2016. 09. 06.

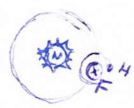
A tudományos megismerés folyamata

megfigyelések (kísérletek) → fizikai mennyiségek hozzárendelése
↓
összefüggések megállapítása → elméletek alkotása → megfigyelések (kísérletek)

paradigmaváltás (Thomas Kuhn): teljesen új elmélet/szemlélet születik

korrespondencia-elv: az új elmélet tartalmazza a régit határesetként (pl. a kvantummechanika tartalmazza a klasszikus fizikát)

pl.: tömegvonzás törvénye
megfigyelés: a bolygók mozgása „fura"
retrográd mozgás
fizikai mennyiségek: idővel kapcsolatos mennyiségek
összefüggések, elmélet: a csillagok, a Nap, a Hold egy nap alatt megkerülik a Földet
Ptolemaiosz (Kr. e. IV. szd.): geocentrikus világkép (a Mars egy körön mozgó körön mozog)
Galilei (1610.): első távcső, megtalálta a Jupiter holdjait (mini Naprendszer); a Vénusz fázisváltozásai (sarló alak) → a Nap körül kering, nem a Föld körül
Kopernikusz forradalom (1610.): heliocentrikus világkép, a Mars retrográd mozgását nem tudta megmagyarázni, ott maradt a körön mozgó kör



Tycho Brahe (1580-1605.): pontos megfigyelések, ugyanis asztrológus
a „körön mozgó kör"-modell nem elég pontos, nem elég jól jellemzi a Mars mozgását → „körön mozgó körön mozgó kör"

Kepler (1609 - 1616): ellipszispályák (a Marsnál nagy az ellipticitása)

Newton (1680): egyetemes tömegvonzás törvénye

$F \sim \frac{1}{r^2}$

Hőtan / termodinamika

Miért tanuljuk?

- fizikai fejlődéstörténetben fontos
- modern fizikai gondolkodást bemutatja
- hétköznapi életben fontos
- kísérleti fizika módszereit szemlélteti
- modern koncepciók: entrópia
- műszaki és biofizikai, [illegible] folyamatok megértése
- kelleni fog később: szilfiz, statfiz

Hőtan helye:

mechanika

$\downarrow$ kinetikus gázelmélet

hőtan $\longleftrightarrow$ önálló fenomenologikus elmélet

$\updownarrow$ gyenge kapcsolat

elektromosságtan

kvantummechanika $\longrightarrow$ statisztikus fizika

2016. 09. 06.

Hőtan története

1650. Otto von Guericke: első vákuum
cáfolta az arisztotelészi vákuumtól való irtózást
1656. Robert Boyle: összefüggés a gázok nyomása, térfogata és hőmérséklete között
1679. Denis Papin (Boyle tanítványa): KUKTA
1697. Thomas Savery: első gőzgép (kukta szelep)
1712. Thomas Newcomen: javított gőzgép
1770. Joseph Black: mi a hő?
kalorikum - elmélet: a hő egy szubsztancia (anyag - a ford.), tömege 0
állandó és megmarad
új fogalmak:
- hőmennyiség
- fajhő
- hőkapacitás
- látens hő
- kalória

1798. Count Rumford: ágyúcsövek fúrásakor hő keletkezik (→ hőtan I.)
a mechanikai munka hővé alakul
kinetikus elmélet: a hő a részecskék mechanikai energiája

(James Watt: Black tanítványa)

1824. Sadi Carnot [kárnó]: modern hőtan (→ II. főtétel)
1841. James Joule: Joule-kísérlet (mechanikai munka ↔ hő) → I. főtétel
1850. Rudolf Clausius: kalorikum- és kinetikus elmélet ekvivalens, ha a kalorikum megmaradását az energiamegmaradással helyettesítjük

1860. statisztikus termodinamika: Maxwell
Boltzmann
Planck (III. főtétel)
Clausius
Gibbs

2016. 09. 06.

Empirikus hőmérséklet

hőmérséklet ≠ hőmennyiség (pl. láng vs. meleg vasdarab)

tapasztalat:
- adott környezetben a testek hőmérséklete állandó
- érintkező testek hőmérséklete azonos lesz
- fizikai tulajdonságok (hossz, sűrűség, halmazállapot, szín, etc.) függenek a hőmérséklettől

A termikus egyensúly tranzitív:

ha $\boxed{A} \xleftrightarrow{\text{termikus egyensúly}} \boxed{B}$ és $\boxed{B} \xleftrightarrow{\text{termikus egyensúly}} \boxed{C}$,

akkor $\boxed{A} \xleftrightarrow[\text{termikus egyensúly}]{} \boxed{C}$

A hőtan 0. főtétele

⇓

ezért lehet empirikus hőmérsékletet
- skálatörvény (lineáris)
- egység
- mélypont
- mérendő tulajdonság

pl. Celsius-skála
higany ($x(t)$: higany hossza adott hőmérsékleten) $t(°C) = 100\,\frac{x(t) - x_0}{x_f - x_0}$

ideális gázhőmérséklet skála

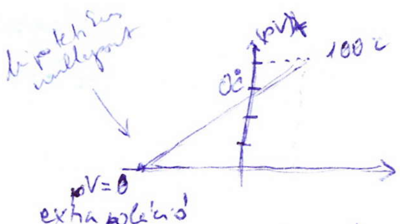
$$pV = nRT \quad \text{(egyesített gáztörvény)}$$

$$R = 8{,}314 \,\frac{J}{K\,mol}$$

$(pV)_T$ = lineáris (T: hőmérséklet)

$(pV)_f$ és $(pV)_0$ mérése, $f = 100\,°C$

$$R = \frac{(pV)_f - (pV)_0}{n \cdot 100} \quad \text{mérhető}$$



$$T_0 = \frac{(pV)_0}{nR} = \frac{100\,(pV)_0}{(pV)_f - (pV)_0}$$

⇓

$$T_0 = 273{,}15\,K = 0\,°C$$

2016. 03. 06.

Megj.: az ideális gáztörvény légköri nyomás és szobahőmérséklet esetén jó közelítés;

a 0K nem érhető el;

lesz majd 273,16 K → a víz hármaspontjához tartozó hőmérséklet

Kinetikus gázelmélet

Feltevés:
- a részecskék kis gömbök,
- melyeknek az átmérője kisebb, mint a szabad úthossz

úthossz

$$d \ll l \leftarrow \text{szabad úthossz}$$

- minden ütközés rugalmas
- nincs megkülönböztetett irány

Leírás: 6 dimenziós fázistérben

$\vec{r}$: helyvektor

$\vec{v}$: sebességvektor

elemi térfogat:

$[x, x+dx]$ $[v_x, v_x+dv_x]$

$[y, y+dy]$ $[v_y, v_y+dv_y]$

$[z, z+dz]$ $[v_z, v_z+dv_z]$

N db részecske van, dN az elemi térfogatban lévők száma

$$\frac{dN}{N} \triangleq \underset{\text{sűrűségfüggvény}}{f(\vec{r}, \vec{v}, t)} \cdot \underbrace{dv_x \cdot dv_y \, dv_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz}_{d\tau\text{ : elemi fázistérfogat}}$$

$$\int_{\substack{\text{teljes} \\ \text{fázistérfogatra}}} f(\vec{r}, \vec{v}, t) \, d\tau = 1$$

Adott fizikai mennyiség $q(\vec{r}, \vec{v}, t)$ (pl. seb., hely) átlagértéke (várható értéke):

$$\overline{q} = \int_{\substack{\text{teljes fá-} \\ \text{zistérfogatra}}} q(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot f(\vec{r}, \vec{v}, t) \, d\tau$$

sűrűségfüggvény: 2016. 09. 13.

$$\frac{dN}{N} = f(\vec{r}, \vec{v}, t)\, d\tau$$ elemi fázis-térfogat

$$\int f(\vec{r}, \vec{v}, t)\, d\tau = 1$$

teljes fázistér.

rendszerre jellemző információ

q: fizikai mennyiség (pl. $|\vec{v}|$), akkor q átlag (várható) értéke:

$$\bar{q} = \int_{\text{teljes fázistérre}} q(\vec{r}, \vec{v}, t)\, f(\vec{r}, \vec{v}, t)\, d\tau$$

Várható érték vs. sűrűségfüggvény

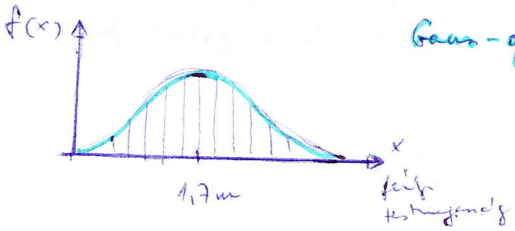
Játék: 

hatos: +6 Ft

1–5: −1 Ft

$$\sum_i p_i X_i = \frac{1}{6}\cdot 6 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$ x_i: diszkrét valószíg. változó

x: folytonos valószíg. változó

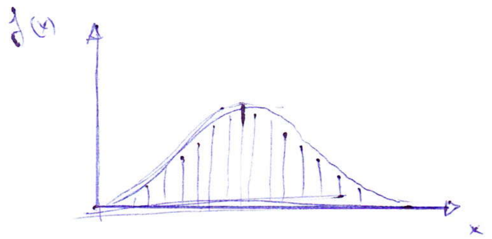


Gauss-görbe

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = 1$$

f(x) az x folytonos valószíg. változó sűrűségfüggvénye.

$$\bar{x} = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma^2 = x^2 f(x)\,dx - \left(\int x\, f(x)\,dx\right)^2$$

statisztikában:

$$\bar{x} = \langle x \rangle$$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

pl. x legyen 0 (fej) vagy 1 (írás)

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

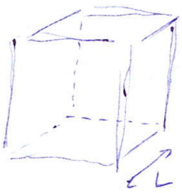
$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

2016. 09. 13.

Nyomás a kinetikus gázelméletben



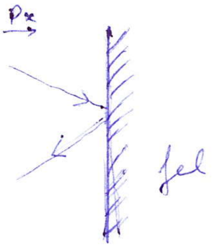
$V = L^3$

m_0 tömegű részecskék

rugalmas ütközés a fallal Δt időnként

(nincs kitüntetett irány!)

$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$; $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$



impulzusátadás a falnak

$$\Delta p_x = 2 m_0 v_x$$

egy részecskéből származó erő

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_0 v_x^2}{L}$$

falra ható erő

csalás (közelítés)

falra ható teljes erő: $F = N \frac{m_0 \overline{v_x^2}}{L}$

átlagolás az összes részecskére

nyomás: $p = \frac{F}{L^2} = N \frac{m_0 \overline{v_x^2}}{V}$

Pitagorasz-tétel + nincs kitüntetett irány: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$

$\overline{|\vec{v}|^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ $\qquad |\vec{v}| = v$

$\rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$

$$p = \frac{N m_0 \overline{v^2}}{3L^3}$$

fenomenológikus mennyiség

mikroszkopikus leírás

$$p = \frac{N m_0 \bar{v}^2}{3 L^3}$$

$$\frac{N}{L^3} = \frac{N}{V} \triangleq n_V$$

részecskeszám-sűrűség $[n_V] = \frac{db}{m^3} = \frac{1}{m^3}$

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2$$

átlagos mozgási energia

$$p = \frac{2}{3} n_V \bar{\varepsilon}_m$$

gázkeverék: $m_{01}, m_{02}, \dots$ tömegű különböző részecskék

Dalton-tv.: $p = \sum p_i = \frac{2}{3} \sum n_{V,i} \bar{\varepsilon}_{m,i}$

parciális gáznyomás

A hőmérséklet értelmezése

$pV = nRT$ egyesített gáztörvény

$R = 8{,}314 \frac{J}{mol\,K}$

$pV = N k_B T$ $\quad k_B$: Boltzmann-állandó $1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

k_B def

$\Updownarrow$

$$pV = \frac{N}{3} m_0 \bar{v}^2 = \frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_m N \Rightarrow k_B T = \frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_m$$

hőmérséklet kinetikus értelmezése

$\frac{3}{2} k_B T = \bar{E}_m$ kimondjuk az ekvipartíció tételét

$f = 3$ ún. szabadsági fok: az energia kifejezésében szereplő négyzetes tagok száma

Ekvipartíció tétele: egy szabadsági fokra jutó átlagos energia $\frac{1}{2} k_B T$

- stat. fiz-ből le lesz vezetve
- csak magas hőmérsékleten igaz („a szabadsági fokok kifagynak")
- egyenlően oszlik el az energia a szabadsági fokok között

1 atomos gáz $f = 3$ csak transzláció

2 atomos $f = 3 + 2 = 5$ transzláció + forog

$$E_{mechanikai} = E_{transzlációs} + \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \omega_2^2$$

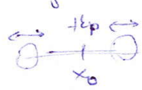
2 tengely körül forog
a 3. energiája $\emptyset$

2 atomos forog + rezeg

$$f = \underset{\text{transzláció}}{3} + \underset{\text{rotáció}}{2} + \underset{\text{rezgés}}{2} = 7$$

$E_{rezg} = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v^2$ nem transzlációs sebesség

az x_0 távolsághoz képest rezeg



pl. kétatomos molekula elvben kétféle atom, gyakorlatban össze van kapcsolva (−1 szab. fok)

Belső energia

Ideális gázban a tömegpontok összenergiáját jelenti.

$$U = N\overline{\varepsilon_m} = N\frac{f}{2}\cdot k_B T$$

ideális gázban az $U = U(T)$ csak T-től függ.

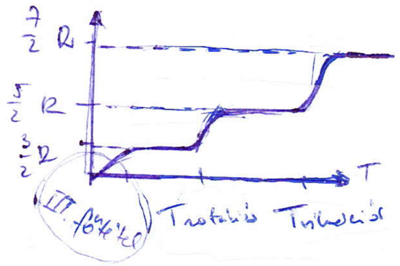
Fajhő lépcsők

fajhő: belső energia hőmérséklet szerinti deriváltja c

$$c \triangleq \frac{dU}{dT}, \quad \text{később} \quad C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

állandó térfogaton vett molhő

kísérlet két atomos molekulákból álló gázra



ideális gázra:

$$pV = nRT$$
$$pV = N k_B T$$
$$U = \frac{f}{2}\underbrace{N k_B}_{nR} T$$

$$C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{f}{2}R$$

2016. 09. 13.

Reális gázok, van der Waals-modell

(vdW: 1873., 1910.: Nobel)

ideális gáz + empirikus paraméterek

ideális gáz		vdW-gáz
∅	részecskék kiterj.	véges
nincs	részecskék közötti kölcsönhatás	van

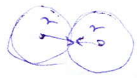
Motiváció: $p = \frac{nRT}{V}$ ideális gáznál

rendelkezésre álló térfogat

$$V \to V - nb$$

kizárt térfogat (empirikus param.)

szemléltetés:



Ek.: vonzó kölcsönhatás potenciálja:

A vonzó kölcsönhatás csökkenti a nyomást (ún. kohéziós nyomás)
„a belül lévő részecskék hátrahúzzák"

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

↗ $p_{kohéziós} < 0$

a: empirikus faktor

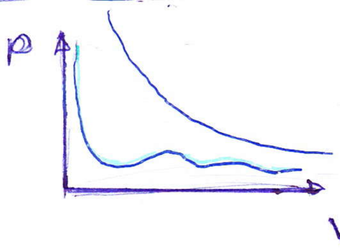
$$\left(\frac{n}{V}\right)^2 = \left(\frac{N}{V}\right)^2 \left(\frac{1}{N_A}\right)^2 = n_V^2 \left(\frac{1}{N_A}\right)^2$$

Motiváció: párkölcsönhatás van jelen
pl. nyulak szaporodása,
nem homogén [illegible]

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Reális gázok állapotegyenlete

Következmény



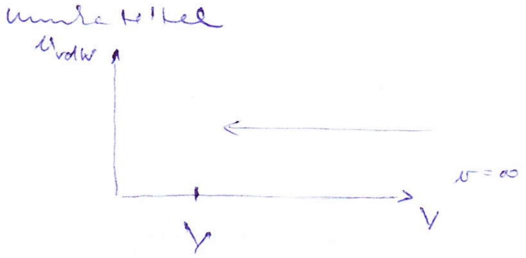
$p(V) = \frac{nRT}{V}$ ideális gáz izotermája

vdW-gáz $\quad p(V) = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$

nem hiperbola!

még jön! (halmazállapot-változásoknál)

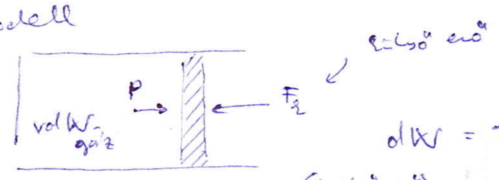
vdW belső energiája



$$U_{vdW}(V) - U_{vdW}(V=\infty) = \int_{V=\infty}^{V} dW = \int F\,ds$$

munkatétel

modell



$dW = \vec{F}_k\, d\vec{s} = -pA\,ds = -pdV$

(külső erő munkája) elemi munkavégzés

$F_k = pA$

$$dW = -pdV$$

összenyomás

$dW > 0$, $dV < 0$

gáz tágul

$dW < 0$, $dV > 0$

A kohéziós nyomás munkavégzése

$$p_{koh} = -\frac{an^2}{V^2} < 0$$

$$U(V) - U(V=\infty) = -\int_{V=\infty}^{V} p_{koh}(V')\,dV' = \int_{\infty}^{V} +\frac{an^2}{V'^2}\,dV' = -an^2\left[\frac{1}{V'}\right]_{\infty}^{V} = -\frac{an^2}{V}$$

2016. 09. 13.

$$U_{vdW}(V) = U_{ideális} - \frac{an^2}{V} = \frac{f}{2} N k_B T - \frac{an^2}{V}$$

fontos: $U_{vdW} = U(T,V) \leftarrow$ V-től is függ!

