1. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

1.1. Feladat: Egy $m = 4$ kg tömegű kalapács $v_0 = 6$ m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és $\Delta t = 0,002$ s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)
(a) Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!
(b) Számítsuk ki a szög útját a fában!
(c) Mekkora munkát végzett a fa a kalapácson?

Megoldás:
(a) A szögre ható átlagos fékező erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -12000\,\mathrm{N}, \tag{1.1.1}$$

ahol a negatív előjel a fékező hatást fejezi ki.
(b) A szög átlagos gyorsulása a sebességváltozásával számolható ki. Amennyiben a szög nem deformálódott az ütés alatt, a kezdeti sebessége meg kell hogy egyezzen a kalapács sebességével. Ezért a sebesség megváltozása $\Delta v = -v_0$. A szög gyorsulása ezért

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3000\,\mathrm{m/s^2}, \tag{1.1.2}$$

amit felhasználhatunk a szög által megtett út meghatározásához.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,006\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{mm}. \tag{1.1.3}$$

(c) A fa által végzett munka a kalapácson:

$$W = Fs = -72\,\mathrm{J}. \tag{1.1.4}$$

1.2. Feladat: Egy $M = 80$ kg tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy $m = 20$ kg tömegű golyót. A golyó az embertől mérve $v_0 = 20$ m/s sebességgel távolodik. Mekkora az ember v_M sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

Megoldás: Jelölje v_m a golyó jéghez viszonyított sebességét. Az impulzus megmaradás miatt

$$Mv_M = mv_m. \tag{1.2.1}$$

A golyó és az ember relatív sebessége pedig

$$v_0 = v_m + v_M \tag{1.2.2}$$

A két egyenletből

$$v_M = \frac{m}{m+M}\, v_0 \tag{1.2.3}$$

Behelyettesítve a számértékeket $v_M = 4$ m/s adódik.

Rugalmatlan ütközések

1.3. Feladat: (HN 8A-4) Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozását!

Megoldás: Az ütközés tökéletes rugalmatlan, így az impulzus megmarad, a kinetikus energia viszont nem. Az impusumegmaradás az

$$mv_0 = 2mv \tag{1.3.1}$$

egyenlettel fejezhető ki, amelyben v az összeragadt testek végső együttes sebessége. Innen

$$v = \frac{v_0}{2}. \tag{1.3.2}$$

A kezdeti K_0 kinetikus energia

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{1.3.3}$$

A végső kinetikus energia pedig:

$$K = \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{4}mv_0^2. \tag{1.3.4}$$

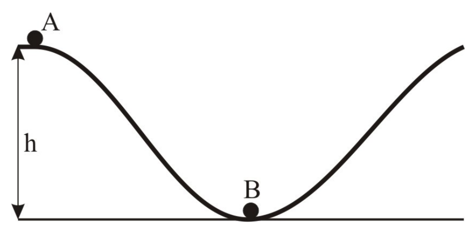
A kinetikus energia $(K-K_0)/K_0$ relatív megváltozása:

$$\frac{K-K_0}{K_0} = -\frac{1}{2}. \tag{1.3.5}$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ütközés mechanikai energiaveszteséggel jár.

Rugalmas ütközések

1.4. Feladat: A 1. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.
(a) Mekkora v sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?
(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ($m_A = m_B/2$, $h = 1.8$ m)?



1. ábra.

Megoldás:
(a) A h m magasból kezdő sebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége felhasználva az energia-megmaradás elvét $v = \sqrt{2gh} = 6$ m/s.
(b) A tökéletesen rugalmas ütközés esetében az

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \tag{1.4.1}$$

impulzus-megmaradás mellett érvényes a mechanikai energia megmaradása is:

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \tag{1.4.2}$$

Az egyenletekben v_A és v_B az A illetve B testek ütközés utáni sebességét jelöli. Figyelembe véve, hogy $m_A = m_B/2$, e két egyenlettel a B test ütközés utáni sebessége:

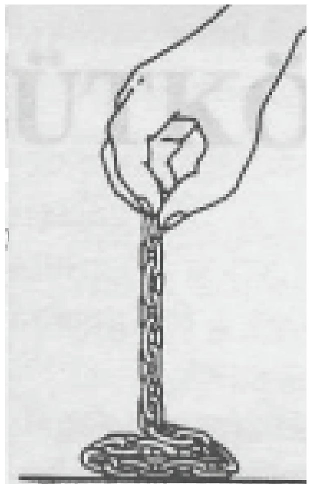
$$v_B = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = 4\,\text{m/s}. \tag{1.4.3}$$

A B test emelkedési magassága pedig

$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 0,8\,\text{m}. \tag{1.4.4}$$

Folytonos közegek impulzusváltozása

1.5. Feladat: (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó, m tömegű hajlékony l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra az 2. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



2. ábra.

