

KÍSÉRLETI FIZIKA 3.

A tudományos megismerés folyamata

Megfigyele's → Fizikai mennyiségek → összefüggések
 (kísérletek) definíciója megállapítása



Paradigma váltds (Thomas Kuhn): szemléletváltás, nagy ugrys az elmeletben
 Korrespondencia elv: új elmelet magabán foglalja a régit

Példa: Tömegenzsás törvényéhez vezető út

bolygók mozgását figyelték:

↳ 5 bolygó: retrograd mozgás ↘

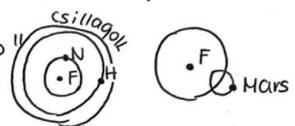
Fizikai mennyiségek definíciója: nap, évi hónap, bolygók helye, szög
 összefüggések, jóslatok

↓
 Elmeletek: Ptolemaiosz (Kr.e. IV. sz.): "Geocentrikus világkép"

↳ Nap: 1 napos periódussal Föld körül kerül

↳ Hold: kicsit bonyolultabb mozgás

↳ bolygók: nem körökön mozognak, hanem egy körön mozgó körön



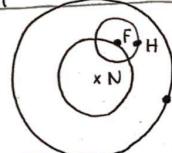
Galilei ~1610

↳ +arcsó → jobb megfigyele'sek:

↳ Jupiter holdjai (mini naprendszer)

↳ Vénusz fazisváltozásai → Nap körül kerül

Kopernikusi forradalom ~1610: Heliocentrikus világkép



↑ paradigmaváltás

F: forog a tengelye körül

Mars: körön mozog → korábbi retrográd mozgás is kijön

Tycho Brache

1580 - 1605

↳ nagyon pontos bolygómegfigyele'sek

⇒ Mars mozgását nem írja le pontosan a heliocentrikus világkép

Megoldáskísérlet: Mars is körön mozgó körön mozog a heliocentrikus világképben

Kepler

1609 - 1616 (Brache segédje)

↳ paradigmaváltás: bolygók ellipszispályán mozognak

↳ Kepler törvények

↳ fenomenológikus összefüggések = jelenségeket leíró (nem mond ki természeti törvényeket)

Newton

1680

↳ egyszeres tömegenzsás törvénye (igazi elmelet)

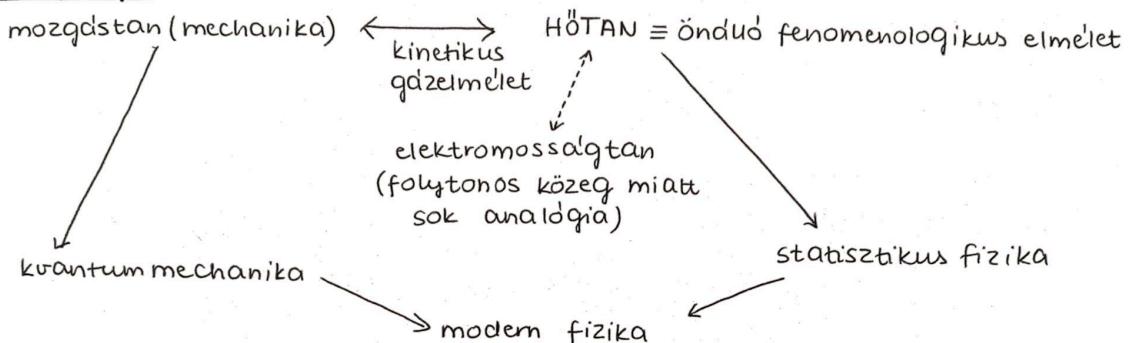
$F \sim \frac{1}{r^2}$ visszaadja a Kepler törvényeket (korrespondencia elv)

HÖTAN / TERMODINAMIKA

Miért?

- fizika fejlődéstörténetében fontos (pl. energiamegmaradás)
- modern fizikai gondolkodást mutat be
- hétköznapi életben fontos
- kísérleti fizika módszertanát szemlélteti (fenomenológikus leírás)
- modern koncepciók (pl. entropia)
- műszaki, biofizikai területeken fontos
- statisztikus fizikához, szilárdtestfizikához fontos

Hötan helye



Hötan története

- 1650 - Otto von Guericke: első vákuum \rightarrow cáfolta Aristotele'szt, aki szerint "a természet ütdzik a vákuumtól"
- 1656 - Robert Boyle: összefüggés a gdzok nyomása, térfogata, hőmérséklete között
- 1679 - Denis Papin: kukta \rightarrow biztonsági szelep
- 1697 - Thomas Savery: első gőzgép (bizt. szelep motiválta)
- 1712 - Thomas Newcomen: javított gőzgép
- 1720 - Joseph Black:
 \rightarrow mi a hő?
 \rightarrow kalorikum elmelet: "a hő egy anyag", de nincs tömege
 Fizikai mennyiségeket keresett, definített; új mennyiségek:
 • hőmennyiség • Időtens hő
 • fajhő • kalória
 • hőkapacitás
- 1798 - Count Rumford (I. főtétele felé lépés)
 \rightarrow megfigyelés: (bronz) ágyúcsövek fűrészésekor hő keletkezik
 mechanikai munka hőt hoz létre
- \rightarrow kinetikus elmelet: $hő \equiv$ a részecskék mozgása
 pontosabban: a hő a részecskék mechanikai energiája (potenciális + mozgási)
- 1750 - J. Watt (J. Black tanára): rossz elmelet \rightarrow jó gép
 (hőanyag elm)
- 1824 - Sadi Carnot - modern hötan \rightarrow II főtétele
- 1841 - James Joule - Joule kísérlet \rightarrow I főtétele (energiamegmaradás tétel)
- 1850 - Clausius - kalorikum és kinetikus elmelet ekvivalens, ha a kalorikum megtartandó energiamegmaradással helyettesítjük (korrespondencia elv teljesül)
- 1860 - Statisztikus hötan
 • Maxwell: kontinuum/anyag/viselkedése
 • Boltzmann: entropia statisztikus értelmezése
 • Planck: III főtétele matematikai alakja
 • Clausius
 • Gibbs

- hétköznapi fogalom
- hömérseklet és hömennység nem arányos

pl. gyufaláng melegebb \leftrightarrow meleg (pl. 50°C-os) vasdarabban több a hő (vasdarab felmelegítendő a vörösöt, de kevésbé meleg, mint a gyufaláng)