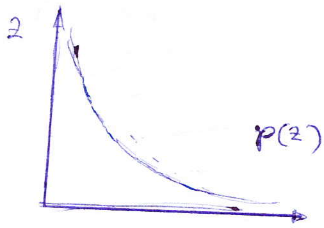
ezért fontos $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

lehetséges összeáll „vízcseppé"
DE a környezettel való kölcsönhatás és
entrópia megakadályozza

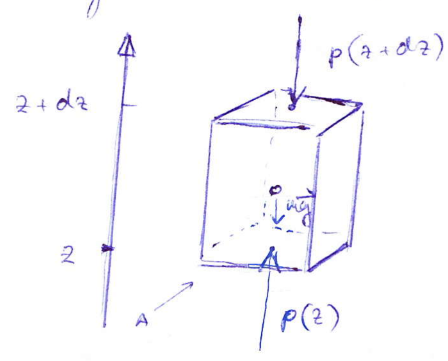
Barometrikus magasságformula

$T =$ áll. $\qquad z =$ tengerszint feletti magasság

$p(z) = ?$



légköri kis darabja



$g =$ áll.

mozgásegyenlet
erők egyensúlya
$m = \rho A dz$

$-p(z+dz) + p(z) A - \rho g A dz = 0$

$$p(z+dz) = p(z) + \frac{dp(z)}{dz} dz + \mathcal{O}(dz^2)$$

$$\frac{dp(z)}{dz} dz A = -\rho g A dz \qquad /: dz \cdot A$$

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho(z) g$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N m_0}{V} = n_V m_0 \quad , \quad p = n_V k_B T$$

$$\longrightarrow \rho = \frac{m_0 p}{k_B T}$$

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{m_0 g p}{k_B T}$$

izoterm!
T-nek nincs (p,z) függése

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{m_0 g p}{k_B T}$$

Megoldása: $p(z) = p_0 e^{-\frac{m_0 g}{k_B T} z} = p_0 e^{-\frac{\varepsilon_h}{k_B T}}$

Maxwell-Boltzmann eloszlás

$$m_0 g z = \varepsilon_{helyzeti}$$

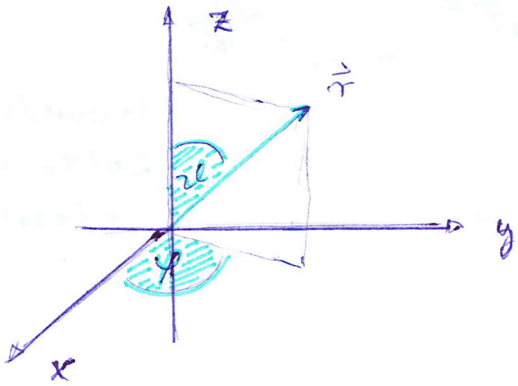
$$p = n_V k_B T \longrightarrow n_V = \frac{p}{k_B T}$$

$$n_V(z) = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_h}{k_B T}}$$

2016. 09. 13.

MATEMATIKAI KITÉRŐ

Gömbi koordinátarendszer (r, φ, ϑ)



φ : azimut
ϑ : polárszög

$$\int dx\,dy\,dz \longrightarrow \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

elemi térszög:

$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

elemi felület:

$$\int dA = r^2 \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

r sugarú gömb felülete:

$$\int_A dA = r^2 \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4 r^2 \pi$$

r sugarú gömb térfogata

$$\int_V dV = \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Részecskeáram-sűrűség

$f(v)$ = sebesség sűrűségfüggvény, dN_v = $v + dv$ közötti sebességű részecskék száma

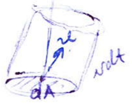
$$dN_v = N f(v)\, dv$$

elemi térszög normálva

$$dN_{dV,v,\vartheta,\varphi} = dN_v \frac{d\Omega_{\vartheta,\varphi}}{4\pi} \frac{dV}{V}$$

$$dV = v\,dt \cos(\vartheta)\, dA$$

dV elemi térfogatban levő, v sebességű részecskék, amelyek (ϑ, φ) irányban mozognak ($d\Omega$ térszögben)



hány részecske ér be ide dt idő alatt?

azok, amik ebben a térf. elemben vannak és jó irányban mozognak

$$dN_{dA,dt} = \int_{\text{féltér}} dN_{dV,v,\vartheta,\varphi} = j\, dA\, dt,$$

ahol $j = \frac{1}{4} n \bar{v}$ részecske áramsűrűség

2016. 09. 20.

Kinetikus gázelmélet: (p, T)
Reális gáz vdW, $U = U(V,T)$
Barometrikus magasságformula

Transzportfolyamatok

részecskeáram-sűrűség

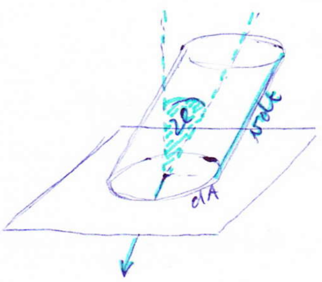
v: sebesség, V: térfogat

$$dN_v = N f(v)\,dv$$

olyan részecskék száma, melyekre a sebesség $(v, v+dv)$

$$dN_{dV,v,\vartheta,\varphi} = dN_v \frac{\sin(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi}{4\pi}\frac{dV}{V}$$

↳ ahol $v \in [v, v+dv]$
hely $\in dV$
irány $\in d\Omega = \sin(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi$



$$dV = v\,dt\cos(\vartheta)\,dA$$

azok jutnak dA-n át, melyek itt vannak, és jó irányba haladnak

$$dN_{dA,dt} = \int_{\substack{\text{fél térrészre}\\ \text{és minden le-}\\ \text{hetséges se-}\\ \text{bességre}}} dN_{dV,v,\vartheta,\varphi}$$

$dV = v\,dt\cos(\vartheta)\,dA$

$$dN_{dAdt} = \int_{\text{sebesség}} \underbrace{\frac{N}{V} v f(v)\,dv}_{n_V \bar{v}} \frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\,d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \underbrace{dt\,dA}_{\text{nem integ-rálandó}} =$$

$$= dA\,dt\,n_V\,\bar{v}\,\frac{1}{4}$$

Bevezetjük a részecskeáram-sűrűséget (j) az egys. idő alatt, egys. felületen áthaladó részecskék száma.

$$dN_{dA,dt} = j\,dA\,dt$$

$$j = \frac{1}{4} n_V \bar{v}$$

2016. 09. 20.

TRANSZPORT FOLYAMATOK ← tényleg!

fizikai mennyiségnek van térbeli eloszlása (← inhomogén), például: koncentráció, hőmérséklet, nyomás

$\longrightarrow \quad \nabla \, (\text{grad}) \neq 0$

Ekkor áramlások alakulnak ki, áramok lesznek

- koncentrációkülönbség → diffúzió
- elektromos potenciálkülönbség → töltésáramlás
- hőmérsékletkülönbség → hőáram, hővezetés

Legáltalánosabb leírása: ún. **Boltzmann-egyenlet**

az $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ sűrűségfüggvényt vizsgálja

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{erő} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{diffúzió} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ütközésektől}$$

ha f-nek van térbeli eloszlása

Az általános megoldás nem ismert, csak speciális esetekben.

1H: csak diffúzió és ütközési tag, utóbbit az ún. szabad úthossz-közelítésben.

ütköznek, ha két részecske középpontjának távolsága $< d$

→ vagyis a d sugarú csőben mozogva

A „kis cső" térfogata, ha dt időközönként ütközik a részecske:

$$dV = \bar{v}\, d^2 \pi \, dt \;\hat{=}\; \sigma \bar{v} \, dt$$

$$dV = \sigma \bar{l} = \frac{V}{N} = \frac{1}{n_V}$$

egy részecskére jutó térfogat

σ a hatáskeresztmetszet

$[\sigma] = m^2$

$\bar{l}$ = {átlagos szabad úthossz} = $= \bar{v}\, dt$

pl. ideális gázban

$$pV = N k_B T$$

$$\frac{V}{N} = \frac{k_B T}{p} \longrightarrow \bar{l} = \frac{k_B T}{p \sigma}$$

↳ kapcsolat a mikro- és makromennyiségek között

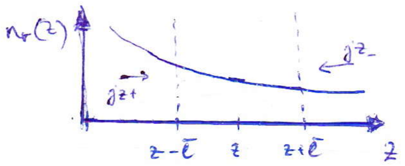
pl. He-ra $d = 31$ pm (piko)

1 mbar-on $\sigma = 3 \cdot 10^{-21}\ m^2$

$l = 1\ mm$ ← ballisztikus transzport

Diffúzió a szabad úthossz közelítésben

(1D)



n_V = részecskeszám-sűrűség

$j_{z+/-}$ = balról, ill. jobbról jövő részecskeáram-sűrűség

diffúziós részecskeáram

$$j_z^{diff} = j_{z+} - j_{z-}$$

$$j = \frac{1}{4} n_V \bar{v}$$

$$j_z^{diff} = \frac{1}{4} \bar{v} \cdot \left(n_V(z-\bar{l}) - n_V(z+\bar{l}) \right)$$

szabad úthossz közelítése: $n_V(z-\bar{l}) = n_V(z) - \bar{l} \frac{dn_V}{dz}$

$n_V(z+\bar{l}) = n_V(z) + \bar{l} \frac{dn_V}{dz}$

$$j_z^{diff} = -\frac{1}{2} \bar{l} \bar{v} \frac{dn_V}{dz}$$

megj. $\bar{l} \cdot \frac{dn_V}{dz} \approx \Delta n_V$

előjelváltozás ← $j_z^{diff} > 0$, $\frac{dn_V}{dz} < 0$

3D-ben: gradiens

$$\vec{j}^{diff} = -\frac{1}{2} \bar{l} \bar{v} \nabla n_V$$

$$D = \frac{1}{2} \bar{l} \bar{v}$$

diffúziós állandó

a prefaktor lehet $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, stb.

dimenziótól függ

$$\vec{j}^{diff} = -D \nabla n_V$$

Fick-tv.

D függ: T, p, m $D \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$

Hővezetés

$$\bar{\varepsilon} = \frac{f}{2} k_B T$$

$$j_z^{hő} = \frac{f k_B}{8} n_V \bar{v} \left(T_+ - T_-\right)$$

$$\left(j_z^{hő} = \frac{J}{m^2 s}\right)$$

$$j_z^{hő} = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

$$\lambda = \frac{f k_B}{8} n_V \bar{v}$$

$\uparrow$ hővezetési együttható

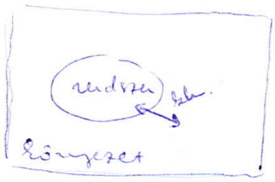
$\downarrow$ mérhető

$$\vec{j}^{hő} = -\lambda \nabla T$$

Fourier-tv.

2016. 09. 20.

Fenomenologikus termodinamika (leíró módon)



Fizikai mennyiségek:

- extenzív: térfogat, anyagmennyiség, entrópia
- intenzív: nyomás, kémiai potenciál, hőmérséklet

extenzív: a rendszer méretétől függ, alrendszerekre additív

intenzív: a rendszer méretétől nem függ, alrendszerekben azonos, különböző rendszerek kölcsönhatásakor kiegyenlítődik

Egyensúly: a rendszere jellemző fizikai mennyiségek térben és időben állandóak.

Az egyensúlyt jellemző fizikai mennyiségek az ún. állapotjelzők.

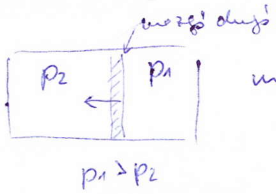
A 0. főtétel másképp: a rendszer magára hagyva eléri az egyensúlyt.

Kölcsönhatás: intenzív mennyiség (termodinamikai erő) különbsége „hajtja" az extenzív mennyiség megváltozását.

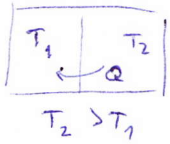
$$F = m a$$

erő — jellemző — hatás

A 21. oldalt Szász-Schagrin Dániel ajánlja a jegyzetíró.



mechanikai kh.



$Q \sim S$ → entrópia

kölcsönhatás	intenzív	extenzív	szigetelés
mechanikai	p	V	merev fal
termikus	T	S	hőszigetelő fal
anyagi	μ (kémiai pot.)	n	anyagáramlást akadályozó fal
elektrosztatikus	(el. pot.) φ	q	elektromosan szigetelő
el. dipól kh.	$\vec{E} = -\nabla\varphi$	$\vec{p}$ (dipól momentum)	
mágneses kh.	B	$\vec{m}$ (mágneses dipól mom.)	

Alapfogalmak:

- zárt rendszer: nincs kölcsönhatás
- ahány fajta kh-ban vesz részt a rendszer, annyiszor 2db állapotjelző lehet, a tapasztalat szerint elég ismerni annyi extenzívet, ahány kh-ban vesz részt + egy intenzív paramétert.
  → túlhatározott (több paraméter, mint egyenlet): lesznek összefüggések a paraméterek között
- ezek az összefüggések az állapotegyenletek

$$f(p, V, T, S, \mu, n, \ldots) = 0$$

pl. ideális gáz: $pV = nRT \neq 0$

- folyamat: az állapotjelzők megváltozása
- kvázisztatikus folyamat: egyensúlyi állapotokon keresztül zajlik
- reverzibilis folyamat: a külső hatásokat megfordítva a rendszer a kiinduló állapotba kerül vissza

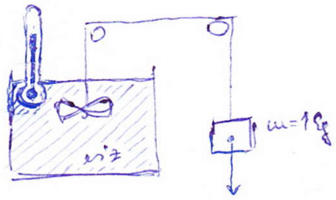
A hőtan I. főtétele

≠ a tapasztalat szerint

A mechanikai munka hővé alakul.

Energiamegmaradás tétele ≡ hőtan I. főtétele

Joule - kísérlet



$W_{mech} = \Delta E_{pot} \approx 10\,J$

$1\,kg$ víz, $c_{víz} = 4,2 \frac{kJ}{kg\,K}$ } $\Delta T = 2\,mK$

A rendszer két állapota között átmenettől mindig ugyanannyi mechanikai munkát kell végezni.

<u>Munkatétel:</u> $\Delta E_{mech} = \int \vec{F} d\vec{r} = W_{munka}$

$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$

Ezért a mechanikai analógia alapján definiálható ún. belső energia (U)

2016. 09. 27.

Joule-kísérlet: a mechanikai munka megváltoztathatja a testek termikus állapotát.

Munkatétel: $\Delta E_{kin} = \int_{út} \vec{F} d\vec{r}$

potenciális (konzervatív)

$$\Delta U_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{pot} d\vec{r} = U_B - U_A \quad \text{(útfüggetlen)}$$

Definiálható ún. belső energia (állapotjelző, termodinamikai potenciál), amire:

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = W^{adiabatikus}_{A \to B}$$

adiabatikus: nincs hőközl.

A mechanikai munkavégzés a belső energiát változtatja meg (fordítva nem igaz, II. főtétel).

