1. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

1.1. Feladat: (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le az α szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke $\mathrm{tg}\alpha/3$ kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A hengerre az mg súlyerő, az $N = mg\cos\alpha$ támaszerő és az F_s tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg\sin\alpha - F_s, \tag{1.1.1}$$

és a forgómozgásra

$$\theta\beta = F_sR. \tag{1.1.2}$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \tag{1.1.3}$$

összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az F_s erő alakja

$$F_s = \frac{mg\sin\alpha}{1+\frac{mR^2}{\theta}}. \tag{1.1.4}$$

Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha

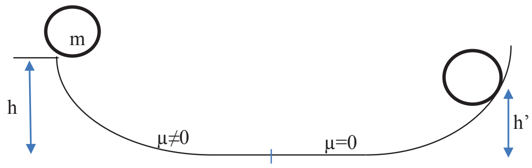
$$F_s = \mu mg\cos\alpha, \tag{1.1.5}$$

így ezt behelyettesítve a minimális μ tapadási együttható értékére — felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését —

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{(1+\frac{mR^2}{\theta})mg\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{1+\frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{3}. \tag{1.1.6}$$

adódik. Q.E.D.

1.2. Feladat: A 1. ábrán látható módon az m tömegű $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn h magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója $\mu \neq 0$, ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.
(a) Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?



1. ábra.

(b) Milyen h' magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?

(c) Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.2.1}$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{1.2.2}$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}. \tag{1.2.3}$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad h' és ott egy helyben forog ω szögsebességgel. Azaz transzlációs kinetikus energiája alakul csak át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1.2.4}$$

Innen az emelkedés magassága

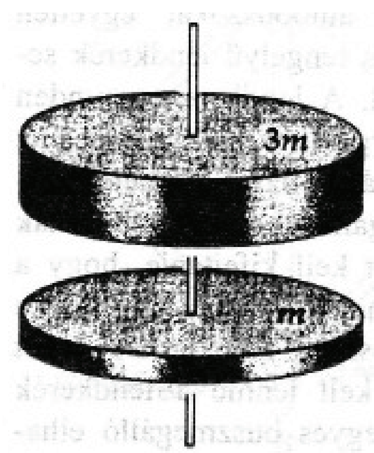
$$h' = \frac{2}{3}h. \tag{1.2.5}$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}}. \tag{1.2.6}$$

Impulzusmomentum megmaradása

1.3. Feladat: (HN 12B-28) A 2. ábrán látható két tömör tárcsa sugara R, egyik tömeg m, a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák — a közöttük fellépő súrlódás hatására — végül közös ω szögsebességgel együtt forognak.
(a) A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső ω szögsebességet, és
(b) a tárcsák egymáson való súrlódása közben végzett munkát!
(c) Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?



2. ábra.

Megoldás:
(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a $3m$ tömegű test forog ω_0 szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \tag{1.3.1}$$

ahol θ_{3m} a $3m$ tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{1.3.2}$$

ahol θ_m az m tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel $N_1 = N_2$, így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = (\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2)\omega, \tag{1.3.3}$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \tag{1.3.4}$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \tag{1.3.5}$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{1.3.6}$$

A két energia különbsége, amennyi a belső energiát növeli:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \tag{1.3.7}$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a $3m$ tömegű v_0 sebességű test ütközése a nyugvó m tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

$$v = \frac{3}{4}v_0. \tag{1.3.8}$$

Forgási energia

1.4. Feladat: Az L hosszúságú m tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággyal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik. Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.

Megoldás: A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd — a rúd tömegközéppontjának — potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = mg\frac{L}{2}, \tag{1.4.1}$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \tag{1.4.2}$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \tag{1.4.3}$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.4.4}$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1}+E_{k1} = E_{p2}+E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \tag{1.4.5}$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{1.4.6}$$

adódik.

2. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből

Harmonikus rezgőmozgás

2.1. Feladat: Két, azonos amplitúdójú rezgés, melyek frekvenciája $\nu_1 = 40$ Hz és $\nu_2 = 60$ Hz, egyszerre kezdi meg rezgését az egyensúlyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

Megoldás: A rezgések kitérését az $y(t) = A\sin 2\pi\nu_1 t$ illetve $y(t) = A\sin 2\pi\nu_2 t$ alakba írjuk fel. Az első találkozási idő a kettő egyenlőségéből számolható

$$A\sin 2\pi\nu_1 t = A\sin 2\pi\nu_2 t. \tag{2.1.1}$$

Az egyenletet átrendezve és a szögek szinusza különbségére vonatkozó összefüggést alkalmazva

$$0 = \sin 2\pi\nu_2 t - A\sin 2\pi\nu_1 t = 2\cos\frac{2\pi\nu_2+2\pi\nu_1}{2}t\,\sin\frac{2\pi\nu_2-2\pi\nu_1}{2}t \tag{2.1.2}$$