Tapasztalatok • adott környezetben a testek hömérseklete alkando

- axiómák
- érintkező testek hömérseklete kieggyenlítődik
 - testek fizikai jellemzői (hossz, sűrűség, szín) függ a hömér.-től
 - termikus egyensúly tranzitív

$$\boxed{A} \leftrightarrow \boxed{B} \quad \text{és} \quad \boxed{B} \leftrightarrow \boxed{C} \Rightarrow \boxed{A} \leftrightarrow \boxed{C}$$

termikus
egyensúly

term. egy.

term. egy.

ez a hőtan 0. főtétele (termikus egyensúly tranzitinitását fejíti ki)

0. főtétel \Rightarrow emiatt lehet empirikus hömérsekletet definidni és hömérsekleti skálát megadni (mert \exists egyensúly, és a mérődő dolog hömérseklettel arányos hömérseklettől tudok hozni egy másik tárgyat)

Ehhez kell:

- mérődő tulajdonság
- skála törvény (pl. lineáris mérő)
- egység
- nullpont

pl Celsius-skála

- Hg hossza \rightarrow hőtagulás
- lineáris (hőtagulási) skálatörvény
- nyomdsfüggő
 - egység $\rightarrow 100^\circ\text{C}$: saját gyözevel egyensúlyban lévő víz hömér.-e
 - 0 pont: olvadó jég-víz keverék hömérseklete

10^5 Pa a referencia \rightarrow víz 3-as pontja viszont nem függ a nyomástól

$x(t)$: hömérőben Hg hossza t hömérsekleten

$$t (\text{ }^\circ\text{C}) = \frac{x(t) - x_0}{x_{100} - x_0} \cdot 100 \quad x_0: \text{Hg hossza víz-jégben}$$

x_{100} : — " — forrásban lévő vízben

pl Ideális gáz hömérsekleti skála

$pV = nR \cdot T$ egyesített gáztörvény (ideális gázokra)

n: anyagmennyisége

$R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$ gázkonstans (származtatott mennyisége, Boltzmann-, Avogadro- és Planck-szabály szerepel benne) (erek szorza R))

$$[pV] = \exists$$

$(pV)_T$: a mérődő mennyisége adott (T) hömérsekleten

$$(pV)_f \quad f=100^\circ\text{C}, \quad (pV)_0 \quad 0^\circ\text{C}$$

Tapasztalati görbe

meredeksége: nR

$$R = \frac{(pV)_f - (pV)_0}{100 \cdot n} \text{ mérhető}$$

extrapoláció \rightarrow abszolút hömérsekleti skálát, höm. minimális értékkel jósolja (tapasztalatok, szobahömérsekleten mérések alapján)

$$T_0 = \frac{(pV)_0}{nR}, \quad T_{100} = \frac{(pV)_{100}}{nR}$$

↑ ideális gáz hömérsekleti skálán a 0°C értéke

innen: $T_0 = \frac{(pV)_0}{(pV)_f - (pV)_0} \cdot 100$ csak a mérő PV értékeitől függ, nincs hűtő nem

$$T_0 = 273,15 \text{ K} = 0^\circ\text{C} \Rightarrow \text{kelvin-skála: } t(K) = t(\text{C}) + 273,15$$

- Diszkusszió
- ideális gáz csak szobahőmérséklet köül, legkönnyebb nyomás körül ad jó közelítést
 - mégis az extrapoláció QK-re jó értéket ad
 - QK (abszolút 0 fok) nem értelmezhető el
 - 273,16 K (később lesz szó röviden): víz havmaszponti hőmérséklete

KINETIKUS GÁZELMÉLET

A mérhető (fenomenológikus) mennyiségeket a részecskék mozgására vezetjük vissza.

Feltevései:

- részecskék kis gömbök (közelítés)

$$d \ll l \quad d := \text{átmenő}, \quad l := \text{szabad úthossz (két ütközés közötti út)}$$

- minden ütközés rugalmas (mikrorészekenél rugalmatlan ütk. \Leftrightarrow gerjesztés)
- nincs megkülönböztetett irány (izotróp)
- mozgás rendezetlen

Matematikai kiterjesztés

• 6 dimenziós fázister: hely + sebesség vektor (3+3 koordináta)

• fázistér elemi térfogata: $d\tau \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x, x+dx] \\ [v_x, v_x+dv_x] \\ [y, y+dy] \\ [v_y, v_y+dv_y] \\ [z, z+dz] \\ [v_z, v_z+dv_z] \end{bmatrix}$

• N db részecske: dN a $d\tau$ elemi térfogatban levő részecskék száma

• Def $\frac{dN}{N} \stackrel{!}{=} f(r, v, t) d\tau$

sűrűségfüggvény: rendszere jellemző infók benne vannak
(adott helyen, adott sebességgel hány részecske van)

f tulajdonsága: $\int f(r, v, t) d\tau = 1$

teljes tér

Adott fizikai mennyiségek $q_r(r, v, t)$ (pl. energia, impulzus) átlag értéke

várható értéke: $\bar{q}_r = \int q_r(r, v, t) f(r, v, t) d\tau$

teljes tér

pl. $q_r(r, v, t) = x$, akkor $\bar{x} = \int x \cdot f(r, v, t) d\tau$

várható érték és sűrűségfüggvény

1. Diszkrét valószínűségi változó

dobókocka: $p_1 = p_2 = \dots = p_6$

Előzetes: 6-ot dobott $\Rightarrow +6$ Ft

mást - " $\Rightarrow 1$ Ft-ot versztek

$$\bar{x} = \sum_i p_i x_i = \frac{1}{6} \cdot 6 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \quad (\text{hosszú távon nyerék})$$

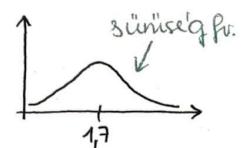
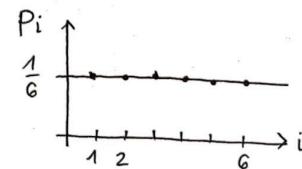
2. Folytonos valószínűségi változó

sűrűségfüggvény: eloszlásfüggvény deriváltja

pl. népségsorban férfiak magasság szerinti eloszlása

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1, \quad \text{átlag: } \bar{x} = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2} \sigma^2$$

pl. Gauss: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$, valóban: $\bar{x} = \int_0^{\infty} x f(x) dx$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} y = x - \bar{x}; \\ dy = dx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{\phi} + \bar{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{1} = \bar{x}$$