Megoldás: A hosszegységenkénti tömeget jelölje $\lambda = \frac{m}{l}$; a t idő alatti süllyedés hossza $x = vt$. Így ennyi idő alatt $m(t) = \lambda x = \frac{m}{l} vt$ tömeg van az asztalon, amely

$$N_1 = \frac{m}{l} vtg \tag{1.5.1}$$

erővel nyomja az asztalt. Ez az ébredő erő egyik része. A másik rész ahhoz kötődik, hogy a v sebességű dx hossz megáll. Ennek a hossznak az impulzusváltozása:

$$\Delta I = \lambda dx\, v = \frac{m}{l} v \Delta t\, v = \frac{mv^2}{l} \Delta t. \tag{1.5.2}$$

A megállításból eredő másik rész

$$N_2 = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \tag{1.5.3}$$

Az összes erő tehát

$$N = \frac{m}{l} vtg + \frac{mv^2}{l}. \tag{1.5.4}$$

2. Feladatok a gravitásiós erő tárgyköréből. Kepler törvényei

Centrális erőtér. Potenciális energia

2.1. Feladat: (HN 16B-34) Jelölje M illetve R a Föld tömegét illetve sugarát.
(a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földsugárnyi magasságig emekedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.
(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

Megoldás:
(a) A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva

$$-\gamma\frac{mM}{R}+\frac{1}{2}mv_0^2=-\gamma\frac{mM}{3R} \tag{2.1.1}$$

egyenlet írható fel, amelyből a kérdezett sebesség:

$$v_0=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\gamma M}{R}}=9152\,\mathrm{m/s}. \tag{2.1.2}$$

(b) A forgáshoz tartozó v_f sebesség érintő irányú (a kilövésre merőleges), amivel a kezdő sebesség négyzete: $v_0^2+v_f^2$. Az impulzusmomentum megmaradása miatt $3R$ távolságban a érintő irányú sebesség a harmadára csökken: $v_f/3$. Így a fenti egyenlet

$$-\gamma\frac{mM}{R}+\frac{1}{2}m(v_0^2+v_f^2)=-\gamma\frac{mM}{3R}+\frac{1}{2}m\left(\frac{v_f}{3}\right)^2 \tag{2.1.3}$$

alakú lesz. Belátható, hogy kisebb v_0 sebesség is elég a kívánt magasság eléréséhez.

2.2. Feladat: (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén gugguló helyzetből tömegközéppontját h magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

Megoldás: A h magasságba ugró ember kezdősebessége

$$v=\sqrt{2gh}. \tag{2.2.1}$$

A kisbolygó M tömege a ϱ sűrűséggel és az R sugárral kifejezve

$$M = \varrho \frac{4R^3\pi}{3}. \tag{2.2.2}$$

A kisbolygón v sebességgel felugró emberre a mechanikai energia megmaradás tételét alkalmazzuk azzal az ismerettel, hogy a távolban a sebessége – így a kinetikus energiája – zérus, másrészt a távoli pontban zérus a potenciális energia. Felírhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R} = 0, \tag{2.2.3}$$

amelybe a fenti tömeget behelyettesítve és az egyenltet a sugárra átrendezve kapjuk:

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\gamma\varrho}}. \tag{2.2.4}$$

3. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

3.1. Feladat: (HN 10B-4) Egy $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ ($f_x = 2$ N; $f_y = 3$ N; $f_z = 0$ N) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ($x = 4$ m; $y = 5$ m; $z = 0$ m) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

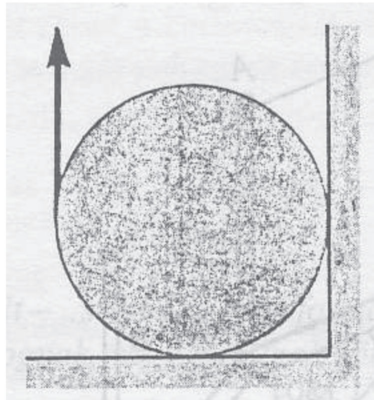
Megoldás: A forgatónyomaték definíciója $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \tag{3.1.1}$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \tag{3.1.2}$$

azaz a vektor nagysága 2 Nm, iránya a z tengely irányításával megegyezik.



3. ábra.

3.2. Feladat: (HN 10C-48) A 3. ábra egy G súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható F erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható $\mu = 0,5$. Fejezzük ki a G függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!

Megoldás: Jelölje N_1 a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt, F_{s1} a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen N_2 a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő F_{s2}. E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \tag{3.2.1}$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \tag{3.2.2}$$

A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen — pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat — a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \tag{3.2.3}$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \tag{3.2.4}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s2}R - FR \tag{3.2.5}$$

A fenti öt egyenletből kell az F erőt kifejezni. A (3.3.1) és (3.3.2) súrlódási erők behelyettesítésével illetve az (3.3.5) egyenletben az R-rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \tag{3.2.6}$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \tag{3.2.7}$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \tag{3.2.8}$$

A (3.3.7) egyenletből N_2-őt kifejezve és a (3.3.6) valamint a (3.3.8) egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1 + \mu^2) N_1 \tag{3.2.9}$$

és

$$0 = \mu(\mu + 1) N_1 - F \tag{3.2.10}$$

adódik. Az N_1 eliminálásával az F erő

$$F = \frac{\mu(\mu + 1)}{2\mu^2 + \mu + 1} G. \tag{3.2.11}$$

A $\mu = 0,5$ behelyettesítési értékkel az F erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \tag{3.2.12}$$