U tulajdonságai, extenzív jellegű

$$U = U(T, p, n) \quad \text{vagy} \quad U = U(T, V, n)$$

A tapasztalat szerint a testek belső energiáját hőközléssel is megváltoztathatjuk. A hőközlés mikroszkópikusan „eldöbes".

$$\underbrace{\Delta U_{AB}}_{\text{I. főtétel}} = U_B - U_A = \underbrace{W}_{\substack{\text{rendszeren}\\ \text{végzett}\\ \text{munka}}} + \underbrace{Q}_{\substack{\text{rendszerrel}\\ \text{közölt}\\ \text{hő}}}$$

2016.09.27.

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = W + Q \leftarrow$$

rendszernek közölt hő

I. főtétel

rendszeren végzett munka

Energiamegmaradás törvénye hőtani folyamatokra.
(Ez volt véges folyamatokra)

$$dU = \delta W + \delta Q$$

U teljes differenciálja

útfüggetlen esetben működik

elemi munka

elemi hő

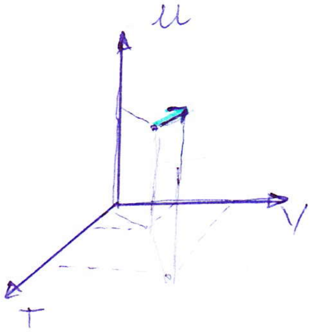
útfüggőek

Teljes differenciál :

ha $U = U(T,V) \longrightarrow U :$ T és V téren értelmezett skalár függvény

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

fix V　　　fix T



$$dU = \nabla U \cdot (dT, dV)$$

$$\nabla U = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V , \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right)$$

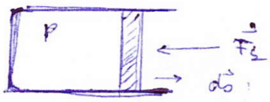
$$dU = \nabla U (dT, dV) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$$

$$dU = đW + đQ$$

$$\hookrightarrow \; đQ = dU - dW = đW^{ad} - đW$$

Munkavégzések fajtái

mechanikai



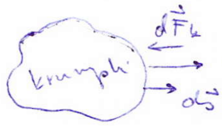
$d\vec{s}$: elemi elmozdulás vektor (rendszer szempontjából)

$$|\vec{F}_k| = pA \quad \rightarrow \quad đW = \vec{F}_k \, d\vec{s} = -\,p \underbrace{A\,ds}_{dV} = -p\,dV$$

ha tágul a gáz $dV > 0$ $\rightarrow đW < 0$

ha összenyomjuk $dV < 0$ $\rightarrow đW > 0$

általában:



$d\vec{A}$: elemi felületvektor

elemi munkavégzés elemi felületdarabon

$$d\vec{F}_k \cdot d\vec{s} = -\,p\,dA\,ds \qquad dA = |d\vec{A}|$$

$$đW = \oint_A d\vec{F}_k \, d\vec{s} = -p \oint_A dA\,ds = -pA\,ds =$$

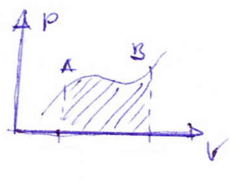
ds-re nem integrálunk

$$= -p\,dV$$

Véges térfogatváltozásra

$$p = p(V)$$

$$W_{A\to B} = -\int_A^B p(V)\,dV \quad \text{útfüggő}$$



2016. 03. 27.

Egyéb kölcsönhatás (pl. elektrosztatikus kő)

$$\delta W_{el} = \varphi \, dq$$

potenciál — elemi töltés megváltozása

(pl. anyagi munkavégzés)

$$\delta W_a = \mu \, dn$$

általánosan: $\delta W = X \, d\xi$

intenzív — extenzív

$$\delta W = \sum_i x_i \, d\xi_i$$

I. főtétel, updated version

$$dU = \sum_{i=1}^{N} x_i \, d\xi_i + \delta Q$$

később $\delta Q = T \underbrace{dS}$

entrópia elemi megváltozása

2016. 09. 27.

Tapasztalati hő, fajhő, molhő

Tap. szerint: $\delta Q = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hőkapacitás}}}{K}\, dT$ közölt hő a hőm. vált.

$$K = \underset{\text{fajhő}}{c} \cdot \underset{\text{tömeg}}{m} = \underset{\text{molhő}}{C} \cdot \underset{\text{anyagmennyiség}}{n}$$

Folyamatfüggőek: $K = \frac{\delta Q}{dT}$ (nem matematikai jelölés)

$$c = \frac{1}{m}\frac{\delta Q}{dT}$$

$$C = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT}$$

Spec. esetek: C_v: $V = \text{áll}$

C_p: $p = \text{áll.}$

Ha $V = \text{áll.}$

$$dU = \delta W + \delta Q \quad \leftarrow \quad \delta W = -p\,dV = 0$$

$$dU = \delta Q \triangleq C_v\, n\, dT$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \underbrace{dV}_{0} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

$$C_v n\, dT = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

$$C_v = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Ha $p = \text{áll.}$

$$\delta Q \triangleq C_p\, n\, dT$$

$$\delta Q = dU + p\,dV$$

$$\delta Q = dH(p = \text{áll})$$

$$\delta Q = dH(p = \text{áll}) = C_p\, n\, dT$$

$$C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

új fizikai mennyiség:

$$H \triangleq U + pV$$

entalpia

$$dH = dU + p\,dV + V\,dp$$

$$dH(p = \text{áll.}) = dU + p\,dV$$

$$dH(p,T) = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp}_{0}$$

2016. 03. 27.

A kett fajhő kapcsolata

$$C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \qquad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

<u>I. főtétel:</u> $\delta Q = dU + p\,dV = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV + \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT}_{n C_V dT}$

$$\delta Q = n C_p \, dT$$

tekintsük $V = V(p,T)$

$$dV = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp}_{p = \text{áll.} \to 0} + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT$$

$$\delta Q = dU + p\,dV = \left(\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + n C_V\right) dT =$$

$$= n C_p \, dT$$

$$n(C_p - C_V) = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

β_p = izobár hőtágulási eh. $\triangleq \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ = izoterm kompresszibilitási eh.

$$C_p - C_V = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\beta_p V$$

$pV = nRT$, $U(T) = \frac{f}{2} nRT$

$dU_V = n C_V dT$

$dU_p = \underbrace{n C_p \, dT}_{\delta Q} - p\,dV = (n C_p - nR)\, dT$

ezért $dU_V = dU_p$ (ha dT azonos)

$$nC_V = nC_p - nR \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V \cdot n \longrightarrow C_V = \frac{f}{2}R$$

$$C_p = \frac{f+2}{2}R$$

$$\frac{C_p}{C_V} \triangleq \gamma = \frac{f+2}{f} > 1$$

fajhőhányados

Általános képlet ideális gázra

$$C_p - C_V = \frac{1}{n}(0 + p)\beta_p V = R$$

$$\beta_p = \frac{nR}{pV}$$

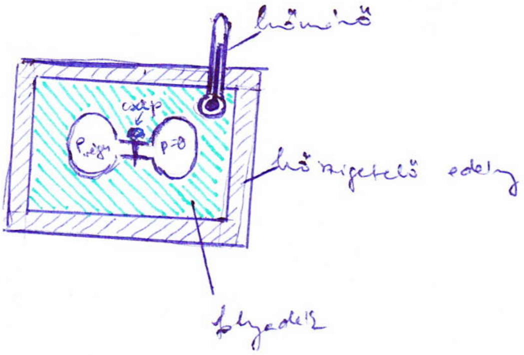
Fajhő és fajhőhányados

$$C_V = \frac{f}{2}R, \quad C_p = \frac{f+2}{2}R, \quad \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$$

Kapcsolat a mikroszkópikus tulajdonság (f) és mérhető fizikai mennyiségek között.

2016. 03. 27.

Gay - Lussac - kísérlet



a csap kinyitásakor a tapasztalat szerint a folyadék hőmérséklete nem változik (nincs térf. munkavégzés, mert a gáz „vákuumba tágul".)

eszerint nincs hőközlés

$$\delta W = \delta Q = 0$$

a belső energia is állandó

$$U = U(T) \quad \text{csak } T\text{-függő}$$

az ideális gáz koncepciójának megalapozása

$(U = U(T) \triangleq$ ideális gáz$)$

Gay - Lussac kísérlet van der Waals - gázra

$$U_{vdW} = U_{id} + U_{kh} = nC_V T - \frac{an^2}{V}$$

$$dU = \delta Q + \delta W = 0 \quad \longrightarrow \quad U = \text{áll.}$$

$$U_1 = U_2 \quad \longrightarrow \quad nC_V T_1 - \frac{an^2}{V_1} = nC_V T_2 - \frac{an^2}{V_2} \quad /:n$$

$$T_2 - T_1 = \frac{an}{C_V}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$V_2 > V_1 \quad \Rightarrow \quad T_2 < T_1 \quad \text{lehűlés}$$

2016. 10. 04.

Ismétlés:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

$$\delta W_{mech} = -p\,dV \qquad W = -\int_A^B p(V)\,dV$$

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{x_i}_{\text{intenzív}}\, d\underbrace{\xi_i}_{\text{extenzív}}$$

$$c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p, \quad \text{ahol} \quad H = U + pV \quad \text{(entalpia)}$$

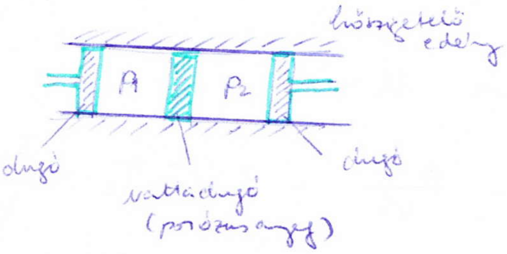
$$c_p - c_V = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\beta_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Gay-Lussac: gáz tágul, p is változik, U = áll. és T = áll. $\rightarrow$ $U = U(T)$
ideális gáz definíciója

Joule-Thomson-kísérlet



a bal oldal V_1-ről 0-ra változik

a jobb oldal 0-ról V_2-re változik

„precízebb Gay-Lussac"

p_1 és p_2 állandó, lassan mozgó dugattyúk segítségével fenntartható

$$dU_1 = -p_1\,dV$$

$$U_{vég} - U_{kezd} = -\int_{V_1}^{0} p_1\,dV - \int_0^{V_2} p_2\,dV = p_1V_1 - p_2V_2$$

$$U_{vég} + p_2V_2 = U_{kezd} + p_1V_1 \qquad U_{vég} \neq U_{kezd}$$

H = const. a Joule-Thomson-kísérletnél.

$$H = H(p,T)$$

Tétel: entalpia teljes diff.

$$dH \neq 0 = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}_{n \cdot c_p} dT$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H}_{\mu_{JT}} = -\frac{1}{nC_p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

μ_{JT} = Joule-Thomson-eh. = egységnyi nyomásvált.-ra bekövetkező hőm. vált.

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

- ha $\mu_{JT} > 0$ p csökken, tágulva hűl
- ha $\mu_{JT} < 0$ p nő, összenyomva hűl
- ideális gázra: $\mu_{JT} = 0$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jön}}}{=} V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

van der Waals-gáz: $\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ / implicit $\rightarrow \frac{\partial}{\partial T}$ deriválás, p = áll

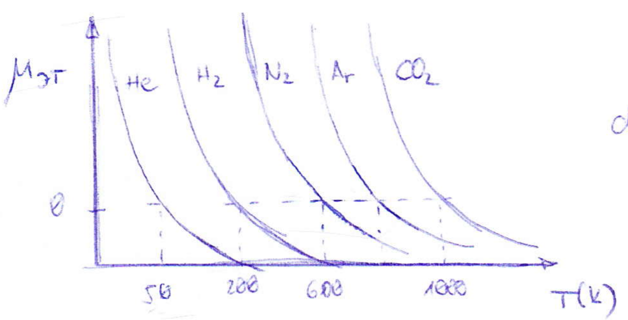
$$-\frac{2an^2}{V^3}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p (V-nb) + \underbrace{\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)}_{\frac{nRT}{V-nb}}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = nR$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{n \cdot R}{\frac{nRT}{V-nb} - \underbrace{\frac{2an^2}{V^3}(V-bn)}_{\frac{2an^2}{V^2}}}$$

V-hez képest

/ elhanyagolhatóság, ill. $V \gg b$ („híg gáz") és $RT \gg an^2/V$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$
ha x kicsi



$$dT \approx \frac{dp}{c_p}\left(\frac{2a}{RT} - b\right)$$

/ $a, b > 0$, $dp > 0$
ha $\underbrace{2a/RT - b}_{} < 0 \rightarrow dT < 0$ lehűl

inverziós hőm. $\rightarrow T_i = \frac{2a}{Rb}$

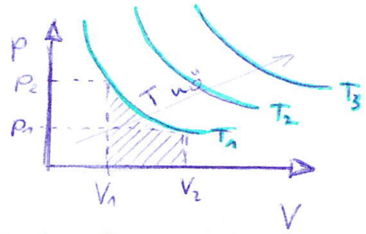
$\hookrightarrow$ T_i nagy, ha b kicsi (kohéziós erő)

alkalmazás: gázok cseppfolyósítása

2016. 10. 04.

Ideális gáz állapotváltozásai

- kvázisztatikusnak a folyamatok
- reverzibilisek a folyamatok



izoterm

$pV = nRT$

$T = \text{áll} \longrightarrow p(V) = \frac{\text{áll.}}{V} = \frac{nRT}{V}$

$U = \frac{f}{2} nRT = \text{áll.}$

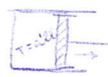
$W_{1\to 2} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = -nRT\left[\ln(V)\right]_{V_1}^{V_2} =$

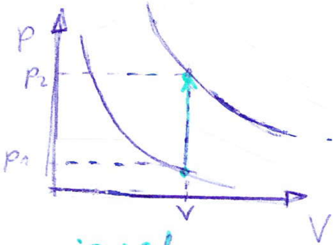
$= nRT \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$

$\Delta U = 0 = W + Q$

$Q = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

ha tágul $V_2 > V_1 \rightarrow W < 0$,
hőt közlünk $\rightarrow$ munkavégzés





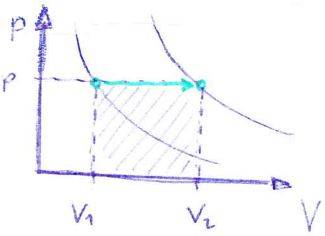
izochor

$V = \text{áll.}$

$W = 0$

$Q = U_2 - U_1 = n C_v (T_2 - T_1)$

$\Delta U = n C_v \Delta T$
ha $V = \text{áll.}$



izobár

$p = \text{áll.}$

végzett munka: $W = -p(V_2 - V_1)$
ha tágul $W < 0$

felvett hő: $\Delta U = W + Q$

$Q = \Delta U - W = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1) =$

$= (U_2 + pV_2) - (U_1 + pV_1) =$

$= H_2 - H_1 = \Delta H$

$Q = \Delta H = n C_p (T_2 - T_1)$

Adiabatikus

$$\delta Q = 0 \rightarrow \text{elemi folyamatra}$$

$$dU = -pdV$$

$$nC_v dT + pdV = 0 \qquad \text{ideális gáz: } p = \frac{nRT}{V}$$

$$nC_v dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 \qquad /:T$$

$$nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0 \qquad \text{adiabata egyenlet}$$

$$T(V) = ?$$

$$nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0 \qquad \text{és} \qquad R = C_p - C_v$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \qquad / \int \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$$

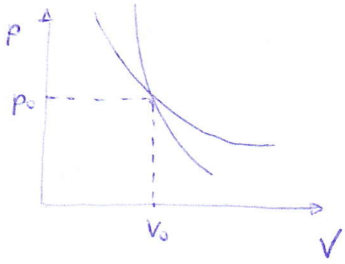
$$\ln(T) + \ln(V^{\gamma-1}) = \text{const.}$$

$$\ln(TV^{\gamma-1}) = \text{const.}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

$$pV^{\gamma-1} = \text{const.}$$

Adiabata vs. izoterma meredeksége



$p_0V_0 = C_1$ izoterma

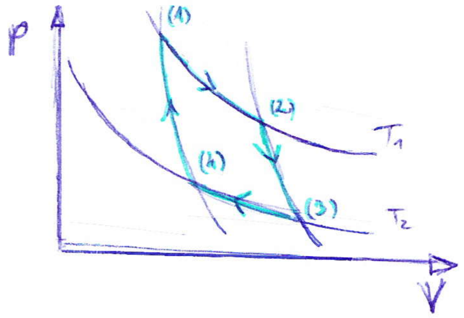
$p_0V_0^{\gamma} = C_2$ adiabata

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{izoT.} = -\frac{C_1}{V^2} = -\frac{p}{V}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{adia} = -\gamma \frac{C_2}{V^{\gamma+1}} = -\gamma \frac{p}{V}$$

az adiabata meredekebb

Carnot - körfolyamat



$(1) \to (2)$	$Q > 0$	hőt közlünk, $W < 0$ gáz munka
$(2) \to (3)$	$Q = 0$	kis tágulás, lehűl
$(3) \to (4)$	$Q < 0$	hőt ad le, összenyomjuk
$(4) \to (1)$	$Q = 0$	összenyomjuk, melegszik

$$\Delta U_{körf} = 0$$

$$Q_1 = Q_{12} = -W_{12} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$$

$$Q_{23} = 0 \quad \text{és} \quad W_{23} = U_3 - U_2 = nC_V(T_2 - T_1) < 0$$

$$Q_2 = Q_{34} = -W_{34} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) < 0$$

$$Q_{41} = 0 \to W_{41} = nC_V(T_1 - T_2) > 0$$

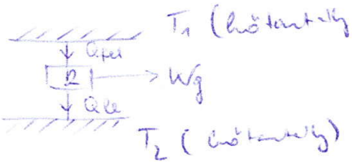
A gáz által végzett munka:

$$W_g = -W$$

$$W_g = -W_{12} - W_{23} - W_{34} - W_{41} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

$$W_{41} = -W_{23} \quad \text{mivel } \Delta U = 0$$

$$W_g = Q$$ a felvett nettó hő munkává alakul

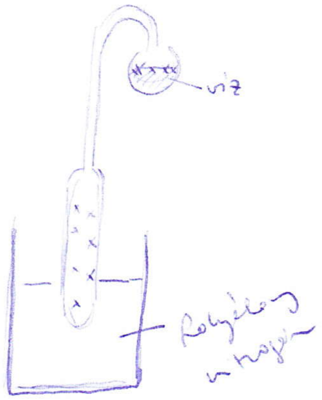


$$Q = Q_{fel} - Q_{le}$$

Hatásfok $$\eta \triangleq \frac{W_g}{Q_{fel}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1$$ $(Q_2 < 0$ és $|Q_2| < Q_1)$

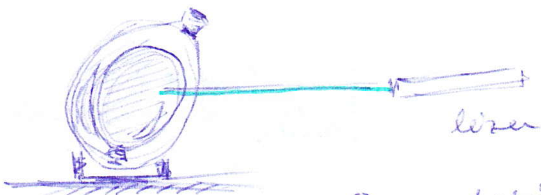
2016. 10. 04.