OK

Studiengegenet: $\bar{f}^2 = \langle x^2 \rangle - (\bar{x})^2$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x^2 e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} x - \bar{x} = y \\ dx = dy \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (y^2 + 2\bar{x}y) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \bar{x}^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = y - \bar{x} \\ v = y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\ u^2 = y^2 - 2\bar{x}y + \bar{x}^2 \\ v^2 = y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cdot 1^2 \end{array} \right] =$$

$$= \bar{x}^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du + \bar{x}^2 + \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right|_{-\infty}^{\infty} = \bar{x}^2 + f^2$$

$$\text{szórás négyzet: } \sigma^2 = \int_0^\infty x^2 f(x) dx - \left[\int_0^\infty x f(x) dx \right]^2$$

Matek: (jelölés): $\bar{x} = \langle x \rangle$

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (\bar{x}^2 - \bar{x}^2)$$

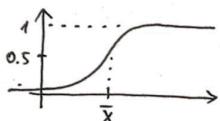
PL fej vagy írás, $p = \frac{1}{2}$

$$x = 0, 1 \quad \bar{x} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \rightarrow \sigma = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$\sum p_i = 1 \quad x_i^2 p_i = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

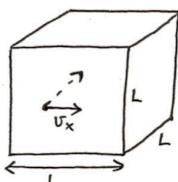
σ megadja, hogy a játékokban milyen gyorsan közelítem meg az elmeleti várható értéket ($\bar{x} - t$)

PL Gauss eloszlásfüggvénye: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$



\hookrightarrow jelentése: adott x -nél kisebb értékek előfordulási valószínűsége

NYOMÁS ÉRTELMEZÉSE A KINETIKUS GÁZELMÉLETBEN



$$V = L^3$$

m_0 tömegű részecskék \rightarrow izotróp mozgás

nagymás ütközés a falai

Δt időnként ütk. 1 adott falai

$$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \Delta t = \frac{2L}{v_x} \quad (\text{karakterisztikus idő})$$

Impulzusátadás: $\Delta P_x = 2 m_0 v_x$, ebből erő:

$$F = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{m_0 v_x^2}{L}$$



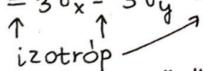
\hookrightarrow csalás (közelítés): itt most idő alatt történő impulzusátadást tekintünk, a repülés idejében közelítjük az impulzusátadás idejét

Mégis jó a közelítés, mert nagyon sok részecské ütközik

A falra ható teljes erő: $N \cdot F = \frac{N \cdot m_0 v_x^2}{L}$

$$\Rightarrow \text{nyomás: } p = \frac{N \cdot F}{A} = \frac{N m_0 v_x^2}{L \cdot L^2} = \frac{N}{V} m_0 v_x^2$$

Feltéve's: mozgás izotróp $\Rightarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ minden igaz, e's a várható értékekre teljesül, hogy $v^2 = 3 v_x^2 + 3 v_y^2 + 3 v_z^2 = 3 v_z^2$



Bevonatva a részecskeszám-sűrűséget: $n_v = \frac{N}{V} \quad [n_v] = \frac{db}{m^3} = \frac{1}{m^3}$

$$\text{Ezzel: } p = n_v \cdot \frac{1}{3} m_0 \bar{v}^2$$

1 részecské átlagos mozgási energiája: $\bar{E}_m = \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2$

Ezzel: $p = n_v \cdot \frac{2}{3} \bar{E}_m \quad \leftarrow$ összefüggés egy fenomenológikus (mérhető): p e's mikroskopikus: \bar{E}_m mennyisége között

Dalton-törvény gázkeverékre

$$p = \sum p_i = \frac{2}{3} \sum n_{v_i} \bar{E}_{m_i}$$

\uparrow
parciális nyomások összege

HÖMÉRSEKLET ÉRTELMEZÉSE

(ideal gas law: $pV = nRT = Nk_B T$)

k_B Boltzmann-állandó $\sim 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
 \hookrightarrow fizikai állandók megjelenésével a mértekegyiségek változtása miatt van

$$P = \frac{N}{V} \frac{2}{3} \bar{\epsilon}_m \quad \left. \begin{array}{l} k_B T = \frac{2}{3} \bar{\epsilon}_m \\ \bar{\epsilon}_m = \frac{3}{2} k_B T \end{array} \right\}$$

Konstansok : • 3-as faktor: transzldció 3 irányban, $f=3$ (szabadsági fokok száma)
 szabadsági fok: energia kifejezésében megjelenő négyzetes tagok száma
 • 1/2 : →

Ekipartíció tétele: Az egy szabadsági fokra jutó energia $\frac{1}{2}k_B T$

egyenlő felosztás

- statisztikus fiz. -ból le lesz vezetve
 - csak magas hőmérsékleten igaz
 - kis hőmérsékleten a szabadsági fokok "kifagynak"
 - energia egységen belül oszlik el a szab. fokok között
 - $\bar{E}_m = \frac{3}{2} k_B T$ összefüggés fenomenológikus (makroszkopikus) és mikroszkopikus mennyiségek között

Pl 1 atomos gáz f=3 transzláció (pl. He)

Pl 2 atomos gáz (pl. N₂) f=5 → 2 forgási szab. fok

$$\uparrow \text{ } 1.7) 2. \quad \varepsilon_{\text{forg}} = \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_2 \omega_2^2$$

$O-O$ --- ← eköniel nem lehet forgathni
OKA: • kicsi a tehetetlensége

- kicsi a tehettelenségi nyomaték (nem pontos magyarázat)
 - kvantummechanikai magyarázat

? atomos gdz: transzláció + forgás + rizalás $f = 7 = 3+2+2$

rezgis: 1 TKP-i rendszerben való mozgás + rezges $f = 7 = 3+$
sebessége

$$\text{E}_{\text{req}} = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

potenciale

Belső energia ideális gázra

Tömegpontok összenergiája: $U = N \cdot \bar{E}_m = N \cdot \frac{f}{2} k_B T$ → U csak T -től függ: $U(T)$

