

1. Gyakorlat – órai és házi feladatok

Műveletek vektorokkal

1. **Órai 1.** Adottak az alábbi kétdimenziós vektorok:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- a, Ábrázoljuk a két vektort!
- b, Határozzuk meg és ábrázoljuk az $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ vektort!
- c, Mekkora a vektorok normája (nagysága)?
- d, Mekkora szöget zár be a két vektor?

2. Adottak az alábbi háromdimenziós vektorok:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- a, Ábrázoljuk a két vektort!
- b, Határozzuk meg és ábrázoljuk az $4\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$ vektort!
- c, Mekkora a vektorok normája (nagysága)?
- d, Mekkora szöget zár be a két vektor?

3. **Órai 2.** Számítsa ki az $\mathbf{a}\mathbf{b}$ skaláris szorzatot, ha $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 4$, a két vektor által közrezárt szög pedig 120° . Mennyi a skaláris szorzat értéke, ha a közrezárt szög 90° .

4. **Órai 3.** Számítsa ki $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ értékét, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 4\sqrt{2}$, a két vektor által közrezárt szög pedig 45° .

5. Mekkora $|\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}|$ értéke, ha $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 8$ és a vektorok páronként merőlegesek egymásra?

6. Legyen $\mathbf{a} = (2, 5, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, 1, 4)$. Számítsa ki az alábbi mennyiségeket:
 $12\mathbf{a}$, $|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}$.

7. **Órai 4.** Írja fel az \mathbf{a}^0 egységvektort, ha $\mathbf{a} = (-1, 0, \sqrt{3})$. Mekkora szögeket zár közre az \mathbf{a} vektor a koordinátatengelyekkel?
8. Számítsa ki az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által kifeszített paralelogramma területét, ha $\mathbf{a} = (2, 5, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$.
9. Számítsa ki az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített hasáb térfogatát, ha $\mathbf{a} = (2, 5, -1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, 1, 4)$.
10. Mekkora szöget zár közre az $\mathbf{a} = (\sqrt{2}, -1, 1)$ és $\mathbf{b} = (1, 0, -\sqrt{2})$ vektor? Mekkora a \mathbf{b} és $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$ vektorok által közrezárt ψ szög?
11. Határozza meg z értékét úgy, hogy az $\mathbf{a} = (5, 2, 4)$, $\mathbf{b} = (3, 7, z)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra.

Függvények, függvények érintője – változási sebesség

12. **Órai 5.** Ábrázoljuk az $x(t) = c_1 t + c_2$ függvényt és határozzuk meg a t -beli meredekségét!
13. **Órai 6.** Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + x + 1$ függvényt és határozzuk meg a x -beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ -s” módszerrel tegyük!/
/
14. Ábrázoljuk az $f(z) = 4z^3 - 1$ függvényt és határozzuk meg a z -beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ -s” módszerrel tegyük!/
/
15. **Órai 7.** Határozzuk meg az $y(x) = x \sin x$ függvény x -beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ -s” módszerrel tegyük!/
/
16. Határozzuk meg az $y(t) = A \sin^2 \omega t$ függvény t -beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ -s” módszerrel tegyük!/
/

Függvénygörbe alatti terület

17. **Órai 8.** Számítsuk ki az $y(x) = 2x + 1$ egyenes alatti területet a $2 \leq x \leq 3$ intervallumban! (Téglalapokkal vagy trapézokkal közelítsen!)

18. Számítsuk ki az $y(x) = x^2 + 1$ görbe alatti területet a $2 \leq x \leq 4$ intervallumban! (Téglalapokkal vagy trapézokkal közelítsen!)

19. Számítsuk ki az $y(x) = 2x^2 + x$ görbe alatti területet a $0 \leq x \leq 1$ intervallumban! (Téglalapokkal vagy trapézokkal közelítsen!)

MEGOLDÁSOK

1.a, Ábra.

$$\text{b, } 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{c, } \mathbf{a}_1^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \rightarrow |\mathbf{a}_1| = a_1 = \sqrt{13}$$

$$\mathbf{a}_2^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \rightarrow |\mathbf{a}_2| = a_2 = \sqrt{2}$$

$$\text{d, Mivel } \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2| \cos \alpha, \text{ így } \cos \alpha = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|} = \frac{-2-3}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{-5}{\sqrt{26}} \rightarrow \alpha = 168,7^\circ$$

2. a, Ábra.

$$\text{b, } 4\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{c, } \mathbf{v}_1^2 = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6 \rightarrow |\mathbf{v}_1| = v_1 = \sqrt{6}$$

$$\mathbf{v}_2^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow |\mathbf{v}_2| = v_2 = \sqrt{2}$$

$$\text{d, Mivel } \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos \alpha, \text{ így } \cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{0+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \rightarrow \alpha = 73,2^\circ$$

$$3. \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = 7 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -14. \text{ Ha } \varphi = 90^\circ, \text{ akkor } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

$$4. |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \varphi = 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}.$$

5. $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ értéke a három vektor által kifeszített hasáb térfogatával egyenlő. Mivel a vektorok páronként merőlegesek, ezért $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = 5 \cdot 2 \cdot 8 = 80$.

6. $12\mathbf{a} = 12(2,5,-1) = (24,60,-12)$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30};$$

$$\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = (2,5,-1) + 5(0,2,1) = (2,15,4);$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2,5,-1) \cdot (0,2,1) = 0+10-1=9;$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (7,-2,4);$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (2,7,0) \cdot (-3,1,4) = -6+7+0=1;$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = -7.$$

7. $\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-1,0,\sqrt{3})}{\sqrt{1+0+3}} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Innen látható, hogy $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tehát $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

8. $T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{49+4+16} = \sqrt{69}$.