Kísérletek:

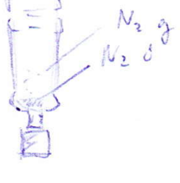


az alsó tartályban lehűlt a vízgőz (megfagy), így nyomáskülönbség alakul ki a két tartály között
a felső tartályból a nagyobb energiájú részecskék „leválasztódnak" (párolgás), a kisebb energiájúak pedig megfagynak

hőáram



← a belső kipukkan



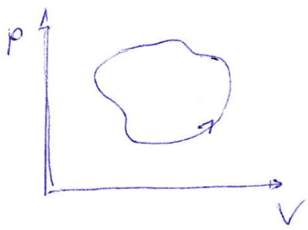
1. dugót tolná a gáz
2. a nagyfolyós nitrogén löki meg a palackot
3. a nitrogéngáz löki.

2016. 10. 11

Ismétlés:

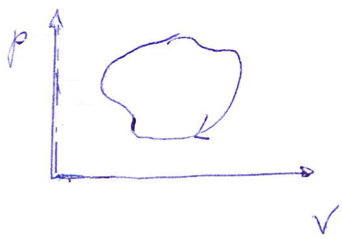
izochor,	izobár,	izoterm,	adiabatikus (izentrópikus)
$V=$ áll	$p=$ áll	$T=$ áll	$Q=0$
$W=0$	$Q=H_2-H_1=$	$U=$ áll	$\Delta U=W$
	$=nC_p(T_2-T_1)$		$TV^{\gamma-1}=$ áll
			$pV^{\gamma}=$ áll

Körfolyamatok:

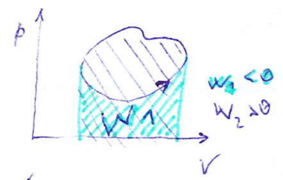


$$\Delta U_{körf}=0$$

$$Q=-W$$

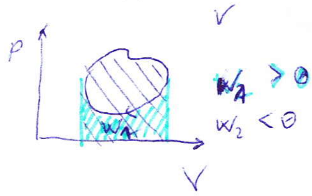


$$W_{A\to B}=-\int_A^B p(V)\,dV$$



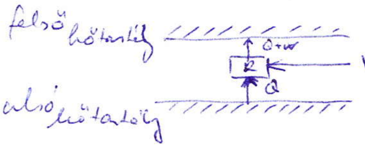
$W=W_1+W_2>0$

hűtőgép



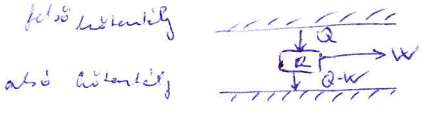
$W=W_2+W_1<0$

hőerőgép



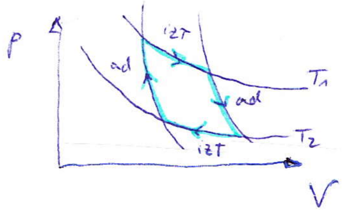
hűtőgép

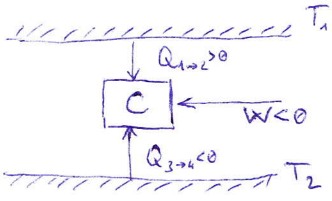
szemléletes, de nem precíz ábra



hőerőgép

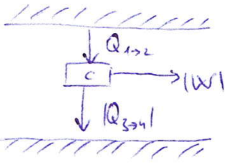
Carnot-körfolyamat





hőerőgép

abs. értékkel



C mint Carnot

$$Q_{1\to2}=nRT_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)>0$$

$$Q_{3\to4}=nRT_2\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)<0$$

$$W=-Q=-Q_{1\to2}-Q_{3\to4}<0$$

$$|Q_{12}|>|Q_{3\to4}|$$

$$W_g\triangleq -W>0$$

2016. 10. 11.

<u>hatásfok</u>:

$$\eta \triangleq \frac{W_g}{Q_{felső}} = \frac{W_g}{Q_{1\to 2}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} =$$

$$= 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} < 1$$

$$\eta = 1 + \frac{nRT_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)}{nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \longrightarrow 0 < \eta < 1$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad (I)$$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (II)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \quad \left(\frac{II}{I}\right)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

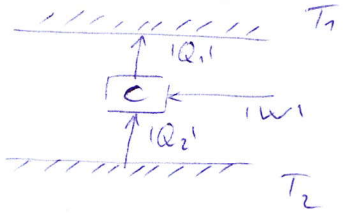
$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1} \longrightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

a redukált hők összege Ø a Carnot-körfolyamatban.

2016. 10. 11

Fordított Carnot - körfolyamat



Hőszivattyú teljesítmény-tényező

$$K_{sz} = \frac{|Q_1|}{W_g} = \frac{1}{\eta} > 1$$

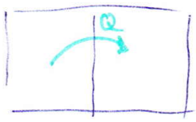
$$K_{sz} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1$$

2016. 10. 11.

A hőtan II. főtétele

Megfigyelések

- a meleg tárgy lehűl a környezet hőmérsékletére
- meleg + hideg tárgy → a hideg melegszik és fordítva
- a tinta szétterjed a vízben
- a tárgyak leejtve széttörnek, feldobva állnak össze a darabból
- pl. asztalon pattogó golyó megáll → a mech. energia átalakul hővé



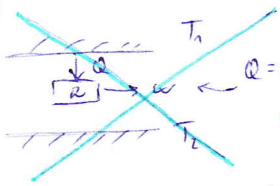
$T_1 > T_2$

$$\underbrace{\sum_i \frac{Q_i}{T_i}}_{\text{ad-hoc módon}} = \frac{-Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = -Q\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right) > 0$$

a redukált hők előjeles összege ebben a folyamatban szigorúan pozitív!

Négy ekvivalens megfogalmazás

- Carnot: Nem lehetséges egy testtel hőt közölni úgy, hogy azt teljesen munkává alakítja leadott hő nélkül.



ilyen ∄

- Thomson (lord Kelvin): nincs olyan, hogy egy rendszer hőmérséklete csökken, és az elvesztett energia munkává alakul.

2016. 10. 11.

- Clausius: Nincs olyan folyamat, ami csak abból áll, hogy hő megy a hidegebb helyről a melegebbre.
- Planck: $\eta < 1$ Egy hőerőgépként funkcionáló körfolyamat hatásfoka 1-nél kisebb.
  $\nexists$ másodfajú perpetuum mobile (örökmozgó)
  Elsőfajú lenne $\eta > 1$
  másodfajú $\eta = 1$

Megjegyzés: II. főtétel $\triangleq$ folyamatok iránya
pl. videó lejátszás

$\triangleq$ energia szétszóródás

I. főtétel $\triangleq$ mely folyamatok mehetnek végbe

II. főtétel $\triangleq$ mely folyamatok mennek valóban végbe

Carnot-tétele: Két hőtartály között működő reverzibilis hőerőgép hatásfoka maximális,
és anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől független

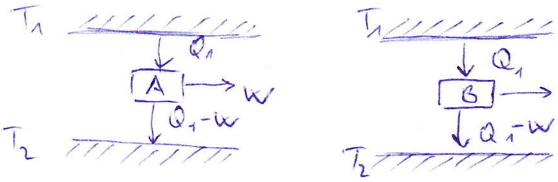
ezzel ekvivalens: minden két azonos hőtartály között működő reverzibilis hőerőgép hatásfoka egyenlő, anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől független.

THE 2ND LAW

2016. 10. 11.

Állítás: A Carnot-körfolyamat is ilyen reverzibilis, maximális hatásfokú folyamat.

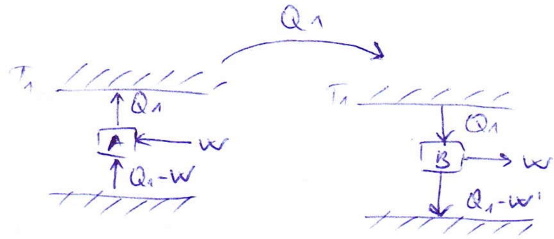
Biz.: indirekt módon; tfh $\eta_B > \eta_A$



legyen az A egy hőszivattyú, ami a B-t meghajtja,

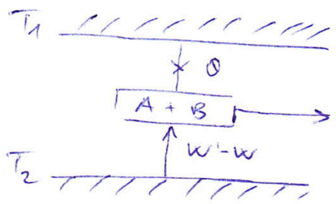
B hőerőgép

$$\eta_A = \frac{W}{Q_1} \qquad \eta_B = \frac{W'}{Q_1}$$



$$W' - W = \eta_B Q_1 - \eta_A Q_1 =$$
$$= Q_1(\eta_B - \eta_A) > 0$$

A teljes rendszer:



↯ II. főtétel Carnot/Thomson-megfogalmazásának ellent mond!

$\Rightarrow$ két azonos hőtartály között működő hőerőgép hatásfoka azonos $= \eta_{Carnot}$

2016. 10. 11.

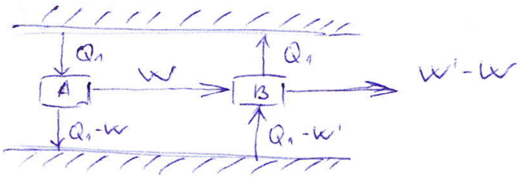
Állítás: a Carnot-körfolyamat hatásfoka anyagi minőségtől független.

Biz.: indirekt módon,
tekintsünk két Carnot-körfolyamatot azonos
T_1 és T_2 között

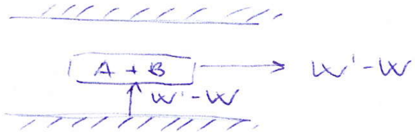
A: ideális gáz (η_c) $\longrightarrow$ $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ (is known)

B: valami más (η_B)

$\eta_B < \eta_c$



eredő:



$W' - W \leq 0$ a II. főtétel alapján

ha megfordítjuk

$W - W' \leq 0$ a II főtétel alapján

a kettőből

$W - W' = 0$

$W = W'$

Termodinamikai hőmérsékleti skála

Carnot-ra: $\eta_c = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$

ebből $\longrightarrow$ kontinuálható anyagi minőségtől független hőmérsékleti skála

Recept: végezzünk Carnot (-hőerőgép)-folyamatot T_f és T_0 között

forró víz (T_f)

olvadó víz-jég keverék (T_0)

itt megmérjük η_0-t és 100 részre osztjuk

$T_f - T_0 = 100$ egys.

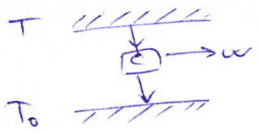
$\longrightarrow \eta_0 = \dfrac{T_f - T_0}{T_f}$ és $\eta_0 = 0{,}268$ is known

innen: $T_0 = 273{,}15\ K$

$T_f = 373{,}15\ K$

Ismeretlen T hőmérséklet mérése

pl. $T > T_0$



η_T-t mérjük

$$T = \frac{T_0}{1 - \eta_T} > T_0$$

és ha $T < T_0 \longrightarrow T = T_0(1 - \eta_T)$

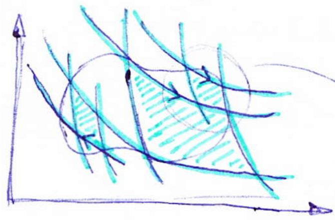
Megj. 1. inkább elvi

2. jön: a 0-t jobban meg lehet adni víz hármaspontja

AZ ENTRÓPIA

Carnot-ra: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

Tekintsünk egy általános folyamatot:



Közelítsük Carnot-val, sűrítve:

közös belső izoterma (T_{fix})

a belső izotermákon a hők összege = 0 (közös izoterma)

<u>Általános reverzibilis körfolyamatra</u>

$$\oint \frac{\delta Q^{rev}}{T} = 0$$

konzervatív erőtér

Clausius: a redukált hő egy állapotfüggvény teljes differenciálja

pl. $\nabla U = -\vec{F}$

$\nabla \phi = -\vec{E}$

ez az entrópia

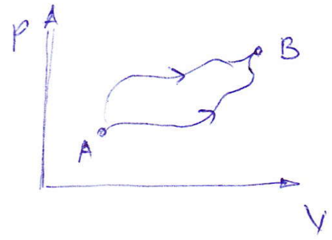
$$dS \triangleq \frac{\delta Q^{rev}}{T}$$

$$\delta Q^{rev} = T\,dS$$

folyamatfüggő — teljes differenciál

Következmény:

véges reverzibilis folyamatra



útfüggetlen:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q^{rev}}{T} = \int_A^B dS$$

S tulajdonságai: extenzív (két rendszerre közölt hő additív)

$$S = \text{áll.} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{izentropikus} \\ \text{adiabatikus} \end{matrix} \right\} \text{folyamat}$$

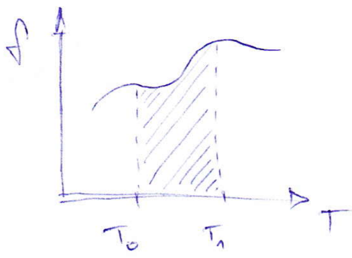
S: állapotjellemző, tetszőleges reverzibilis folyamatra megadható

$$S(T_1) = S(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} \frac{\delta Q^{rev}}{T} = S(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} \frac{C^{rev}(T)}{T} dT = S(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} f(T)\, dT$$

C^{rev}: fajhő egy adott folyamatra

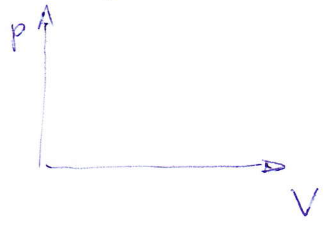
$f(T) = \frac{C^{rev}(T)}{T}$

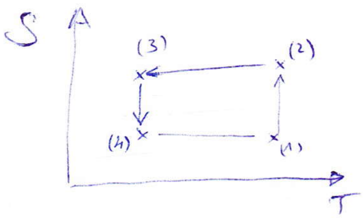
S az f primitív fgv.-e



$$\int f = S$$

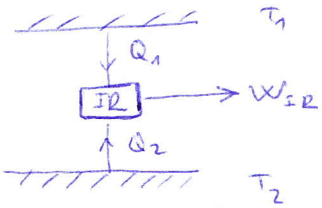
S-T diagramon a Carnot-folyamat

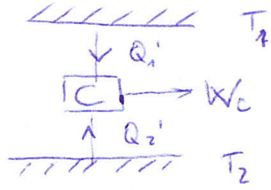




2016. 10. 18.