FABHÖ LÉPCSÖK

$$C \stackrel{!}{=} \frac{dU}{\Delta T}$$

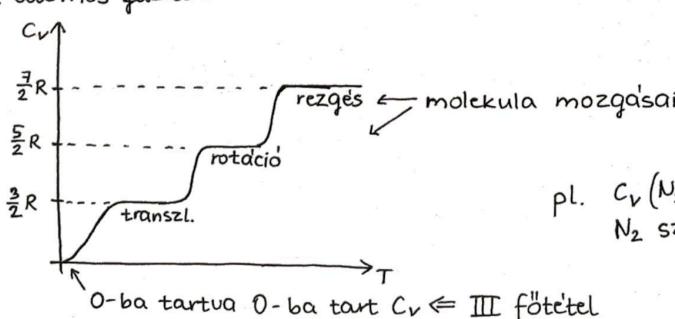
ΔT
in. mólho: $C_v = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial U}{\partial T}$ diandó terfogat mellett

mennyi hőt kell közölni a rendszerrrel, hogy adott mértékben

változzon meg a belső energiadja.

$$\text{ideális gázra: } C_V \text{ mólhoz: } U = N \cdot \frac{f}{\alpha} k_B T \Rightarrow C_V \equiv \frac{f}{\alpha} R$$

2 atomos gázra:



pl. $C_V(N_2, 300K) = 3,2 R$
 N_2 szobahőm-ön még nem rezeg

Cr: fenomenologikus
mennyiséq

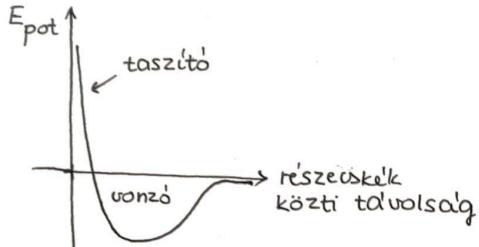
f: mikroszkopikus menny.

REALIS GÁZOK, VAN DER WAALS MODELL ← jó közelítés
 $U(T, V)$!

vdW: 1873: modell megalkotása, 1910 Nobel-díj

vdW: ideális gáz modell + 2 db empirikus parameter

- részecskék kiterjedése véges
- részecskék között vonzó kölcsönhatás van



ideális gázra: $p = \frac{nRT}{V}$

most van kizárt térfogat → V helyett $V - nb$

b: 1 mol gáz által kizárt térfogat
 (lehet T függő is akár)

Érdekesesség:



kötcsönhatásnál nem a valódi sugarat, hanem annak kétszeresét kell vennünk a kizárt térfogat vizsgálatakor

⇒ Ezzel: $p = \frac{nRT}{V-nb}$

vonzó k.h. = kohézió: $p = \frac{nRT}{V-nb} - P_{kohézió}$ ↑ kohézió csökkenti a részecske a falra kif. erejét

vdW ⇒ $p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$

a: empirikus konstans

n^2 : tapasztalat szerint jó egyezést ad,

illetve motiváció: párkölcsönhatás miatt négyzetes

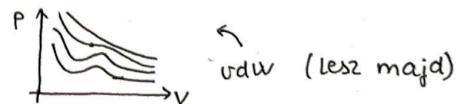
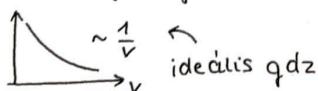
$\frac{n^2}{V^2} = \left(\frac{1}{N_A} \cdot n_V\right)^2$ (összes részecske összessége húzza vissza a részecskét)

Ezzel vdW gázok állapotegyenlete:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

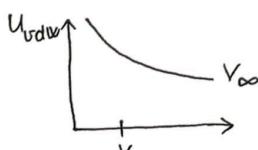
itt (+) előjel kell p csökkenteti értékű nyomás, hisz pozitív számot kell hozzáadnunk ($\frac{an^2}{V^2}$), hogy az egyenlet teljesüljön

Megj



vdW gáz belső energiája

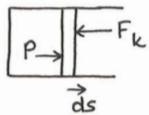
Munkatétel: $W = \int_{\text{út}} F \cdot dr$



kezdetben os térfogatot töltött ki
 $V \rightarrow \infty$ határcsetben: $U_{vdw}(V \rightarrow \infty) = U_{\text{ideális}}$
 (vonzó k.h., kizárt térfogat elhanyagolható)

$U_{vdw}(V) - U_{vdw}(V \rightarrow \infty) = \int_{\infty}^V dW = \int_{\infty}^V F \cdot ds$
 munkatétel

Modell: A felület



$$F_k = p \cdot A \text{ eggensúlyban}$$

ha találunk, akkor $F_k \cdot ds$ skálár szorzat Θ

$$\Rightarrow dW = -F_k \cdot ds = -p \cdot A \cdot ds = -pdV$$

kompozit által végezett munka

ha találunk: $dW < 0$

ha összenyomjuk: $dW > 0$

A köhözös nyomás munkavégzéséhez tartozó járulék kell, a többi megrán ideális gázban is.

$$P_{\text{koh}} = -\frac{an^2}{V^2} < 0$$

$$U(V) - U(V \rightarrow \infty) = - \underbrace{\int_{V \rightarrow \infty}^V}_{\substack{\text{vdW} \\ \text{belső E}}} \underbrace{P_{\text{koh}}(V') dV'}_{\substack{\text{ideális} \\ \text{gáz}}} = \int_{\infty}^V \frac{an^2}{V'^2} dV' = -\frac{an^2}{V'} \Big|_{\infty}^V = -\frac{an^2}{V}$$

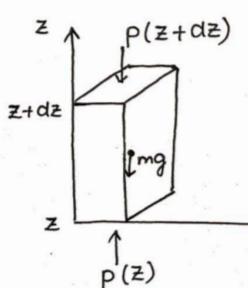
negatív: spontán összeugrana, de az entropia megakadályozza ill. vdW nem, érvényes ha V kicsi, ld. potenciált

$$\text{Ezzel: } U_{\text{vdW}}(V) = U_{\text{id}}(T) - \frac{an^2}{V} = \frac{f}{2} N k_B T - \frac{an^2}{V} = U_{\text{vdW}}(V, T)$$

FONTOS, hogy V -től is függ

Ezért fontos pl. $(\frac{\partial U}{\partial T})_V \leftarrow T$ szerinti derivált, $V = \text{const}$

BAROMETRIKUS MAGASSÁG FORMULA



dunra közelítés: $T = \text{áll}$

z : tengerszint feletti magasság $p(z) = ?$
kis térfogat elemre ható erők összege 0.

