1. Feladatok munkavégzés és konzervatív erőterek tárgyköréből. Munkatétel

Munkavégzés, teljesítmény

1.1. Feladat: (HN 6B-8) Egy rúgót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

Megoldás: Két megnyúlás van. Az első $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$ cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{1.1.1}$$

Innen a k rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800\,\mathrm{N/m}. \tag{1.1.2}$$

A további $l_2 = 10$ cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12\,\mathrm{J}. \tag{1.1.3}$$

1.2. Feladat: (HN 6B-39) Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \tag{1.2.1}$$

ahol a dW elemi munka

$$dW = \mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{1.2.2}$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000\,\mathrm{W}. \tag{1.2.3}$$

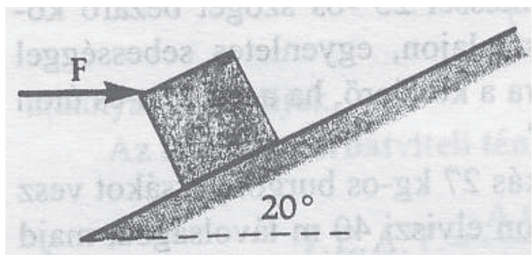
Munkatétel

1.3. Feladat: (HN 6B-23) A 1. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20^0-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



1. ábra.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $F = 27$ N; $\alpha 20^0$ és $\mu = 0,180$.

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az F erőt lejtőirányú, felfele mutató ($F\cos\alpha$) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ($F\sin\alpha$) komponensekre. A felfele mozdulást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N. \tag{1.3.1}$$

A N támaszerő a

$$0 = N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha \tag{1.3.2}$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m} - g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 6,74\,\mathrm{m/s^2}. \tag{1.3.3}$$

(b) Az s út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{1.3.4}$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

$$F' = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{1.3.5}$$

amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\,s. \tag{1.3.6}$$

Innen a v sebesség

$$v = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{1.3.7}$$

1.4. Feladat: A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha
(a) a deszkában állandó a ható F erő,
(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = Dx$ erő fékezi? (A D konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \tag{1.4.1}$$

ahol W a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \tag{1.4.2}$$

és a b, esetben az egyenes alatti területtel:

$$W = -\frac{1}{2}Dx^2. \tag{1.4.3}$$

Ezekkel a sebességek: a,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - Fd\right)}, \tag{1.4.4}$$

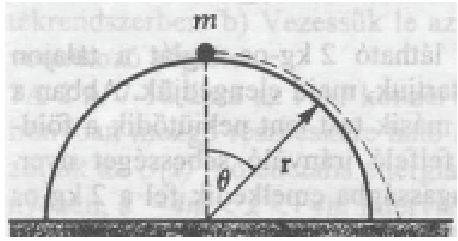
és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}Dd^2\right)}. \tag{1.4.5}$$

Munkavégzés konzervatív erőtérben. Potenciális energia

1.5. Feladat: (HN 7B-18) Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora a függőlegessel bezárt szög , amikor a test elhagyja a gömb felszínét?

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia



2. ábra.

mozgás kezdetén $E_{p_1} = mgr$, a kinetikus energia $E_{k_1} = 0$ mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában: $E_{p_2} = mgr\cos\theta$, a mozgási energia $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$. A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{1.5.1}$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta. \tag{1.5.2}$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta - N, \tag{1.5.3}$$

ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az N a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \tag{1.5.4}$$

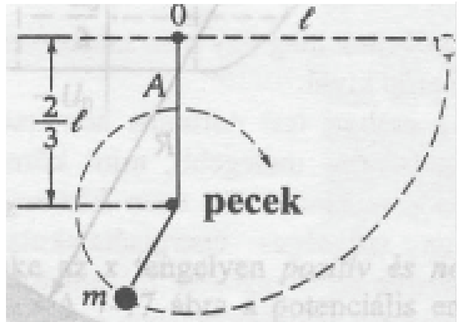
Az egyenletek megoldása:

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \theta = 48^0. \tag{1.5.5}$$

1.6. Feladat: (HN 7B-21) Egy m tömegű testet l hosszúságú kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az O felfüggesztési ponttól $2/3l$ távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötél lengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $1/3l$ sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban, ami a pöcök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen az A pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg\frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1.6.1}$$



3. ábra.

Másrészt a pecek körüli körmozgásra az A pontban az

$$m\frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \tag{1.6.2}$$

összefüggés írható, ahol K a kötélerő. A két egyenletből

$$K = mg. \tag{1.6.3}$$

2. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

Centrifugális erő

2.1. Feladat: Egy $M = 1,499 \cdot 10^{25}$ kg tömegű, $R = 10000$ km sugarú bolygó északi sarkán $k = 100$ N/m direkciós erejű rugóra $m = 1$ kg tömegű testet lógatunk. A bolygó $\omega = 10^{-4}$ 1/s szögsebességgel forog.
(a) Mekkora a rugó megnyúlása?
(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

Megoldás:
(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma\frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \tag{2.1.1}$$

ahol Δx a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma\frac{mM}{kR^2} = 0,1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{mm}. \tag{2.1.2}$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma\frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \tag{2.1.3}$$

Innen a $\Delta x'$ megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma\frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099\,\mathrm{m} = 99\,\mathrm{mm}, \tag{2.1.4}$$

azaz a rúgó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

Coriolis-erő

2.2. Feladat: (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.
(a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?
(b) Milyen irányú ez az erő?

Megoldás: Jelölések: $\omega = 1,5$ rad/s; $m = 5$ g és $v = 500$ m/s.
(a) A puska csöve az óra járásának megfelelően fordul el, így az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor és a $\mathbf{v}$ sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}, \tag{2.2.1}$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{v}$ egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5\,\mathrm{N}. \tag{2.2.2}$$

(b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

2.3. Feladat: A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.
(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?
(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely $h = 100$ m magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:

(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld ω szögsebessége és a leeső test v sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega g t \tag{2.3.1}$$

keleti irányú gyorsulása van.
(b) A t időtartamú esés során az $a(t) = 2\omega g t$ egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega g t^2. \tag{2.3.2}$$

* Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t 2\omega g t\,\mathrm{d}t = \omega g t^2. \tag{2.3.3}$$

Az esés ideje 4,47 s, $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s^2 adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}. \tag{2.3.4}$$