Irreverzibilis folyamatok és entrópia





irreverzibilis körfolyamat

$W_{IR} = Q_1 + Q_2$

Carnot-körfolyamat

$W_C = Q_1' + Q_2'$

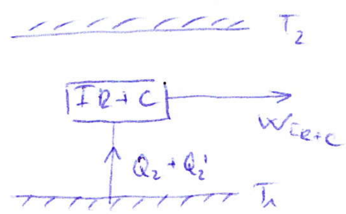
Összekötjük őket, $\Delta U = 0$

$Q_1' = -Q_1$

Carnot-ra: $\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} = 0$

$$W_{IR+C} = Q_1 + Q_2 + \underset{= -Q_1}{Q_1'} + \underset{= -Q_1' \frac{T_2}{T_1}}{Q_2'} = Q_2 + Q_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$W_{IR+C} = Q_2 + Q_1 \frac{T_2}{T_1}$$



II. főtétel alapján

$W_{IR+C} \le 0$

$$W_{IR+C} \le 0 \iff Q_2 + Q_1 \frac{T_2}{T_1} \le 0$$

$$T_2 \underbrace{\left(\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \right)}_{\text{irreverzibilis folyamat redukált hője}} \le 0 \qquad T_2 > 0$$

= ha reverzibilis

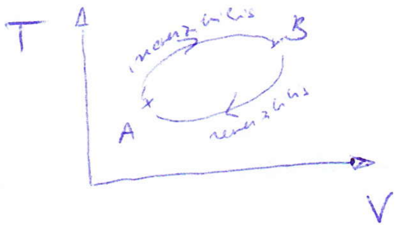
< ha szigorúan irreverzibilis

Általánosan

$$\oint \frac{đQ}{T} \le 0 \qquad \left(\oint \frac{đQ^{rev}}{T} = 0 \right)$$

Clausius-egyenlőtlenség

Négyes reverzibilis folyamatra



ha ∃ irreverzibilis része a folyamatnak
⇒ egész folyamat irreverzibilis

$$\oint \frac{\delta Q^{irrev}}{T} < 0$$

$$\int_A^B \frac{\delta Q^{irrev}}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q^{rev}}{T} < 0$$

$$\Rightarrow \int_A^B \frac{\delta Q^{irrev}}{T} < S_B - S_A$$

Clausius - egyenlőtlenségek

azaz a II. főtétel matematikai alakja

I. $$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

II. $$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq S_B - S_A$$

III. $$\frac{\delta Q}{T} \leq dS$$

levezetés a II.-ből $\frac{\delta Q}{T} \leq dS$

„beléderiválunk"
– Moson Péter

2016. 10. 18.

Következmény: Reverzibilis folyamatban csak hőcserével változhat az entrópia.

Irreverzibilis folyamatban:

$$\delta Q^{irrev} < T\,dS$$

$\Rightarrow \exists$ entrópiaprodukció $dS^{prod} > 0$

Második főtétel felírása így:

$$dS = dS^{prod} + \frac{\delta Q}{T}$$

zárt rendszerre:

$$\delta Q = 0 \Rightarrow dS = dS^{prod}$$

ebből véges folyamatok

$$\underbrace{S_B - S_A \geq \underbrace{\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = 0}_{\text{zárt rsz.}}}_{\text{Clausius}}$$

az entrópia nem csökkenhet spontán folyamatokban

Ez az ún. entrópia-növekedési tétele.

Disszipáció

Egy zárt rsz. egyensúlyban van, ha az entrópia maximális.

pl. ◦ „hőhalál" $\rightarrow$ nincsenek gradiensek, homogén hő van mindenhol

◦ fekete lyuk entrópiája

◦ reversible computing (Landauer; információs entrópia: 1 bit információ törléséhez $k_B \cdot \ln(2)$ energia kell)

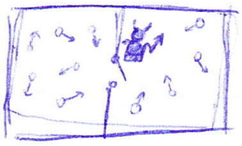
kvantumszámítógépek

Mai számítógép hatékonysága

proci $\underset{J/s}{10\,W} \leftrightarrow 10\,GFlop \approx 10^{10}\,\frac{byte}{sec} \approx 10^{11}\,\frac{bit}{sec}$

$10^{11}\,\frac{bit}{sec}\;10^{-23}\,\frac{J}{K}\;300K \approx 10^{-9}\,\frac{J}{sec} \longrightarrow$ a fizikai limitnél 10 nagyságrenddel rosszabbul használja az energiát

Maxwell-démon



nyitja az ajtót a gyors részecskék előtt
zárja —— " —— lassú —— " ——

nagyon sok információt kell tárolnia

A HŐTAN FUNDAMENTÁLIS EGYENLETE

I. főtétel $dU = \delta Q + \delta W$

rev. folyamatra: $TdS = \delta Q^{rev}$

$-pdV = \delta W$

ebből: $dU = TdS - pdV$ jó irreverzibilisre is!

Meglepő, hogy δ-ból d lesz

külön-külön ált. irreverzibilis folyamatra $\delta Q^{irr} \neq TdS$

$\delta W^{irr} \neq -pdV$ mégis!

együtt igaz!

$$dU = TdS - pdV$$

ha van anyagi munkavégzés is

$$dU = TdS - pdV + \mu dn$$

általános munkavégzésre:

$$dU = TdS + \sum_{i=1}^{n} x_i d\xi_i$$

2016. 10. 18.

$$T\,dS - p\,dV = đQ + đW$$

$$dS = dS^{prod} + \frac{đQ^{rev}}{T}$$

tekintsük az irreverzibilis munkavégzést, pl. súrlódás

$$đW = -p\,dV + đW^{irr}$$

$$đQ = T\,(dS - dS^{prod})$$

$$T\,dS - p\,dV = T\,dS - T\,dS^{prod} - p\,dV + đW^{irr}$$

$$\rightarrow \quad T\,dS^{prod} = đW^{irr}$$

vagy $dS^{prod} = \frac{đW^{irr}}{T}$ az irreverzibilis munkavégzés entrópiát hoz létre.

AZ IDEÁLIS GÁZ ENTRÓPIÁJA

$$dU = TdS - pdV$$

$$0 = dU - TdS + pdV$$

$$dS = \frac{1}{T}\, dU + \frac{p}{T}\, dV$$

ideális

$$dU = n\, C_v\, dT$$

$$U = U(T)$$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

$$dS = n\, C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$\rightarrow$ $S = S(T,V)$ felírható

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{nC_v}{T}$$

mert $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{nR}{V}$$

$S_B - S_A = \int_A^B dS$ $\longrightarrow$ eredeti T_0, V_0

adódik: $S(T,V) = S_0(T_0, V_0) + nC_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$$S(p,V) = S_0(p_0, V_0) + nC_v \ln\left(\frac{p}{p_0}\frac{V}{V_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) =$$

$$= S_0(p_0, V_0) + nC_v \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + nC_p \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$S(p,T) = S_0(p_0, T_0) - nR \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + nC_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

Entrópiaváltozás a G-L-kísérletben

$V_1 \longrightarrow V_2$ tágul $\quad \Delta U = 0 \quad \Delta T = 0$

$W = 0$

$p_1 \longrightarrow p_2$ csökken $\quad Q = 0$

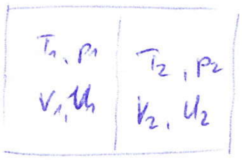
$$S_1(T, V_1) = S_0(T_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

$$S_2(T, V_2) = S_0(T_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0,$$

mert $V_2 > V_1$.

Entrópiaváltozás kiegyenlítődési folyamatok



mech. munkavégzés + hőcsere

Entrópiaváltoz.:

$$dS_1 = \frac{1}{T_1}dU_1 + \frac{p_1}{T_1}dV_1$$

izolált rendszer $dU = 0$

$$dS_2 = \frac{1}{T_2}dU_2 + \frac{p_2}{T_2}dV_2$$

$$dU_1 + dU_2 = 0$$

$$dU_1 = -dU_2$$

$$dV_1 = -dV_2$$ teljes térf. áll.

teljes entrópiaváltozás

$$dS = dS_1 + dS_2 = dU_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) + dV_1\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)$$

2016. 10. 18.

Belső energia térfogatfüggése

$$U = U(T,V) \longrightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$dS = \frac{1}{T}\,(dU + p\,dV)$$

$$S = S(T,V) \longrightarrow dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \frac{p}{T}\,dV$$

I. $$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

II. $$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}$$

$$\frac{\partial(\mathrm{I})}{\partial V} = \frac{\partial(\mathrm{II})}{\partial T} \qquad \text{mert} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \qquad \text{Young-tétel}$$

$$\frac{1}{T}\,\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{1}{T}\,\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{1}{T^2}\,p + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

2016. 10. 25.

Fundamentális egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} dU &= TdS - pdV \\ dU &= \delta Q + \delta W \end{aligned}\right\} \text{ együtt igaz}$$

$$dS = \frac{1}{T}(dU + pdV)$$

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{1}{T}\sum_i x_i d\xi_i$$

Entalpia: (volt, de jön még)

$$H = U + pV$$

$$dH = dU + pdV + Vdp = TdS - pdV + pdV + Vdp$$

$$dH = TdS + Vdp$$

$$dS = \frac{1}{T}(dH - Vdp) \quad \text{és} \quad H = H(p,T)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = ?$$

$$dS = \frac{1}{T}(dU + pdV)$$

$$U = U(T,V) \longrightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

$$S = S(T,V) \longrightarrow dS = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T}pdV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV\right)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - \frac{1}{T^2}p + \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}\frac{1}{T} - \frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}\cdot\frac{1}{T}$$

Innen:

$$\emptyset = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p - \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

<u>Volt</u>:

$$\delta Q_p = n\, C_p\, dT \quad \text{és} \quad \begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W \\ dU &= \delta Q - p\,dV \end{aligned}$$

$$\delta Q = dU + p\,dV \qquad U = U(V,T)$$

$$n\, C_p\, dT = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + p\,dV$$

$$V = V(p,T) \qquad dV = \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp}_{0 \text{ izobár}} + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}_{V\beta_p} dT$$

$$n\,(C_p - C_V)\, dT = dT\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] V\beta_p$$

$$C_p - C_V = \frac{1}{n}\left(p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right) V\beta_p$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$C_p - C_V = \frac{1}{n} V\beta_p \cdot T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

ideális gázra $\quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\frac{p}{T} - p = \emptyset$

2016. 10. 25.

vdW-ra $\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V-nb} = \frac{1}{T}\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)$$

innen $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{an^2}{V^2}$

$$U_{vdW}(T,V) = U_{id}(T) + \int_\infty^V \frac{an^2}{V^2}\,dV = U_{id}(T) - \frac{an^2}{V}$$

gyakorló feladat:

$$dS = \frac{1}{T}(dU - X\,d\xi)$$

áll.: $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_T = -T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_\xi + X$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V T - p$$

$H = H(p,T)$ $\qquad H = U + pV$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

ideális gázra: $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\frac{V}{T} = 0$

$$H_{id} = H_{id}(T)$$

Visszatérve:

$$C_p - C_V = \frac{1}{n} V \beta_p T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Általában: $f(x, y) = \text{const}$

$$\Rightarrow \quad df = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

kétdimenziós skalárfgv. kontúr- vonalán vett derivált

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{f=\text{const}} = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}$$

$$V = V(p, T) \qquad y := p \quad x := T \quad f = V(p, T)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = - \frac{V \beta_p}{(-V \kappa_T)} = + \frac{\beta_p}{\kappa_T}$$

$$C_p - C_V = \frac{1}{n} V \beta_p T \cdot \frac{\beta_p}{\kappa_T} = \frac{V \beta_p^2 T}{n \kappa_T}$$

Ideális gázra: $\beta_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}$

$$\kappa_T = - \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{nRT}{p^2 V} = \frac{1}{p}$$

$$C_p - C_V = \frac{1}{n} V T \cdot \frac{1}{T^2} \frac{p}{1} = \frac{pV}{Tn} = R$$

2016. 10. 25.

Entrópia statisztikus értelmezése

A rendszernek ∃ egyensúlyi állapota

Boltzmann-hipotézis: az egyensúly a legvalószínűbb állapot.
⟶ ebből minden mérhető mennyiség megkapható
⟶ a tapasztalattal összevethető

Új fogalmak: ∘ makroállapot: makroszkópikus állapotjelzőkkel jellemzett állapot $(p, V, n, T, ..)$
∘ mikroállapot: a részecskék összességét jellemző $(\vec{r}, \vec{p})$ állapotok sokasága

adott makroállapotot sok különböző mikroállapot valósíthat meg

Boltzmann-hipotézis másképp: az a makroállapot valósul meg, amit a legtöbb mikroállapot hozhat létre.

Entrópia a Boltzmann-elv alapján

II. főtétel ⟶ S maximális egyensúlyban

W = mikroállapotok száma

∘ S a W monoton függvénye ⟺ Boltzmann-hipotézis
∘ S egy extenzív mennyiség, alrendszerekre additív $(S = S_1 + S_2)$
∘ a két alrendszerben W_1 és W_2 a mikroállapotok száma

W az egyesített rendszerben?

$W = W_1 \cdot W_2$

2016. 10. 25.

Statisztikai megfontolás:

$S \triangleq g(W)$ g-t keressük és $S = S_1 + S_2$

$$g(W) = g(W_1) + g(W_2) = g(W_1 \cdot W_2)$$

függvényegyenlet

ún. additív függvénytulajdonság megoldása ln

inverze $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ún. multiplikatív fgv-egyenlet

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

Boltzmann-hipotézis: $S \sim \ln W$

$$S = k_B \ln(W) \qquad k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

Gibbs-féle entrópia formula

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i)$$

$p_i = \{$i-edik mikroállapot valószínűsége$\}$

Gibbs $\Longleftrightarrow$ Boltzmann

ha S megvan → termodinamikai változók származtathatók

$$dS = \frac{1}{T}(dU + p\,dV) \longrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T} \text{ és } \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}$$

Következmény: a hőtani folyamatok nem abszolútak, hanem véges valószínűséggel mennek végbe

Kitekintés:
- kvantummechanika (klasszikusan elbontható vagy sem? valódi valószínűségi folyamat)
  → Einstein: „Isten nem kockázik" (∃ rejtett változók) → cáfolat: Bell-egyenlőtlenség
- Káoszelmélet, komplex rendszer jövője nagyon függ a kezdeti feltételektől
  → Laplace-féle determinisztikus világ

2016. 10. 25.

Gay-Lussac-kísérlet:

$V_1 \rightarrow 2V_1$-re tágul p (annak a valószínűsége, hogy visszamegy) =?

$$\Delta S = S_2 - S_1 = N k_B \ln\left(\frac{2V_1}{V_1}\right), \text{ illetve } \Delta S = k_B\left(\ln(W_2) - \ln(W_1)\right)$$

$$k_B \ln\left(\frac{W_2}{W_1}\right) = N k_B \ln 2$$

$W_2 \gg W_1$ a végállapotnak több mikroállapota van

$$W_2 = W_1 \cdot 2^N = W_1 \cdot 2^{6 \cdot 10^{23}}$$

Másik példa: mennyi a valószínűsége, hogy egy porszem spontán módon a környezetéhez képest egy mK-t hűl?

1 db porszem 1 pg, 1 mK, 300 K-en

$$\delta Q = m c \Delta T = 1\,\text{nJ}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = -\frac{\delta Q}{T_1} + \frac{\delta Q}{T_2} = k_B \ln\left(\frac{W_2}{W_1}\right)$$

$$\Delta S = 10^{-17}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} = 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \ln\left(\frac{W_2}{W_1}\right)$$

$$W_2 = W_1\, e^{10^6}$$

Statisztikai modellek

Sztárgmodell[?]

N db részecske

$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{N_1\ N_2\ \dots}\ \dots\ \underbrace{\boxed{}}_{N_\ell}$

ℓ db megkülönböztetett helyen részecske hogy [felcserélgetni] lehet berakni?

$$W = W(N_1, N_2, \dots, N_\ell) = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\,\dots\,N_\ell!}$$ Ismétléses permutáció

W maximumát keressük úgy, hogy $\sum_{i=1}^{\ell} N_i = N$ – kényszerfeltétel

$\ln W$ maximuma: (mert $\ln$ szig. mon.)

$$\ln N! = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln(N) + N\ln N + N \approx N\ln N - N$$

ha N nagy

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$$ Stirling-formula

Kényszer kezelése

max $f(x,y)$-t keressük, ha $g(x,y) = c$

$$\Lambda(x,y) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - c)$$

segédfgv.