lefelé pozitív:

$$p(z+dz) \cdot A - p(z) \cdot A + mg = 0$$

$$mg = V \cdot \rho \cdot g = A \cdot dz \cdot \rho \cdot g$$

$$p(z+dz) = p(z) + dz \frac{dp}{dz} \Big|_z + o(dz^2) \quad \text{Taylor-sorfejtés}$$

$$\text{Ezzel: } A \cdot \frac{dp}{dz} \cdot dz + Adz \rho g = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho(z) \cdot g}$$

ez már csak közelítés

$(o(dz^2))$ elhanyag

$\rho(z) = \rho_0$ derrendő (jó közelítés)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot m_0}{V}$$

$$PV = N k_B T \rightarrow \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} = n_V$$

közelítés: légkör ideális gáz

Innen:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{m_0 g}{k_B T} \cdot p(z) \quad p(z=0) = p_0$$

dunra közelítés: T magasságfüggel

$$\boxed{p(z) = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g z}{k_B T}}} \Rightarrow \text{diszkusszió: } \boxed{m_0 g z} : 1 \text{ részecske helyzeti energiaja}$$

⊗: szintén a mikro-világ (m_0 által) és a makro-világ között teremt kapcsolatot

Kérdezés: hol lesz $m_0 g z = k_B T \rightarrow p = p_0 \frac{1}{e}$ „p hol voltak e-adrészével”

$$m_0(N_2) = 10^5 \cdot 10^{-34} \text{ kg} = 10^{-25} \text{ kg} \quad k_B T = 10^{21} \text{ J} \quad \text{gradiens: } 9 \text{ Pa/m}$$

$$10^{24} \cdot z = 10^{21} \text{ J}$$

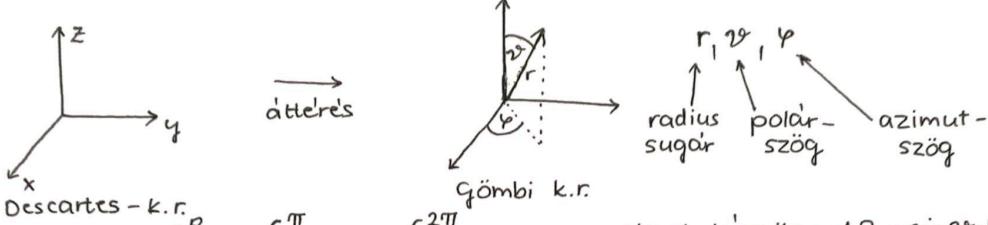
$$z = 10^3 \text{ m} \leftarrow 1000 \text{ m-en két osökken p a felelő (durván) valóság } 5 \text{ km}$$

hasonlóan jön még: $p(z) = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0}{k_B T}}$ Maxwell-Boltzmann eloszlás

$$\text{sűrűség: } n_V = \frac{P}{k_B T} \rightarrow n_V = n_V(0) \cdot e^{-\frac{m_0}{k_B T}} \quad (n_V: \text{részecskeszám-sűrűség})$$

MATEMATIKAI KITERŐ

integráldis görbült koordinatarendszerekben



$$\int dx dy dz = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi$$

elemi térszög: $d\Omega = \sin \varphi d\varphi d\psi$
 elemi felület: $dA = r^2 \sin \varphi d\varphi d\psi$
 elemi térfogat: $dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\psi$

Példa: gömb felszíne:

$$dA = R^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi = 4R^2 \pi$$

gömbfelületre: $r = R$

$$\text{gömb térfogata: } dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

RÉSZECSEK ÁRAM - SÜRÜSÉG

$$j = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

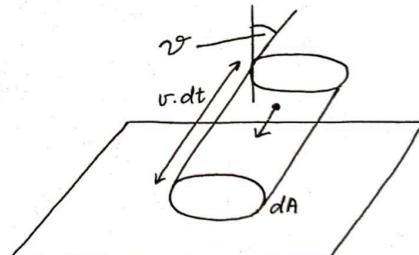
átlag-
sebesség

$f(v)$: sebességeleszlás sűrűség-függvénye

$dN_v = N \cdot f(v) dv$: olyan részecskek száma, melyeknek sebessége $\in [v, v+dv]$

$$dN_{dv, v, \varphi, \psi} = \frac{dv}{V} dN_v \cdot \frac{d\Omega_{\varphi, \psi}}{4\pi}$$

azon részecskek száma, térszög (ezzel
melyik a dv térfogatban vannak,
adott v sebességgel adott φ, ψ
irányban (adott térszög) mozognak



Végtelen sík lapon dA kis területet fogunk, mennyi részecske halad át ezen dt idő alatt? Azok haladnak át, amelyik jó helyen vannak, és jó irányban haladnak.

$$dv = v \cdot dt \cdot dA \cdot \cos \varphi$$

$$dN_{dA, dt} = \int_{\text{felér}} dN_{dv, v, \varphi, \psi} = j dA dt$$

definíció részecskeáram-sűrűség

dA felületen
 dt idő alatt áthaladó
részecskek száma

$$\text{Behelyettesítés: } dN_{dv, v, \varphi, \psi} = v \cdot dt \cdot dA \cdot \cos \varphi \frac{1}{V} N \cdot f(v) dv \frac{\sin \varphi d\varphi d\psi}{4\pi}$$

$$jdA \cdot dt = \frac{N}{V} \int v \cdot f(v) dv \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \cdot dA \cdot dt \frac{1}{4\pi} = \frac{N}{V} \bar{v} \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{1}{4\pi} dA \cdot dt$$

\bar{v} felér $\frac{1}{2} \sin(2\varphi)$ $\left. -\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$

$$j dA \cdot dt = \frac{N}{V} \bar{v} \frac{1}{4} dA \cdot dt \Rightarrow j = \frac{N}{V} \frac{1}{4} \bar{v} = \boxed{\frac{1}{4} n_v \bar{v} = j}$$

diszkrisszió:

$$[j] = \frac{db}{m^2 \cdot s} = \frac{1}{m^2 \cdot s}$$

$$[n_v \bar{v}] = \frac{db}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{db}{m^2 \cdot s}$$

(dimenzióanalízis)

$$\approx [j] = \frac{A}{m^2} = \frac{C}{m^2 \cdot s}$$

↑
áramsűrűség
(elektromos)

töltes:
„mit visz az áram”

TRANSZPORT FOLYAMATOK

→ Fizikai mennyiségeknek van inhomogenitása (terebeli egyenetlensége)
pl. koncentráció, hőmérséklet, potenciál