9. $V = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = |-7| = 7$.

10. $\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = 0$, ezért $\varphi = 90^\circ$. $\cos \psi = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}$, $\psi = 49^\circ 10'$.

11. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 15+14+4z = 0$, ahonnan $z = -\frac{29}{4}$.

12. Ábra. Mindenütt c_1 a meredekség.

13.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + 1 - (2x^2 + x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x + 1 - 2x^2 - x - 1}{\Delta x} = 4x + 1 \end{aligned}$$

14.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{4(z + \Delta z)^3 - 1 - (4z^3 - 1)}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{4z^3 + 12z^2\Delta z + 12z(\Delta z)^2 + 4(\Delta z)^3 - 1 - (4z^3 - 1)}{\Delta z} = 12z^2$$

15.

$$y'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \sin(x + \Delta x) - x \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) (\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x) - x \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \cos \Delta x + x \cos x \sin \Delta x + \Delta x \sin x \cos \Delta x + \Delta x \cos x \sin \Delta x - x \sin x}{\Delta x} \quad (*)$$

Zérushoz közeli Δx értékekre az alábbi közelítő összefüggéseket alkalmazva

$$\cos \Delta x \sim 1$$

$$\sin \Delta x \sim \Delta x$$

$$(*) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + x \cos x \Delta x + \Delta x \sin x + \Delta x \cos x \Delta x - x \sin x}{\Delta x} = \sin x + x \cos x.$$

16.

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A \sin^2 \omega(t + \Delta t) - A \sin^2 \omega t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(\sin \omega t \cos \omega \Delta t + \cos \omega t \sin \omega \Delta t)^2 - A \sin^2 \omega t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(\sin^2 \omega t \cos^2 \omega \Delta t + 2 \sin \omega t \cos \omega \Delta t \cos \omega t \sin \omega \Delta t + \cos^2 \omega t \sin^2 \omega \Delta t) - A \sin^2 \omega t}{\Delta t}$$

$$= (**)$$

Az előző esethez hasonlóan

$$\cos \omega \Delta t \sim 1$$

$$\sin \omega \Delta t \sim \omega \Delta t,$$

amellyel

$$(**) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(\sin^2 \omega t + 2 \sin \omega t \cos \omega t \omega \Delta t + \cos^2 \omega t (\omega \Delta t)^2) - A \sin^2 \omega t}{\Delta t} \\ = 2A\omega \sin \omega t \cos \omega t.$$

$$17. \text{ Ha } x_2 = 3 \rightarrow a = y_2 = 7 \\ x_1 = 2 \rightarrow c = y_1 = 5 \\ m = x_2 - x_1 = 1$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{a+c}{2} m = 6$$

A görbe alatti terület számolási technikáját fejlesztendő osszuk a $2 \leq x \leq 3$ intervallumot n egyenlő részre, és rendre számoljuk ki a téglalapok területét a baloldali intervallumértékekkel (integrál alsó közelítő összeg):

$$T_1 = \left[2 \left(2 + 0 \frac{1}{n} \right) + 1 \right] \frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2 \cdot 0 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$T_2 = \left[2 \left(2 + 1 \frac{1}{n} \right) + 1 \right] \frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2 \cdot 1 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$T_3 = \left[2 \left(2 + 2 \frac{1}{n} \right) + 1 \right] \frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2 \cdot 2 \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$T_n = \left[2 \left(2 + (n-1) \frac{1}{n} \right) + 1 \right] \frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2 \cdot (n-1) \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Az n téglalap területe összeadva és $n \rightarrow \infty$ esetet véve:

$$T = n \frac{4}{n} + 2 \frac{0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)}{n^2} + n \frac{1}{n} = 4 + 2 \frac{(n-1)n}{2n^2} + 1 = 4 + 1 + 1 = 6$$

18. Osszuk a $2 \leq x \leq 4$ intervallumot n egyenlő részre, és rendre számoljuk ki a téglalapok területét a jobboldali intervallumértékekkel (integrál felső közelítő összeg):

$$T_1 = \left[\left(2 + 1 \cdot \frac{2}{n} \right)^2 + 1 \right] \frac{2}{n} = \left[4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{n} + 1^2 \frac{4}{n^2} + 1 \right] \frac{2}{n}$$

$$T_2 = \left[\left(2 + 2 \cdot \frac{2}{n} \right)^2 + 1 \right] \frac{2}{n} = \left[4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{n} + 2^2 \frac{4}{n^2} + 1 \right] \frac{2}{n}$$

$$T_n = \left[\left(2 + n \cdot \frac{2}{n} \right)^2 + 1 \right] \frac{2}{n} = \left[4 + 2 \cdot 2 \cdot n \cdot \frac{2}{n} + n^2 \frac{4}{n^2} + 1 \right] \frac{2}{n}$$

Az n téglalap területe összeadva és $n \rightarrow \infty$ esetet véve:

$$\begin{aligned} T &= 4 \frac{2}{n} n + 2 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \frac{4}{n^2} \frac{2}{n} + \frac{2}{n} n \\ &= 8 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{4}{n^2} \frac{2}{n} + 2 = \frac{62}{3} \end{aligned}$$

19. A fenti módszert alkalmazva:

$$T = \frac{7}{6}$$