írható. Leghamarabb akkor teljesül az egyenlőség, ha

$$\cos\frac{2\pi\nu_2+2\pi\nu_1}{2}t = 0, \tag{2.1.3}$$

azaz

$$\frac{2\pi\nu_2+2\pi\nu_1}{2}t = \frac{\pi}{2}. \tag{2.1.4}$$

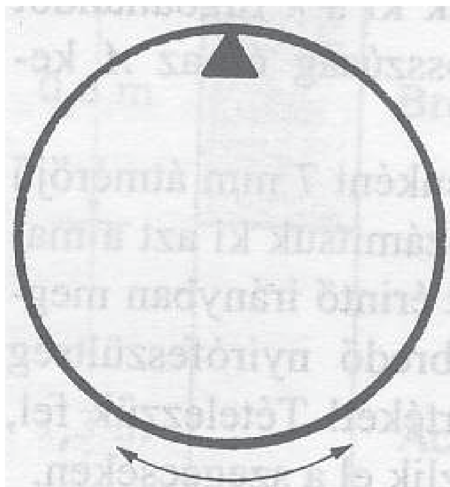
Innen az első találkozás időpontja

$$t = \frac{1}{2(\nu_2+\nu_1)} = 0,005\text{s}. \tag{2.1.5}$$

2.2. Feladat: (HN 15B-26) Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk a 3. ábra szerint úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng.

(a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periódusidejét.

(b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?



3. ábra.

Megoldás: Jelölés: $R = 20$ cm $= 0{,}2$ m; m a karika tömege, $\theta_0 = mR^2$ a szimmetria tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka; φ a kitérés szöge a függőlegeshez viszonyítva.

(a) A kés élén felfüggesztett inga karja – felfüggesztés és tömegközéppont távolsága – az R sugár, a felfüggesztésre vett θ tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint

$$\theta = \theta_0 + mR^2 = 2mR^2. \tag{2.2.1}$$

Kitérítve φ szöggel a karikát

$$M = -mgR\sin\varphi \tag{2.2.2}$$

forgatónyomaték fog hatni. A negatív előjel éppen arra utal, hogy a nyomaték az egyensúlyi helyzet felé mozgat. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M = -mgR\sin\varphi, \tag{2.2.3}$$

ahol β a szöggyorsulás. Mivel $\beta = \ddot{\varphi}$, így

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi, \tag{2.2.4}$$

amely "majdnem" a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ha kis szögkitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a $\sin\varphi \sim \varphi$ közelítést, így a

$$\theta\ddot{\varphi} = -mgR\varphi \tag{2.2.5}$$

egyenlet harmonikus rezgomozgást ír le. Az ω körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}. \tag{2.2.6}$$

A periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \tag{2.2.7}$$

(b) A fonálinga (matematikai inga) lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2.2.8}$$

ahonnan a kérdéses fonál hossz

$$l = 2R. \tag{2.2.9}$$

Rugalmas közegekben terjedő hullámok

2.3. Feladat: Egy húron csillapítatlan transzverzális harmonikus hullám terjed 20 m/s sebességgel pozitív irányba. Amplitúdója 50 cm, frekvenciája 2 Hz. A $t_0 = 0$ pillanatban az $x_0 = 0$ helyen levő részecske kitérése 25 cm, és negatív irányban mozog. Mekkora a kitérése az $x = 5$ m helyen lévő részecskének a $t = 2$ s pillanatban?

Megoldás: Jelölések: $v = 20$ m/s; $A = 50$ cm $= 0{,}5$ m; $\nu = 2$ Hz; $A(x_0 = 0, t_0 = 0) = A(0,0) = 25$ cm $= 0{,}25$ m.
A hullámfüggvény általános alakja

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta), \tag{2.3.1}$$

amelyre a kezdeti feltételeket alkalmazva

$$A(0,0) = A\sin\delta. \tag{2.3.2}$$

Ahhoz, hogy a hullámfüggvény a kezdeti időpillanatot követően az $x_0 = 0$ helyen csökkenjen, úgy $0 < \delta < \pi/2$ kell legyen. Így az adatok behelyettesítése után

$$\delta = \frac{\pi}{6}. \tag{2.3.3}$$

Az ω körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 12,56\,1/\mathrm{s}. \tag{2.3.4}$$

A hullám terjedési sebessége a

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{2.3.5}$$

összefüggéssel számolható, ahonnan a k cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{\omega}{v} = 0,628\,1/\mathrm{m}. \tag{2.3.6}$$

A hullámfüggvény az SI egységekkel kifejezve a

$$y(x,t) = 0,5\sin\left(0,628x - 12,56t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{2.3.7}$$

alakot ölti. Az $x = 5$ m és $t = 2$ s helyettesítést elvégezve az ezen a helyen és ebben az időpontban a kitérés

$$y(5,2) = -0,25\,\mathrm{m}. \tag{2.3.8}$$