→ Ekkor áramlások, áramok alakulnak ki
pl. részecskeáram (diffúzió)
energiááram (hővezetés)

töltesáram (elektromos áram)

impulzusáram (viszkozitás) → itt a sebességprofil nem homogén

Részecske mozgása: ütközik, 2 ütköző között megtett út: átlagos szabad úthossz: \bar{l}
d átmérőjű gömbök



ütközéshez 2d átmérőjű (d sugarú)
csöben kell mozognia

Ha dt időnkorban ütközik: $dV = \bar{v} dt \cdot d^2\pi \stackrel{!}{=} \bar{\sigma} \bar{v} dt$
 $\bar{\sigma}$: hatáskeresztmetszet (általános fogalom) definíció $\bar{\sigma}$ hatáskeresztmetszetre

$\bar{\sigma} = d^2\pi$ $[\bar{\sigma}] = m^2$

$$dV = \bar{\sigma} \bar{v} dt = \frac{V}{N} = \frac{1}{n_v}$$

$$pV = N k_B T \rightarrow \frac{V}{N} = \frac{k_B T}{P}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} \bar{v} dt = \boxed{\bar{\sigma} \bar{l} = \frac{k_B T}{P}}$$

szabad úthossz bevez: $\bar{v} dt = \bar{l}$
mikro makro

$\frac{1}{n_v}$: 1 részecske számára fennálló térfogat
(dV : 1 részecske számára fennálló átl. térfogat)

$$\longrightarrow \text{innen: } \boxed{\bar{l} = \frac{k_B T}{P \bar{\sigma}}}$$

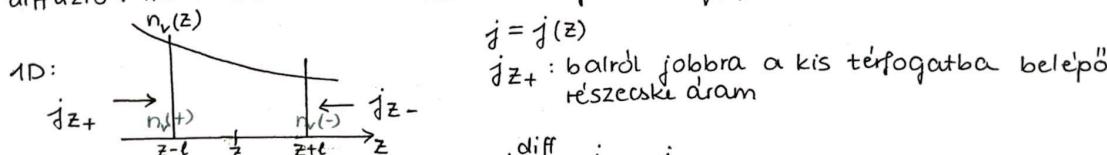
Példa: He (leg kisebb gáz részecske)

$$d = 31 \text{ pm} \rightarrow \bar{\sigma} = 3 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ mbar He-ra: } \bar{l} = 1 \text{ mm} \quad (\text{ballistikus transzport}) \leftarrow \text{nem diffuzív}$$

DIFFÚZIÓ A SZABAD ÚTHOSSZ KÖZELÍTÉSBEN

diffúzió: ha a részecskeszám nem homogén → $n_v(z)$



diffúziós részecskedáram-sűrűség: $j_z^{\text{diff}} = j_{z+} - j_{z-}$

$$\text{tudjuk: } j = \frac{1}{4} n_v \bar{v}$$

↳ csalás: 3D-ben vezettük le, de most 1D-t tekintünk
($\frac{1}{4}$ dimenziófüggő konstans)

$$j_z^{\text{diff}} = \frac{1}{4} \bar{v} \left(n_v(+)-n_v(-) \right) = \frac{1}{4} \bar{v} (n_v(z-\bar{e}) - n_v(z+\bar{e})) \quad \otimes$$

↑
tdv: $\frac{dn}{dz}$ szabad úthossz közelítés:

Fizikai mennyiségek \bar{e} -nél kisebb léptékben nem tudnak folytonosan változni!
 Sorfejtés: $n_v(z+\bar{e}) \approx n_v(z) + \bar{e} \frac{dn}{dz}$
 $n_v(z-\bar{e}) \approx n_v(z) - \bar{e} \frac{dn}{dz}$

$$\otimes: j_z^{\text{diff}} = -\frac{1}{2} \bar{e} \bar{v} \frac{dn}{dz}$$

θ döjöl!

diffúziós állandó: $D = \frac{1}{2} \bar{e} \bar{v}$ ($\frac{1}{2}$: dimenziófüggő konstans ($\frac{1}{4}$ dim. függő volt))

$$3D: j^{\text{diff}} = -\frac{1}{2} \bar{e} \bar{v} \nabla n$$

Fick-törvény: $j^{\text{diff}} = -D \nabla n$ D: anizotrópban \underline{D}

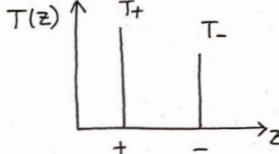
$\Gamma D \sim \frac{1}{l^m}$ D-nek m-függése van \Rightarrow uránidúsításban fontos szerep
 $D_{U^{238}} < D_{U^{235}}$ nehezebb részecske \rightarrow kisebb seb.

↓

HÖVEZETÉS \rightarrow energia áramlik

1 részecske energiadaja: $\bar{E} = \frac{3}{2} k_B T$ ($\frac{f}{2} k_B T$) höm. dimenziójú

$$j_z^{\text{ho}} = \frac{f k_B}{8} n_v \bar{v} \underbrace{(T_+ - T_-)}_{-2 \bar{e} \frac{dT}{dz}} = \frac{-f k_B}{84} n_v \bar{v} \bar{e} \frac{dT}{dz}$$



átirrva: $j_z^{\text{ho}} = -\lambda \frac{dT}{dz}$, ahol $\lambda = \frac{f k_B}{8} n_v \bar{v} \bar{e}$ hövezetési együttható
 pontosabban: $\lambda = \frac{f k_B}{8} n_v \bar{v} \bar{e}$ faktor a többi részecske mozgásából ered

3D-ben: $j^{\text{ho}} = -\lambda \nabla T$ Fourier-törvény

(ELEKTROMOS) ÁRAM

áram: $j = \sigma E$

↑ fajlagos vezető képesség

potenciál inhomogenitásából fakad az áramlás $E = -\nabla \psi$

differenciális Ohm-törvény:

$$j = -\sigma \nabla \psi$$

Drude-modell (Paul Drude 1900)

$$m\ddot{v} = -eE - \underbrace{Kv}_{\text{viskösus tag}} v_{\text{agg}} \frac{mv}{\tau} = Kv$$

$$\ddot{v} = -\frac{eE}{m} - \frac{v}{\tau} \quad \text{dimensionslisan OK.}$$

Stacionäres u.o.

$$\frac{eE}{m} = -\frac{v}{\tau} \Rightarrow v_{\text{drift}} = -\frac{eE\tau}{m}$$

(j) menigges

$$[v_d] = N^E$$

N : mobilität, v_d in Schmelzpot.