és $\exists$ olyan x_0, y_0, λ_0, amire $f(x,y)$ szélsőértéke van és szükséges feltétel

$$d\Lambda(x,y,\lambda) = 0 \qquad \underbrace{\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\right)_{x,y} = g(x,y) - c}_{} = 0$$ kényszer!

$$d\Lambda = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)_{y,\lambda} dx + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)_{x,\lambda} dy + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\right)_{x,y} d\lambda = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)_{y,\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \text{ és } \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial y}\right)_{x,\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$$

legyen $W(N_1, N_2, \dots, N_\ell)$

Legyen $w(N_1, N_2, \dots, N_\ell)$

$$\Lambda(N_1, N_2, \dots, N_\ell) = \ln w(N_1, N_2, \dots, N_\ell) + \lambda\left(\sum_i N_i - N\right)$$

ℓ db független változó

A szükséges feltétel

$$d\Lambda(N_1, \dots) = 0 = \sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial(\ln(w))}{\partial N_i} + \lambda\right) dN_i = 0$$

$$\ln w = \ln N! - \sum_{i=1}^{\ell} \ln N_i!$$

$$\frac{\partial \ln(w)}{\partial N_i} + \lambda = 0 \quad \forall_i\text{-re} \Rightarrow \frac{\partial \ln(w)}{\partial N_i} = -\lambda \quad \forall\, i\text{-re}$$

$$\frac{\partial \ln(w)}{\partial N_i} = \frac{\partial\left(\ln N! - \sum_{i=1}^{\ell} N_i!\right)}{\partial N_i} = \frac{\partial(-N_i \ln N_i + N_i)}{\partial N_i} =$$

formális deriválás

$$= -\ln N_i - 1 + 1 = -\ln N_i$$

$\Rightarrow$

$$-\ln N_i + \lambda = 0$$

$$N_i = e^{\lambda} \Rightarrow \text{állandó}$$

$\forall N_i$ egyenlő és $N_i = \frac{N}{\ell}$

2016. 11. 08.

Ismétlés:
- makroállapot (p, V, T)
- mikroállapot száma: W

Boltzmann-hipotézis $S = k_B \ln(W)$

mikro- és makroszint közötti kapcs

Gibbs: $$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i)$$

$p_i = \{$i-edik mikroállapot valószínűsége$\}$

Játék-modell

dobozok

1	2	3	...	l
N_1	N_2	N_3		N_l

$$W(N_1, N_2, \dots, N_l) = \frac{N!}{N_1! \dots N_l!}$$

$\ln(W)$ maximumát keressük

$$\Lambda(N_1, N_2, \dots, N_l, \lambda) = \ln(W(N_1, \dots, N_l)) + \lambda\left(\sum_i N_i - N\right)$$

szükséges felt.: $d\Lambda = 0$

$$\frac{\partial \ln(W)}{\partial N_i} + \lambda = 0$$

$$\ln(N!) = N \ln(N) - N$$

$$\ln(W) = N \ln(N) - N - \left(\sum_i N_i \ln(N_i) - N_i\right)$$

$$\frac{\partial \ln(W)}{\partial N_i} = -\ln(N_i) - 1 \approx -\ln(N_i)$$

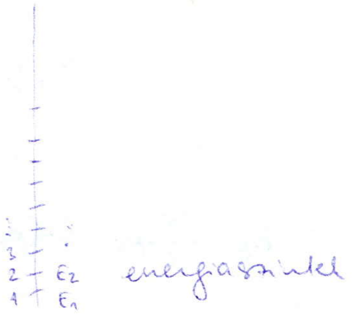
$$\ln(N_i) = \lambda$$

$$N_i = \frac{N}{l}$$

2016. 11. 08.

Dobozok helyett energiaeloszlás (Maxwell-Boltzmann)

i-edikben N_i részecske E_i energiával



két feltétel: $\sum_i N_i = N$

összenergia

$$\sum_i N_i E_i = E \ (= U)$$

$\ln(W)$ maximumát keressük

Definiáljuk: $\Lambda(N_1, \dots, N_e, \lambda_1, \lambda_2) =$

$$= \ln\big(W(N_1, \dots, N_e)\big) + \lambda_1\Big(\sum_i N_i - N\Big) + \lambda_2\Big(\sum_i N_i E_i - E\Big)$$

szükséges: $d\Lambda = 0$

$$\frac{\partial \ln(W)}{\partial N_i} + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0$$

$$\ln N_i = \lambda_1 + \lambda_2 E_i$$

$$N_i = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2 E_i} \longrightarrow N_i = A e^{-\beta E_i}$$

$A = e^{\lambda_1}$

$\beta = -\lambda_2$

$$\sum_i N_i = N = \frac{N}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i}$$

$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ = állapotösszeg

$$N = A \sum_i e^{-\beta E_i}$$

$$A = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta E_i}} = \frac{N}{Z}$$

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

$S = ?$ kapcsolat a mikro- és makrovilág között

$$\ln W = N \ln N - N - \sum_i (N_i \ln N_i - N_i)$$

(I) $\ln W = \ln\left(\frac{N!}{N_1! \ldots N_k!}\right)$

(II) $N_i \ln N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta \varepsilon_i} \left(\ln - \ln Z - \beta \varepsilon_i \right)$

$$\sum_i N_i \ln(N_i) = N \ln(N) - N \ln(Z) - \beta E$$

(I) $\ln W = N \ln(N) - N \ln(N) + N \ln(Z) - \beta E =$

$$= N \ln(Z) + \beta E$$

(III) known: $S = k_B \ln(W) = k_B N \ln(Z) + k_B \beta E$

(IV) known: $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}$ $\qquad E = U$

innen: $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = k_B \beta = \frac{1}{T}$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

termodinamikai értelmezése

$[\beta] = \frac{1}{J}$

Maxwell–Boltzmann-eloszlás

$$N_i = \frac{N}{\sum_i e^{-\varepsilon_i / k_B T}} e^{-\frac{\varepsilon_i}{k_B T}}$$

Gibbs - entrópiaformula motivációja

(I) $$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i)$$

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

(II) $$\ln(p_i) = -\ln(Z) - \beta E_i$$

(I + II)

$$\frac{S}{N} = -k_B \underbrace{\sum_i p_i}_{1} \left(-\ln(Z) - \beta E_i\right)$$

(III) $$\sum_i p_i E_i = \sum_i \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} E_i = \frac{E}{N}$$

$$\frac{S}{N} = + k_B \ln(Z) + k_B \beta \frac{E}{N}$$

A Boltzmann- és a Gibbs-formula azonos entrópia kifejezést ad!!

MB-eloszlás $$N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i}$$

$$p(z) = p_0 \, e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

$$n_V(z) = n_0 \, e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \qquad n = \frac{N}{V}$$

MAXWELL - FÉLE SEBESSÉGELOSZLÁS

VSZ. Gauss - féle eloszlás sűrűségfgv-e

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

normált sűrűségfüggvény: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-a\sigma}^{a\sigma} g(x)\,dx = \begin{cases} a=1 & \rightarrow 68\% \\ a=2 & \rightarrow 95\% \\ a=3 & \rightarrow 99{,}7\% \end{cases}$$

„háromszigmás" szint, elég pontos

Maxwell - gondolatmenete

független sebességkomponensek

$$f(\vec{V}) = \underbrace{f_1(V_x)}_{\text{függetlenek és azonosak}} \cdot f_2(V_y) \cdot f_3(V_z) = f_1^{\,3}$$

függetlenek és azonosak $\Longleftrightarrow$ minden a tükrözött irány

mégpedig és $f_1 = A e^{-\alpha V_x^2}$

$$f(|\vec{V}|) = A^3 e^{-\alpha V^2} \qquad V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

A és α meghatározása

$$E(\bar{V}_x^2) = A\int_{-\infty}^{\infty} V_x'^2 \exp(-\alpha V_x'^2)\,dV_x' \Rightarrow$$

parc. integr.

$$f(V_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{E(V_x^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{V_x^2}{E(V_x^2)}}$$

$$E(V_x^2) = \frac{1}{3}V^2 = \frac{2}{3}\frac{E(E_m)}{m}$$

$$\frac{2}{3}E(E_m) = k_B T$$

$$\Rightarrow E(V_x^2) = \frac{k_B T}{m}$$

$$f(V) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mV^2}{2k_B T}}$$

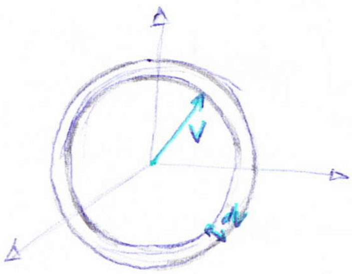
2016. 11. 08.

a sebességeloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(V) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mV^2}{2k_BT}}$$

Kísérleti ellenőrzés:

V tér: sebességtér



$4\pi v^2 dv$ = gömbhéj térfogata

$N\, 4\pi v^2 f(v)\, dv$

v és $v+dv$ közötti sebességgel rendelkező részecskék száma

$$4\pi v^2 f(v) = F(v)$$

a mérhető mennyiségek $F(v)$-ből meghatározhatóak

$$\langle v \rangle = \int v F(v)\, dv = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$

$$\langle v \rangle^2 = \int v^2 F(v)\, dv = \frac{3 k_B T}{m}$$

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$$

pl. hélium: $T = 300K$-en

$\langle v \rangle = 10^3 \frac{m}{s}$

Kísérletben

v_1 és v_2 közötti sebességűek száma

$$N\int_{v_1}^{v_2} F(v)\,dv$$

Stern-kísérlet:

$$L\,d\varphi = L\omega\,dt$$

Lammert-kísérlet:

time of flight

két rés

Now I've had the time of my flight
No, I never felt like this before
Yes, I swear it's the truth
and I owe it all to you

KVANTUMSTATISZTIKÁK

Tapasztalat: kétféle részecske

adott energiaszinten
(kvantumállapotban)

1 db részecske lehet — tetszőleges számú részecske lehet

Spin: saját impulzusmomentum (kvantumtulajdonság)
nincs klasszikus megfelelője

alapegysége: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ← Planck-állandó

$[\hbar] = Js = \frac{kg\,m^2}{s^2}\,s$ $\qquad [\vec{N}] = [\vec{r} \times \vec{p}] = \frac{m\,kg\,m}{s}$

$\boxed{\text{1 db}}$

feles spinű: $S = \frac{\hbar}{2}, \frac{3}{2}\hbar$ } fermion — követi a Pauli-elvet

lepton (e^-, neutrínó), kvarkok

$\boxed{\text{tetszőleges}}$

egész spinű: foton, gluon, bozon, $W^\pm$, Z^0, Higgs, graviton — nem követik a Pauli-elvet

Fermionok

i-edik állapot betöltése 0 vagy 1
a rendszer teljes energiáját $+\varepsilon$-nal növeli egy db részecske

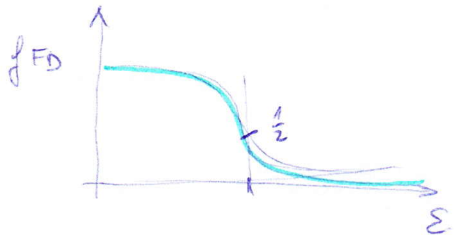
$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{e^{-\beta(E+\varepsilon)}}{e^{-\beta E}} = e^{-\beta\varepsilon} \qquad p_0 + p_1 = 1$$

$$\langle n \rangle = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}+1}$$

Fermi-Dirac eloszlás

véges kémiai potenciálja

$$f_{FD} = \frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}$$



Bozonokra

\# állapotban több részecske is lehet

$N = 0, 1, \ldots, \infty$

ha már van n db részecske, +1-et hozzáadhatunk

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = e^{-\beta\varepsilon}$$

↑ Boltzmann-Ansatz

$$\sum_i p_i = 1$$

n+1 egyenlet

$p_n \to$ n+1 ismeretlen

Megoldás:
$$p_n = \frac{e^{-n\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}+\ldots+e^{-n\beta\varepsilon}}$$

$$\sum p_i = 1$$

$$\langle n \rangle = \sum_i p_i n_i$$

$$\text{nevező} \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon}}$$ (mértani sor)

$$\langle n \rangle = \sum_i \frac{e^{-i\beta\varepsilon}}{1+\ldots+e^{-n\beta\varepsilon}} \cdot i =$$

$$= \frac{1}{Z}\left(\sum_i i\, e^{-i\beta\varepsilon}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta\varepsilon} \cdot (-1)$$

$$Z = \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z}(-1)^4 \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{(1-e^{-\beta\varepsilon})^2} =$$

$$= \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}$$

Bose-Einstein eloszlásfgv.

2016. 11. 08.

M – B : $\quad f_{MB}(\varepsilon) = e^{-\beta\varepsilon}$

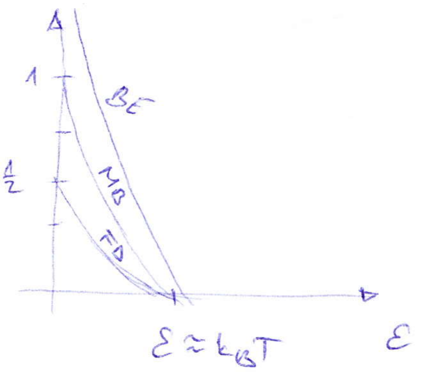
Maxwell-Boltzmann

F – D : $\quad f_{FD}(\varepsilon) = \dfrac{1}{1+e^{\beta\varepsilon}}$

Fermi-Dirac

B – E : $\quad f_{BE}(\varepsilon) = \dfrac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}$

Bose-Einstein



TERMODINAMIKAI EGYENSÚLY, TERMODINAMIKAI POTENCIÁLOK

II. főtétel: hőcsere mellett

$$\frac{\delta Q}{T} \le dS \quad \text{(Clausius-egyenlőtlenség)}$$

Egyensúly termikusan izolált rendszerben (= nincs hőcsere)

$dS \geq 0$ egyensúlyban

$S =$ maximális

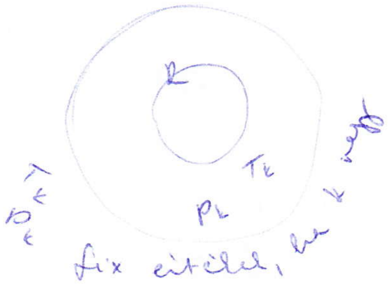
$\Rightarrow dS = 0$

egyensúlyi rendszere:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV = 0$$

$$dU_V = n C_v dT$$

$$\frac{n C_v dT}{T} + \frac{p}{T} dV = 0$$



R+K zárt rendszer $\xrightarrow[\text{egyensúly}]{}$ $dS_{R+K} = 0$

minden folyamatban $dS_{R+K} \geq 0$

$$dS_R + dS_K \geq 0$$

$$dS_K = -\frac{\delta Q}{T_K} \qquad \delta Q = dU - \delta W$$

$$dS_{R+K} = dS_R - \frac{\delta Q}{T_K} \geq 0$$

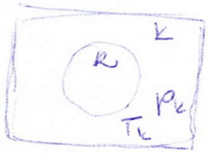
$$dS_R \equiv dS$$

$$T_K dS - dU + \delta W \geq 0$$

master equation

Ismétlés:

2016. 11. 15.



