izotermikus expanzió V_2 térfogatig, izobár kompresszió az eredeti térfogatig és izochor melegítés a kezdeti nyomás és hőmérséklet visszaállítására.

(a) Ábrázoljuk a körfolyamatot a $p-V$ síkon!

(b) Határozzuk meg a gáz mólszámát a megadott paraméterekkel, a gázállandóval és c_v-vel kifejezve.

(c) Határozzuk meg a T_2 hőmérsékletet az izobár kompresszió végén a b) feladat eredményét felhasználva!

(d) Írjuk fel mindhárom folyamatra a hőmérséklet változását a megfelelő változók függvényében.

Megoldás:

(a) (ábra)

(b) Az ideális gáz

$$pV = nRT \tag{1.5.1}$$

állapotegyenletéből és a mólhőre érvényes

$$c_v = \frac{3}{2}R \tag{1.5.2}$$

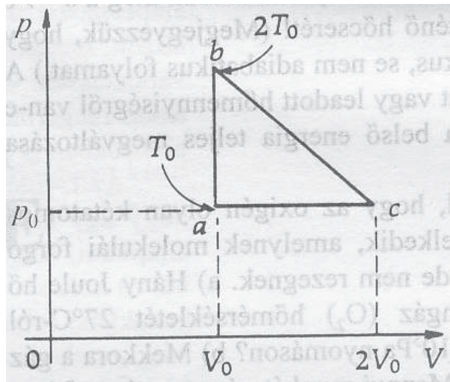
összefüggéssel az n mólszám

$$n = \frac{3p_1V_1}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_2}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_1}{2c_vT_2}. \tag{1.5.3}$$

(c) A fenti egyenletből a T_2 hőmérséklet

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2}T_1. \tag{1.5.4}$$

(d) Az első folyamatban $\Delta T = 0$; a másodikban $\Delta T = T_2 - T_1 = (\frac{V_1}{V_2} - 1)T_1$; míg a harmadikban $\Delta T = T_1 - T_2 = (1 - \frac{V_1}{V_2})T_1$.



1. ábra.

1.6. Feladat: (HN 21C-26) Két mól egyatomos gázzal a 1. ábrán látható abca körfolyamatot végezzük. A $p-V$ síkon mindhárom folyamat ábrája egyenes. Az a pontban a paraméterek: p_0, V_0, T_0. Az alábbi feladatokat oldjuk meg RT_0 függvényében.
(a) Határozzuk meg egy teljes ciklus alatt végzett munkát.
(b) Határozzuk meg a $b \to c$ folyamat során történő hőcserét! A rendszer által felvett vagy leadott hőmennyiségről van-e szó?
(c) Mekkora a belső energia teljes megváltozása egy ciklus során?

Megoldás: Az egyesített gáztörvény alkalmazásával az egyes pontokban az állapothatározók:
a: (p_0, V_0, T_0)
b: $(2p_0, V_0, 2T_0)$
c: $(p_0, 2V_0, 2T_0)$
(a) A körfolyamatban végzett munka

$$W = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{2}nRT_0. \tag{1.6.1}$$

(b) A $b \to c$ folyamat kezdő és végállapotában a hőmérséklet egyaránt T_2, de ettől a folyamat maga nem izotermikus. Ugyanakkor a belső energia megváltozása zérus. A gáz által végzett munka

$$W_{b\to c} = \frac{1}{2}(2p_0 + p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}nRT_0, \tag{1.6.2}$$

s ennek megfelelően a felvett hő

$$Q_{b\to c} = \frac{3}{2}nRT_0. \tag{1.6.3}$$

Megjegyzés: E folyamat további diszkusszióra érdemes!
(c) A körfolyamat egy teljes ciklusában a belső energia megváltozása zérus.

1.7. Feladat: (HN 22A-5) Egy hőerőgép, amelynek a Carnot-hatásfoka 30%, a 400 K hőmérsékletű hőtartályból vesz fel hőt. Határozzuk meg a hidegebb hőtartály hőmérsékletét!

Megoldás: A Carnot-körfolyamat hatásfoka

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{1.7.1}$$

ahol T_1 a felső, T_2 az alsó hőtartály hőmérséklete. Innen

$$T_2 = (1-\eta)T_1 = 280\text{K}. \tag{1.7.2}$$

1.8. Feladat: Tekintsünk $n = 2$ mólnyi egyatomos ideális gázt: $p_1 = 10^5$ Pa, $T_1 = 273$ K. A gázzal $Q = 6806$ J hőt közlünk, állandó térfogat mellett, majd izoterm módon tágulni engedjük úgy, hogy a végső térfogat háromszorosa legyen a kiindulási térfogatnak.

(a) Ábrázolja a folyamatot állapotdiagramon!

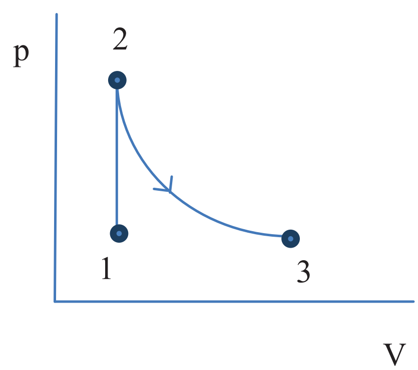
(b) Mennyi lesz a hőközlés utáni hőmérséklet?

(c) Mekkora lesz a nyomás a folyamat végén?

(d) Mekkora az entrópia-változás a két folyamatban?

Megoldás:

(a) Az állapotdiagram a 2. ábrán látható.



2. ábra.

(b) A közölt hő és a hőmérséklet változás közötti összefüggés

$$Q = c_v n \Delta T, \tag{1.8.1}$$

ahol $c_v = \frac{3}{2}nR$. Innen a hőközlés utáni hőmérséklet

$$\Delta T = \frac{Q}{c_v n} = \frac{Q}{\frac{3}{2}nR} = 273\,\text{K}. \tag{1.8.2}$$

Így az állandó nyomású hőközlés utáni hőmérséklet

$$T_2 = 546\,\mathrm{K}. \tag{1.8.3}$$

(c) Az állandó térfogaton végzett hőközlés során kialakuló p_2 nyomás a

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \tag{1.8.4}$$

összefüggésből

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}. \tag{1.8.5}$$

A térfogatváltozás miatti nyomás – figyelembe véve, hogy $V_1 = V_2$ és $V_3 = 3V_1$ – a Boyle-Mariotte törvény szerint a

$$p_2 V_2 = p_3 V_3 \tag{1.8.6}$$

összefüggésből

$$p_3 = \frac{V_2}{V_3} p_2 = 0{,}667 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}. \tag{1.8.7}$$

(d) Az <u>izochor</u> ($1 \longrightarrow 2$) folyamatbeli S_1 entrópiaváltozás a

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v n \mathrm{d}T}{T} = \frac{3}{2} nR \ln\frac{T_2}{T_1} = 17{,}28\,\mathrm{J/K}. \tag{1.8.8}$$

Az <u>izoterm</u> ($2 \longrightarrow 3$) folyamatban a gáz belsőenergia változása, a felvett hő a tágulási munkára fordítódik. Így a felvett hő

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V}\mathrm{d}V = nRT_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = 9969{,}4\,\mathrm{J}. \tag{1.8.9}$$

Az <u>izoterm</u> S_2 entrópiaváltozás

$$S_2 = \frac{Q}{T_2} = 18{,}26\,\mathrm{J/K}. \tag{1.8.10}$$

Az <u>össz</u> entrópiaváltozás: 35,54 J/K.