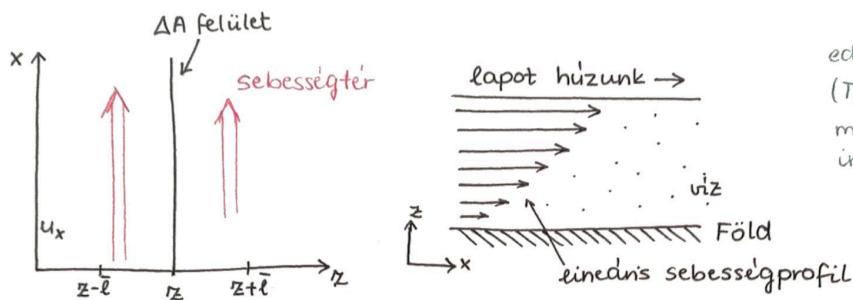
$$\boxed{N = \frac{e\tau}{m}} \quad \text{Forts!}$$

$$j = -ne v_d \quad j \propto \frac{1}{m^3}$$

$j = eE$ svarer til

$$j = \frac{ne^2 \tau E}{m} \Rightarrow \boxed{\epsilon = \frac{ne^2 \tau}{m}}$$

VISZKOZITA'S



eddig skálármennyiségek
(T, n, \dots) gradienset tekintettük,
most az impulzusnak van
irányja is

impulzusáram

u_x : x irányú sebesség nagysága

ΔA : felület : impulzus ezen át áramlik

$$\underline{j}_z^{\text{imp}} = \frac{1}{4} n_r \bar{v} (p_x(z - \ell) - p_x(z + \ell)) = -\frac{1}{2} n_r \bar{v} m \ell \frac{du_x}{dz}$$

$$p_x(z - \ell) = m \left[u_x(z) - \ell \frac{du_x}{dz} \right]$$

$$p_x(z + \ell) = m \left[u_x(z) + \ell \frac{du_x}{dz} \right]$$

$$\text{viskozitás: } \eta = \frac{1}{2} n_r \bar{v} \ell m \rightarrow \underline{j}_z^{\text{imp}} = -\eta \frac{du_x}{dz}$$

$$[\underline{j}_z^{\text{imp}}] = \underbrace{\frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m \cdot \text{kg}}_{[\eta]} \cdot \frac{1}{s} = \underbrace{\frac{\text{kg} \cdot m}{s}}_{\text{impulzus dimenziója}} \cdot \frac{1}{m^2 s}$$

Newton - törvény

$$\underline{j}_z^{\text{imp}} = \text{const} = \frac{N}{m^2} \quad \text{"nyiro' erő", nyirofeszültséget rendeliink hozzá}$$

$$\boxed{\tau = -\eta \frac{du_x}{dz}}$$

Newton-törvény, τ : nyirofeszültség
↳ Newtoni folyadékokra teljesül

\bar{v} : részesekkel átlagsebessége

$\frac{du_x}{dz}$: makroszkopikus részesek áram
sebessége

$$\boxed{\underline{j}^{\text{imp}} = -\eta \nabla u}$$

TRANSZPORT FOLYAMATOK ÖSSZEFOGLALA'SA:

$$\underline{j}_{\text{diff}} = -D \nabla n$$

$$[\underline{j}_{\text{diff}}] = \frac{db}{m^2 s} = \frac{1}{m^2 s}$$

$$\underline{j}_{\text{hö}} = -\lambda \nabla T$$

$$[\underline{j}_{\text{hö}}] = \frac{\mathcal{J}}{m^2 s}$$

$$\underline{j}_{\text{el}} = -\sigma \nabla \psi$$

$$[\underline{j}_{\text{el}}] = \frac{C}{m^2 s} = \frac{A}{m^2}$$

$$\underline{j}_{\text{imp}} = -\eta \nabla u$$

$$[\underline{j}_{\text{imp}}] = \frac{\text{kg} \cdot m}{s} \cdot \frac{1}{m^2 s}$$

$$\rightarrow [\eta] = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m \cdot \text{kg} = \frac{\text{kg} \cdot m}{m^2 s}$$

$$[\rho] = \frac{\text{kg} \cdot m}{s}$$

↳ impulzus

MAXWELL - FÉLE SEBESSEGELOSZLA'S

$f(v) = ?$; mi a sebesseg eloszlásfüggvénye?

Nem bizonyítjuk, Maxwell gondolatmenetét követjük

$$f(v) = f_1(v_x) \cdot f_2(v_y) \cdot f_3(v_z) = f_1^3 \quad \bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 \quad (\text{Pitagorasz-tétel})$$

↑ függetlenek a sebessegek arányosak } nincs kitüntetett irány
sebesseg eloszlás sűrűségfüggvénye

Maxwell javaslata: v_x csak a nagyságtól: v_x^2 -től függön

$$\text{Próbafu: } f(v_x) = A \cdot e^{-\frac{1}{2} v_x^2} \quad (\text{Gauss-függvény})$$

Kitüntetett: • önmaga Fourier-transzformáltja

• központi határlosztás tétel

sok független statisztikai folyamat összessége
gauss-fu-t ad

valódi/normalit
gauss-fu

természetben gyakran előfordul)

$$\text{Gauss-fu tulajdonságai: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx \quad \text{és} \quad \bar{x}^2 - \bar{x}^2 = \sigma^2$$

Ezzel: $f(v) = A^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = A^3 e^{-\frac{1}{2}v^2}$
 A és σ meghatározása integrálással → most: ugyanással a felirat tulajdonságokból

$$\bar{v}_x^2 = \int v_x^2 A \cdot e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\bar{v}_x^2}}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{v}_x^2} \quad (\bar{v}_x = 0 \text{ lenne!})$$

$$\Rightarrow \text{teljes fu: } f_1(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\bar{v}_x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{v_x^2}{\bar{v}_x^2}}$$

$$\bar{v}_x \text{ meghatározása: } \bar{v}_x^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2 \quad \text{és} \quad \bar{v}_m = \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2 \quad \text{csak transzlációra mozd. energia}$$