$S = S_{rendszer}$, $T = T_{rendszer}$, etc

$S_k = S_{környezet}$

$$dU - T_k\, dS - \delta W \leq 0$$

Mester-egyenlet

K által végzett mechanikai munka: $\delta W_{mech} = -p_k\, dV$

$$dU - T_k\, dS + p_k\, dV - \underbrace{\delta W_{egyéb}}_{=0} \leq 0$$

$$dU - T_k\, dS + p_k\, dV \leq 0$$

mindig csökken, egyensúlyban minimális

Szükséges feltétel a minimumhoz:

$$\left.\frac{\partial(U - T_k\, dS + p_k\, dV)}{\partial S}\right|_V = 0$$

$$\left.\frac{\partial(U - T_k\, dS + p_k\, dV)}{\partial V}\right|_S = 0$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_V - T_k = 0$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_S + p_k = 0$$

$$dU = TdS - pdV$$

$$\Downarrow$$

$$dS = \frac{1}{T}(dU + pdV)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_V = T \quad \text{és} \quad \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_S = -p$$

$T = T_k$ és $p = p_k$

egyensúlyban

4 szűkített folyamat

① S és V állandó (izentrópikus és izochor) $\rightarrow dS = 0,\ dV = 0$

$dU \leq 0$, U mindig csökken, egyensúlyban minimális

ilyenkor $U = U(S,V)$, S és V az U természetes változói

U az ez ún. termodinamikai potenciál, ami csak extenzív változóktól függ

② p és S állandó $\rightarrow$

$dU + p_k\, dV \leq 0$, $dS = 0$

$d(U + p_k V) \leq 0$, $U + p_k V$ folyamatosan csökken, egyensúlyban minimális

$\rightarrow$ $H \triangleq U + pV$ bevezetése = entalpia $H = H(p,S)$

$$dH = TdS + Vdp$$

3) T és V állandó, $dT = 0$, $dV = 0$

mester-egyenlete: $dU - T_k dS \leq 0$

$$dU - T_k dS - \underbrace{S dT_k}_{0} \leq 0 \longrightarrow d(U - T_k S) \leq 0$$

$$F \triangleq U - TS \qquad dF = -pdV - SdT$$

szabadenergia

Helmholtz-féle szabadenergia

$\Delta G = -SdT + Vdp$

4) p és T állandó

$$dU - T_k dS + p_k dV \leq 0$$

$$d(U - T_k S + p_k V) \leq 0$$

$$G \triangleq U - TS + pV$$

szabadentalpia

Gibbs-féle szabadenergia

Gibbs-pot.

	állandó	differenciál	név
U	S, V	$dU = TdS - pdV$	belső energia
H	S, p	$dH = TdS + Vdp$	entalpia
F	T, V	$dF = -pdV - SdT$	szabadenergia, Helmholtz-féle szabadenergia
G	T, p	$dG = -SdT + Vdp$	szabadentalpia, Gibbs-féle szabadenergia, Gibbs-pot.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "-TS"] \arrow[d, "+pV"'] \arrow[dr, "-TS+pV"] & F \arrow[d, "+pV"] \\
H \arrow[r, "-TS"'] & G
\end{tikzcd}$$

ez elegyjó

Ált.: Legendre-transzf.

pl. mech. tömegpont

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}$$

Legendre-trafó:

$$H(x, p, t) = L(x, \dot{x}, t) - \dot{x} p =$$

Hamilton

$$= \frac{p}{m} p - \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \frac{p^2}{2m}$$

harm. osc. Legendre

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} D x^2$$

$$H = \dot{x} p - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} D x^2$$

2016. 11. 15.

Fundamentális függvények deriváltjai

$$dU = TdS - pdV$$

$$U = U(S,V) \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p \quad \Bigg\} \quad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV$$

$$H = H(S,p) \rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V$$

$$F = F(V,T) \rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$$

$$G = G(p,T) \rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

általános potenciál (X intenzív, ξ extenzív)

$$\wp = U - \xi X$$

$$dU = TdS - pdV + X\,d\xi$$

$$\left(\frac{\partial \wp}{\partial X}\right)_{S,V} = -\xi$$

Összefüggések állapotjelzők deriváltjai között

aka. Maxwell-relációk

Young-tétel: $$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

H-ból $$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

F-ből $$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \rightarrow \frac{-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = \frac{\beta_p}{k_T}$$

G-ből $$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \rightarrow -V\beta_p$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$$

$$F = U - TS$$

$$F = U + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S$$

$$G = H - TS$$

$$G = H + T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$$

2016. 11. 15.

Euler-egyenlet

a termodinamikai potenciálok extenzívek, de változóik ext. v. intenzívek.

Tekintsünk egy λ-szoros rendszert.

$$\xi \to \lambda \xi \quad \text{ext.}$$

$$x \to x \quad \text{int.}$$

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \lambda U(S, V, n)$$

$$H(\lambda S, p, \lambda n) = \lambda H(S, p, n)$$

$$F(T, \lambda V, \lambda n) = \lambda F(T, V, n)$$

$$G(T, p, \lambda n) = \lambda G(T, p, n)$$

Euler tétele szerint a termodinamikai potenciálokra

$$U = TS - pV + \mu n$$

Termodinamika III. főtétele

$S = S_0 + \ldots$ volt, $S_0 = ?$ $\Rightarrow$ $U(T=0) = ?$

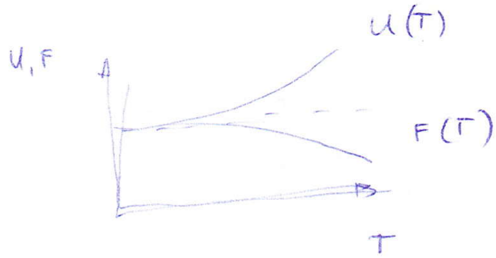
Walter Nernst kémiai reakciókból (1906–1912) reakció-hő egyre közelebb, egyre kisebb T-vel, 0-ba tart.

Planck általánosította és matematizálta.

$$\lim_{T\to 0} U(T) = \lim_{T\to 0} F(T)$$

$$\lim_{T\to 0} \frac{\partial U(T)}{\partial T} = \lim_{T\to 0} \frac{\partial F(T)}{\partial T}$$

$$S = \frac{U-F}{T}$$



Következmény

$$S = S(0) + \int_0^T \frac{\delta Q^{rev}}{T} = S(0) + n\int_0^T \frac{C(T')}{T'}\,dT'$$

$$\delta Q_p = n C_p \, dT_p$$

$$\lim_{T\to 0} S(T) = 0 \longrightarrow C(T) \text{ is eltűnik}$$

1. planck: $U(T) = F(T)$ és $\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T}$ ha $T \to 0$
2. $S(0) = 0$
3. $\lim_{T\to 0} C(T) = 0$
4. $T=0$ nem érhető el véges számú lépésben

2016. 11. 22.

<u>Ismétlés:</u> $\mu(T) = F(T)$ ha $T \to 0$

$S(T=0) = 0$

$\lim_{T \to 0} C(T) = 0$

$T = 0$ nem érhető el

<u>Megjegyzések</u>: ① $S(T) = \underset{S(T=0)}{S_0} + n C_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$

ideális gázból jön

$S(T) = ?$, ha $T \to 0$? → nincs értelme!

ilyenkor ez nem érvényes

$\Rightarrow$ az ideális gáz koncepciója <u>nem jó</u>

$T \to 0$ esetén

② Fizikai mennyiségek $T \to 0$ mellett

$$\beta_p(T) = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V}(-1)\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = 0$$

$G(T, p)$, S és deriváltjai is eltűnnek

$C(T \to 0) = 0$

$\beta_p(T \to 0) = 0$

③ $S = k_B \ln(W)$, $S(T=0) = 0 \Rightarrow W^{dh} = 1$

Alapállapot csak egy módon valósulhat meg (az alapállapot nem degenerált).

$T = 0$ megközelítése

adiabatikus lemágnesezés ('60-as, μK)

^4He $T = 1{,}5$ K

^3He $T = 0{,}3$ K

^3He-^4He $T = 10$ mK

lézeres hűtés: nK 10^{-9} K

adiabatikus lemágnesezés

$\boxed{\nearrow\downarrow\uparrow\searrow}$ T (rendszer)

$\downarrow$ +B (adiabatikusan)

$\boxed{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}$ $T+\Delta T$

$\downarrow$ $-Q$ hőt ad le a rendszer

$\boxed{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}$ T

$\downarrow$ $B=0$ adiabatikusan mágneses tér létrehozása

$\boxed{\uparrow\downarrow\uparrow\searrow}$ $T-\Delta T$

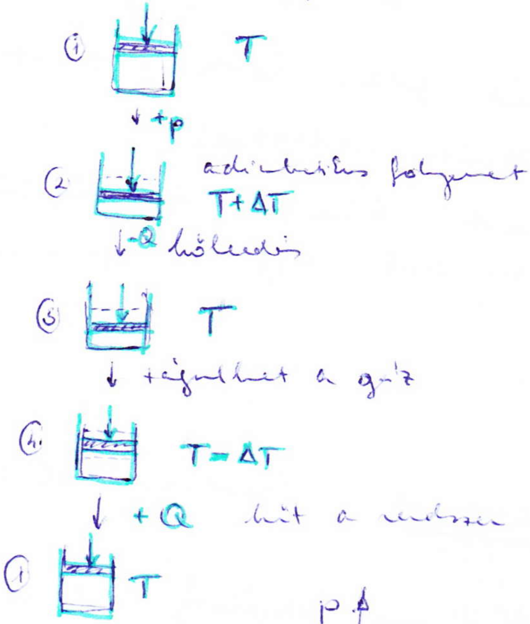
$\downarrow$ $+Q$ hűt a rendszer

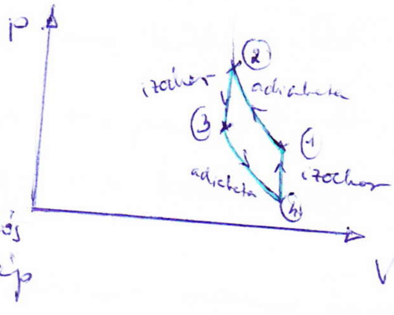
$\boxed{\nwarrow\swarrow\uparrow\searrow}$ T

rendeződés → a mágneses entrópia csökken

rendezetlen → a mágneses entrópia nő

ideális gázzal





majdnem valós hűtőgép

2016. 11. 22.

FÁZISÁTALAKULÁSOK

Volt: halmazállapotváltozás (pl. szilárd, gáz, cseppfolyós)

Fázis: minden halmazállapotváltozás fázisátalakulás, de nem minden fázisátalakulás halmazállapotváltozás

pl. ferromágneses rendeződés $\notin$ halmazáll.-vált.

szupravezetés $\notin$ halmazállapotváltozás

szuperfolyékonyság $\notin$ —"—

fázishatár: két fázis közti átmenetnél a fizikai mennyiségek ugrásszerűen változnak

komponens: adott kémiai összetételű anyag
(mi csak egy komponensű rendszert nézünk)

halmazállapotváltozások: /reverzibilisek/

1. szilárd → folyékony (olvadás / fagyás)
2. folyékony → gőz (párolgás / cseppfolyósodás)
3. szilárd → gőz (szublimáció / megszilárdulás)

① Állandó nyomáson szilárd anyaggal hőt közölve cseppfolyósodik, ha hőt vonunk el, megfagy.

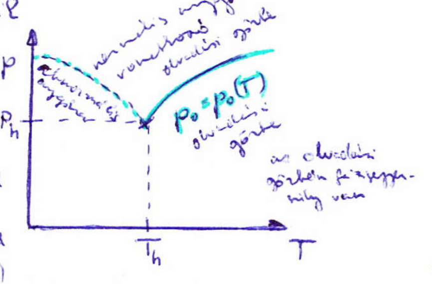
olvadáshő / fagyáshő

T = áll., mert a hő a molekulák közti kötési energiák felszakítására fordítódik

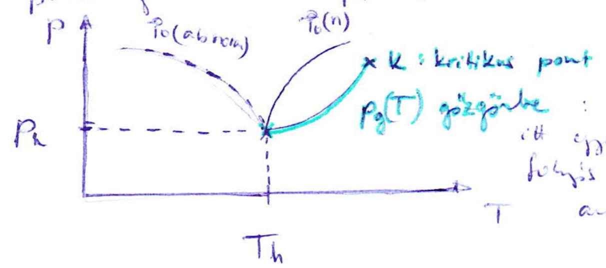
∃ Le Chatelier – Braun-elv: a rendszer úgy segít, hogy a hatást csökkentse
pl. jeget nyomjuk → megolvad
normális anyagnál fordítva

hármaspont (T_h, p_h)

normális: olvadásnál tágul
abnormális: fagyásnál tágul (víz)



② párolgás – cseppfolyósodás

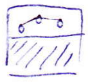


: gőznyomás görbe, itt egyensúlyban van a cseppfolyós és a gőz állapot, anyagmennyiségtől független

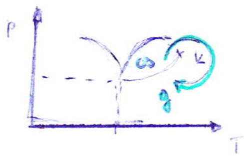
hármaspontok
víz: $T_h = 273{,}16\,K$
$p_h = 6106\,Pa$
CO_2: $T_h = -56{,}6\,°C$
$p_h = 5{,}1\,bar$

kritikus pontok
víz: $T_k = 674\,K$
$p_k = 218\,bar$
CO_2: $T_k = 31{,}04\,°C$
$p_k = 72{,}8\,bar$
↳ Pakson stabilitási állapotban

pl. vízgőz 1 bar 100 °C; egyensúlyi állapot: kuktafőzés,
″ p_g ″ T_g

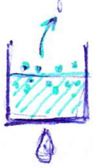
kukta egyensúly

p csak T-től függ
ideális gázra nagyon nem érvényes

∃ kritikus pont



át lehet menni fázisátalakulás nélkül

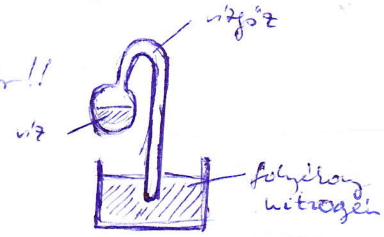
pl. párolgásra, párolgáshőre



az átlagnál nagyobb energiával rendelkező részecskék elmennek
→ hűlés

windchill 
dezodor
nedves hőmérő
fagyasztásos érzéstelenítés

kriofór!!



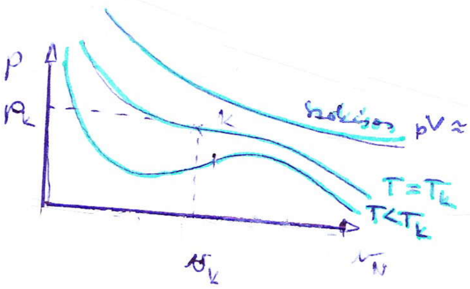
2016. 11. 22.

<u>Valódi gázok izotermái</u> $\longleftrightarrow$ halmazállapot-változások értelmezése

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \qquad v_N = \frac{V}{N} \text{ fajlagos térfogat}$$

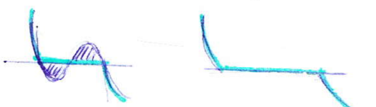
$$\left(p + \frac{a}{v_N^2}\right)(v_N - b) = RT$$

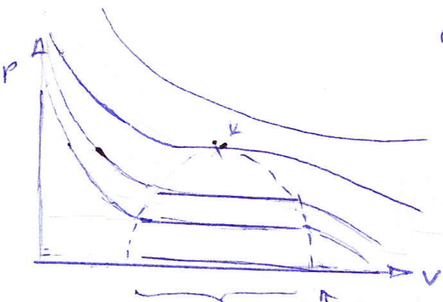
izotermák egyenletei



„fura viselkedés" → „nem egyértelmű" p–V

<u>Feloldás</u>: Maxwell-konstrukció

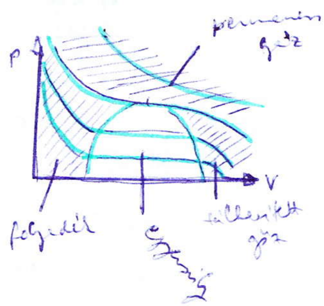




⇒ $T > T_k$ 1 gyök

⇒ $T = T_k$ háromszoros gyök

⇒ $T < T_k$ három különböző gyök



K-n keresztül a folyadék és a gőz tulajdonságai <u>folytonosan</u> mennek át (másodfajú fázisátmenet)

$$\left(p + \frac{a}{v_N^2}\right)(v_N - b) = RT$$

$$v^3 p + v^2(-RT - bp) + va - ab = 0$$

háromszoros gyök $T = T_k$-ra

egyszeres gyök $T > T_k$

három különböző gyök $T < T_k$

$T = T_k$-ra $(v - v_k)^3$-ben előálló

$$v_k = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b}, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} \longrightarrow T^* = \frac{T}{T_k}, \quad p^* = \frac{p}{p_k}, \quad v_N^* = \frac{v_N}{v_k}$$

vdW:

$$\left(p^* + \frac{3}{v_N^{*2}}\right)\left(v_N^* - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}T^*$$

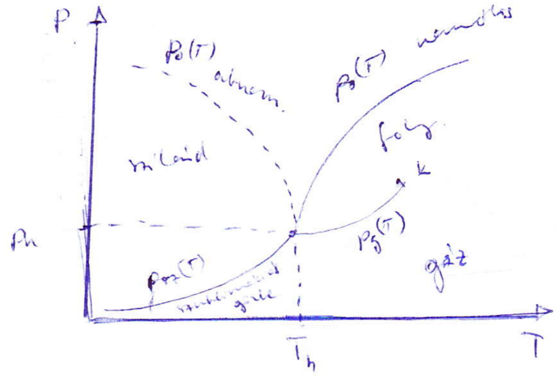
univerzális állapotegyenlet

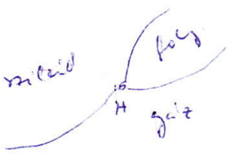
Megfelelő állapotok tétele:

(1) és (2) anyag egymásnak megfelelő állapotban van, ha

$T_1^* = T_2^*$, $p_1^* = p_2^*$, $v_{N1}^* = v_{N2}^*$

③ Szilárd - folyadék átmenet





a hármaspontban mindhárom fázis egyensúlyban létezik.

Fázisegyensúly feltétele

izolált rendszer

U_2 V_2 n_2
U_1 V_1 n_1

$\longrightarrow$ felosztható

$U = U_1 + U_2 = \text{áll.}$ $\qquad dU_1 = -dU_2$

$V = V_1 + V_2 = \text{áll.}$ $\qquad dV_1 = -dV_2$

$n = n_1 + n_2 = \text{áll.}$ $\qquad dn_1 = -dn_2$

$S = S_1 + S_2$

$$dS = \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1}\right)_{V_1,n_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right)_{V_2,n_2}\right] dU + \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial V_1}\right)_{n_1,U_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial V_2}\right)_{n_2,U_2}\right] dV + \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1}\right)_{U_1V_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial n_2}\right)_{U_2V_2}\right] dn$$

$\forall$ együttható külön-külön nulla

$$\text{FE} \Rightarrow dS = \frac{1}{T}(dU + p\,dV - \mu\,dn)$$

$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$, $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, $\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}$

az intenzív állapotjelzők azonosak a két fázisban

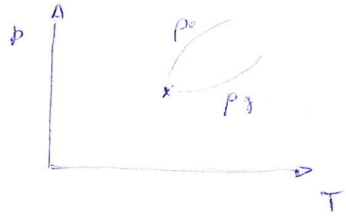
2016. 11. 22.

Fázisdiagram és a Clausius–Clapeyron-egyenlet

fázisegyensúlyban $\quad p_1 = p_2\,,\ T_1 = T_2$

$$\mu_1(p_1, T_1) = \mu_2(p_2, T_2)$$

$p-T$ görbe



a görbén $\mu_1 = \mu_2$

T szerinti derivált

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT}} + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_p$$

láncszabály miatt $\quad p = p(T)$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial p}\right)_T - \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial p}\right)_T}$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dn$$
$$dG = -SdT + Vdp + \mu dn$$

S extenzív, lin. fgv-e

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,n} = -\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T,p} = -S_M \triangleq \frac{S}{n}$$

moláris entrópia

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{T,n} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{T,p} = V_M = \frac{V}{n}$$

$$\Delta S_{M_{12}} = S_{m_2} - S_{m_1} = \frac{Q_{M12}}{T}$$

Clausius–Clapeyron

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_{m_2} - S_{m_1}}{V_{m_2} - V_{m_1}}\,, \qquad \frac{dp}{dT} = \frac{Q_{M12}}{T\,(V_{m_2} - V_{m_1})}$$

fázisgörbe deriváltja, térf. ugrás és rejtett hő

Clausius - Clapeyron kvalitatívan

A (1) folyadék → (2) gőz $Q_{M12} > 0$

$V_{Mf} << V_{Mg}$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q_{M12}}{\underbrace{T(V_{M2} - V_{M1})}_{\text{nagy}}} > 0$$

← pozitív

$\frac{dp}{dT} > 0$, de kicsi

B (1) szilárd → (2) folyadék   olvadás: $Q_{M12} > \emptyset$

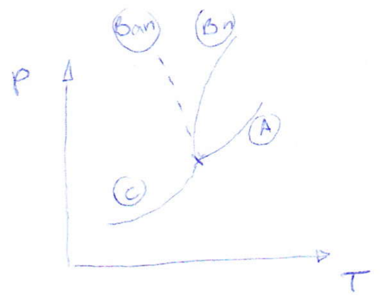
normális anyag: $V_{Msz} < V_{Mf}$ ⟶ $\frac{dp}{dT} >> 0$

anomális: $V_{Msz} > V_{Mf}$ ⟶ $\frac{dp}{dT} << \emptyset$

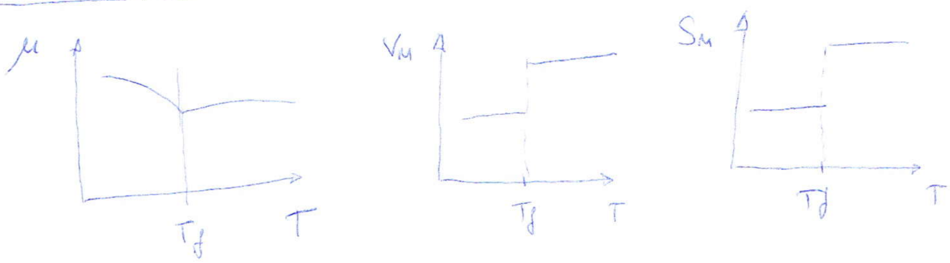
C (1) szilárd → (2) gőz $Q_{M12} > \emptyset$

$V_{Msz} << V_{Mg}$

$\frac{dp}{dT} > \emptyset$ kis szám



Elsőrendű fázisátalakulás:

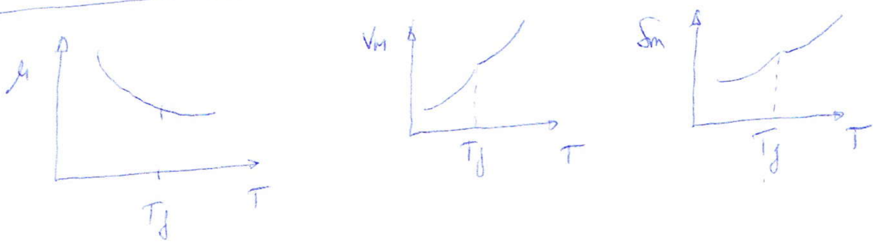


μ folytonos, de V_M és S_M nem

ilyenkor $\exists$ látens hő

$Q = T\Delta S$

Másodrendű fázisátalakulás / folytonos fázisátalakulás:



a második deriváltja ugrik

V_M és S_M folytonos, de a deriváltja ugrik ∂

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}, \frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}, \frac{\partial^2\mu}{\partial T \partial p} \right)$$

mérhető fizikai mennyiségek:

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)_p = -\left(\frac{\partial S_M}{\partial T}\right)_p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nem} \\ \text{intenzív}}}{=} -\underbrace{\left(\frac{\partial S_M}{\partial H}\right)_p}_{\frac{1}{nT}}\underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}_{nC_p} = -\frac{C_p}{T} \leftarrow \text{ugrik}$$

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}\right)_T = \left(\frac{\partial V_M}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{n} V \kappa_T \leftarrow \text{ugrik}$$

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial p \partial T}\right) = \left(\frac{\partial V_M}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{n} V \beta_p \leftarrow \text{ugrik}$$

Modern fizika

mechanika (16-17. szd.)
el. din. (19. szd.)
termodin. (19. szd.)
spec. rel. (1905, 19. szd. vége)
ált. rel. (1916, Einstein)

kvantum-mechanika (1920's, Bohr, Heisenberg, Schrödinger)
relativisztikus kvantummechanika (1928, Dirac)
elektromos kh. elmélete (1950's, Feynman, Dyson, Tomonaga)
elektrogyenge kh. (1970's, Salam, Glashow, Weinberg)
Standard modell (3 kh., 1960 - 2015, Gell-Mann → Higgs)

próbálkozások:
- Great Unified Theory
- kvantumgravitáció
- szuperhúr

három párhuzamos történet

1. Elektromágneses sugárzás

1814. Fraunhofer vonalas színképet fedezett fel a Nap spektrumában

1859. Kirchhoff (Bunsen égő) látható fény elnyelésében elem-specifikus elnyelések, hevítve ugyanott kibocsájtással.

1879. Joseph Stefan: kibocsájtott teljesítmény fekete test sugárzásakor $\sim T^4$

1884. Boltzmann: Termo + Maxwell-egyenletekből kihozza

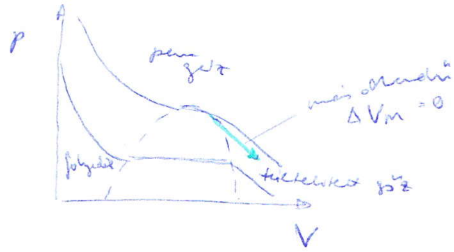
1896. Wien: eltolódási tv

1900. Rayleigh-Jeans: jó sugárzási tv. kis frekire
UV-katasztrófa után
Max Planck: feketetest

2016. 11. 29.

Clausius - Clapeyron

nincs értelme másodrendű fázisátalakulásra



2. Fény & anyag

17-18. szd. Huygens: a fény hullám, Huygens-Fresnel elv

1803. Thomas Young: kétréses kísérlet → fényelhajlás (diffrakció)

1887. Hertz: UV fény hatására fémből elektronok lépnek ki

1905. Lénárd Fülöp: fotoeffektus kvantitatívan leírta

Einstein: elmélet → Nobel

3. Atommodellek

i.e. 4. szd. Demokritos „atomos" 

1838. Michael Faraday: katód-sugárzás

1870. Mendeleev periódusos rendszer

1880. Rydberg: vonalas színkép rendszerezése

1897. J. J. Thomson: elektron

1904. Thomson-féle plum pudding

1909. szórás kísérlet α+ aranyfólia Geiger, Madsen, Rutherford

1911. Rutherford: atommodell

1913. Bohr atommodell

1914. Franck-Hertz-kísérlet

1922. Stern-Gerlach (elektronok spinje)

1924. de Broglie: anyaghullám-elmélet

1927. Davisson

1926. Schrödinger egyenlet

1927. Heisenberg: határozatlanság-elv

2016. 11. 29.

Fekete test sugárzása

Kirchhoff: az anyag elnyelése (abszorpciója) és kisugárzása (emissziója) összefügg.

Független az anyag min. sugárzása termikus egyensúlyban a környezetével:

$$\frac{\text{emisszió}(\nu,T)}{\text{abszorpció}(\nu,T)} = u(\nu,T)$$

$$\frac{e(\nu,T)}{a(\nu,T)} = u(\nu,T)$$

univerzális fgv. minden anyagra

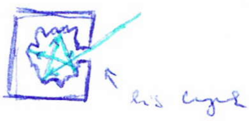
ν: frekv.

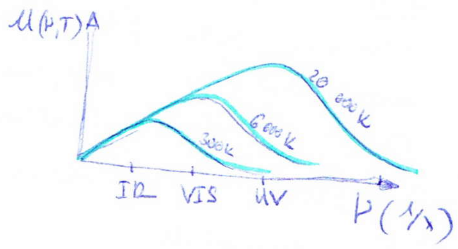
Abszolút feketetest koncepciója:

$$a(\nu,T) = 1 \iff \text{mindent elnyel}$$

a kibocsájtott teljesítmény spektruma: $e(\nu,T) = u(\nu,T)$, $e(\nu,T)$-t meg kell mérni!

jó közelítés fekete testre:





Stefan - Boltzmann:

$$\int_0^\infty u(\nu,T)\,d\nu = \sigma T^4$$

σ: Stefan-Boltzmann-állandó

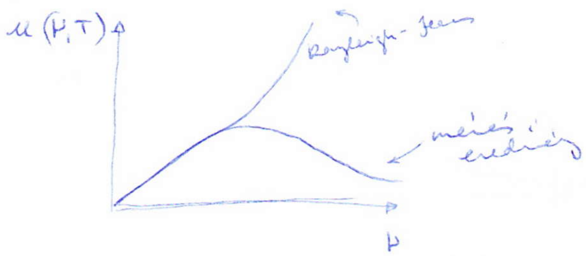
Wien-féle elt. tv.: $\lambda_{max} \cdot T = \text{konst.}$

Elméleti próbálkozás:

Rayleigh – Jeans: Maxwell-egyenletek alapján

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B \nu^2 T$$

elmélet



Planck:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

hipotézis

jó empirikus fit!

sok pici harm. oszcillátor

Sugárzási tv.

- nem a Maxwell-egyenletek írják le a rezdüléseket,
  hanem
- csak $h\nu$ diszkrét energia-adagokat tudnak elnyelni és leadni
- $h\nu \le k_B T$ esetén lesz egy kiegyezés (→ megfeleltetési levezetés)

h: Planck-állandó, coefficient of fitting

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js

2016. 11. 29.

Planck sug. tv. → deriválás → Wien

Planck sug. tv. → integrálás → Stefan-B.

Planck $\nu \to 0$

$$\lim_{\nu \to 0} u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3 k_B T}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2$$

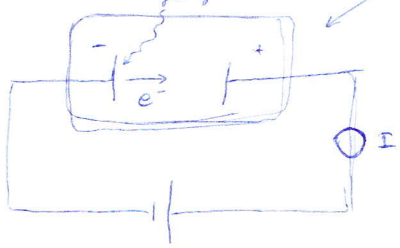
← Rayleigh - Jeans

λ nagy esetben

no need for quantum physics.

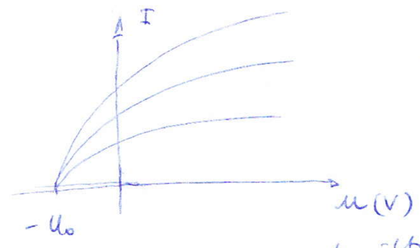
Fény & anyag kh. / fotoeffektus

katódsugárzás



fény hatására e^--k lépnek ki

eredmények:



különböző fényintenzitások mellett, adott frekvenciájú fényre

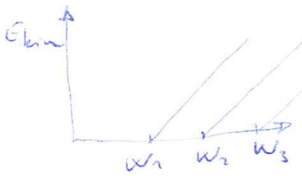
feszültség

$$e U_0 = E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

adott frek. fölött $E_{kin} \sim \nu$

megfigyelés		klasszikus várakozás
fotoeffektus ν-től függ	⟷	Maxwell: energia v. intenzitás a fontos param.
IR-re nincs		λ vagy ν indifferens
UV-ra van		„bejövő fényre az e^- gyűjti az energiát, aztán kilép"
van lezárási feszültség, csak ν-től függ, az intenzitástól nem függ	⟷	„pont fordítva"
áram ~ intenzitás	⟷	energia ~ intenzitás

<u>Einstein:</u> vezette a Planck-féle kvantumhipotézist komolyan.
Elektromágneses sugárzás $h\nu$ energiaadagokban re-
szekték; fotonok formájában terjednek.
1 foton $\rightarrow$ 1 e$^-$-t ki tud „ütni", ha az energi-
ája elég nagy.



$$E_{foton} = h\nu$$

$$E_{kinetikus} = h\nu - W$$

kilépési munka

Elektromágneses sugárzás: egyszerre tud reszecske- és hullámtermészetet mutatni.

Impulzus fogalma: $E = h\nu$ általában

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

fotonra: $E(p) = p \cdot c = h\nu \longrightarrow p\nu\lambda = h\nu$

és $c = \lambda\nu$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{vagy} \quad p = \frac{h\nu}{c}$$

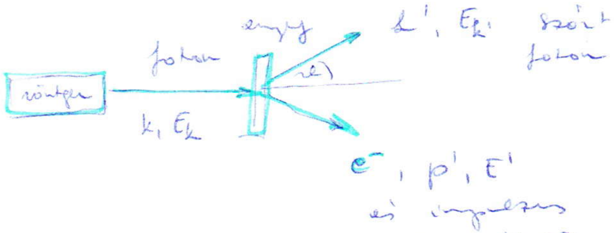
mindig igaz!

segédmennyiség: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ és $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

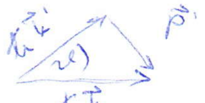
$$p = \hbar k$$

hullámszám

Impulzus kimutatása: Compton szórásban



Impulzusmegmaradás



$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}'$$

$$\vec{p}'^2 = \hbar^2 k^2 + \hbar^2 k'^2 - 2\hbar^2 k k' \cos\vartheta$$

Energiamegmaradás

$$m_0 c^2 + E_{kin} = E_{kin'} + \sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2}$$

$$E_{kin} - E_{kin'} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2} - m_0 c^2 = \frac{p'^2}{2m} \,,$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\vartheta)$$

$$\longrightarrow \left[\frac{h}{m_0 c}\right] = [\lambda] \qquad \frac{h}{m_0 c} = \lambda_{Compton}$$