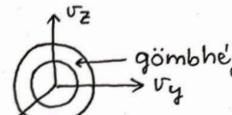
$$\rightarrow \bar{v}_m = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow \bar{v}_x^2 = \frac{k_B T}{m_0} \quad \begin{matrix} \text{makrovilág} \\ \text{mikrovilág} \end{matrix}$$

ekipartíció tétel: csak magas hőmérsékleten
egyatomos részecske, csak transzláció

⇒ visszalírva:

$$f(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

$\underbrace{A^3}_{\text{A}^3} \quad \underbrace{e^{-\frac{1}{2}v^2}}_{\text{exponensben: } \frac{\bar{v}_m}{k_B T}}$ \$\bar{v}_m\$ mozgási energia


gömbhéjakon belüli sűrűségfüggvény: $f(v)$
hány részecske van a sebesseg [v, v+dv]-ban?

gömbhéjban lévő részecskék száma: $dN = N \cdot \underbrace{4\pi v^2 f(v)}_{F(v)} dv = N \cdot F(v) \cdot dv$

$$\text{Ahol } F(v) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{m_0}{2k_B T} \right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

Tul.-ai: $\bar{v} = \langle v \rangle = \int v F(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_0}}$ 3-szoros parciális integrálással kapható

$$\bar{v}^2 = \langle v^2 \rangle = \int v^2 F(v) dv = \frac{3k_B T}{m_0}$$

\bar{v} átlagseb. $\sqrt{\frac{1}{m_0}}$ → ed. urán: tömeg alapján az átlagseb. különböző ar izotópjaira

átlagtól eltérés $\sim \frac{1}{m_0}$ (szórásra jellemző)

Azaz a hőmérséklet 2 különböző fizikai mennyiségen jelenik meg: átlag, szórás is növekszik T növelésével

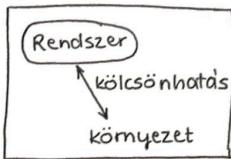
FENOMENOLOGIKUS TERMODINAMIKA

(jelenségeket leíró hőtan)

FIZIKAI MENNYSÉGEK:

Extenzív: függ a rendszer méretétől, pl. V, n, S ↑ entrópia
alrendszerre additív anyagmenny.

Intenzív: nem függ a rendszer méretétől, pl. p, μ, T
alrendszerre arányos kémiai potenciál
kölcsönhatás kor kiegyenlítődik



Egyensúly: a rendszere jellemző fizikai mennyiségek térben és időben állandóak
homogén stacionárius

A 0. főtétel átfogalmazva: a rendszert magára hagyva elérni az egyensúlyt
↔ létezik egyensúly

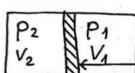
Alapjelzők: az egyensúlyt jellemző fizikai mennyiségek

Kölcsonhatás: Intenzív mennyiségek ("termodinamikai erő") különbözősége hajtja
az extenzív mennyiségek meghatározását

$$\text{analógia: } m\ddot{a} = \vec{F} \text{ erő}$$

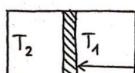
rendszerre
jellemző kiváltó hatás
arányoss. tényleg.

pl. mechanikai kölcsonhatás:



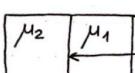
pl. $P_1 > P_2$ V_1 nő, V_2 csökken
dugattya

termikus kölcsonhatás:



ha $T_1 > T_2$: hő áramlik át $1 \rightarrow 2$ -be
(entrópia változik)

anyagi kölcsonhatás:



ha $\mu_1 > \mu_2$: anyag áramlik át
anyagáramlást megengedő membrán

kölcsonhatás	intenzív	extenzív	szigetelés (ne legyen k.h.)
mechanikus	P	V	metű fal
termikus	T	S	hőszigetelő fal
anyagi	μ (~ koncentráció) energetikailag hol kedvezőbb	n	anyagáramlást akadályozó fal
elektro-sztatikai	elektromos potenciál: φ	q töltés	elektromosan szigetelő fal
elektromos dipól	elektromos tér E ($E = -\nabla\varphi$)	dipól mo- mentumok összesége: P	elektromosan szigetelő fal
mágneses	mágneses indukció B	mágneses dipólmomen- tumok száma m	mágnesesen árnyékolt fal
rugalmas	erő, F	x, hossz változás	rugalmas kcsch-t korlátozó

intenzív	extenzív	[ext. + int.]
P	V	$\frac{N}{m^2} \cdot m^3 = Nm = \bar{J}$
T	S	$K \cdot \bar{J}/K = \bar{J}$
μ	n	$\frac{\bar{J}}{mol} \cdot mol = \bar{J}$
γ	φ	$V \cdot A_s = \bar{J}$
E	P	$\frac{V}{m} \cdot A \cdot s \cdot m = \bar{J}$
B	m	$\frac{Vs}{m^2} \cdot Am^2 = \bar{J}$
F	x	$N^* m = J$

Polarizáció: $P = \frac{\sum P}{V}$ $[P] = C \cdot m \cdot \frac{1}{m^3} = \frac{A \cdot s}{m^2}$ $D = \underbrace{\epsilon_0 E}_{\text{elektromos eltolás}} + P$ $\oint D dA = \oint \sigma dV = Q$

$[\underline{E} \cdot \underline{P}] = \frac{\bar{J}}{m^3}$ térfogati energia

magnesezettség: $M = \frac{\sum m}{V}$ $[M] = \frac{A}{m}$

$[\mu_0 M] = \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{Vs}{m^2}$

$[\underline{B} \underline{M}] = \frac{\bar{J}}{m^3}$ térfogatgyűségen lévő magnetosztatikus energia

$\oint H \cdot dr = \int j dA = I \rightarrow [H] = \frac{A}{m}$

$B = \mu_0 (H + M)$

ALAPFOGALMAK

zárt rendszer: nem vesz részt kölcsönhatásokban

Hegyezést: Ahányfelé k.h.-ban vesz részt egy rendszer, annyiszor 2 áuapotjelző jellemezheti.

A'll.: A tapasztalat szerint elég ismerni annyi extenzívét, ahány k.h. van + 1 db intenzív.

PL termikus + mechanikai k.h.: 3 db áuapotjelző elég, de 4 van (túlhatározott probléma)
Lehet mérni minden 4-öt, de csak 3 független van

Ha túlhatározott, tul sok áuapotjelző van: lesznek összefüggések az áuapotjelzők között.

PL + mechanikai k.h.: $pV = nRT$ → p, V, T nem függetlenek

* mechan. + term. k.h.: $pV = nRT$ → p, V, T nem függetlenek

A'litalában: 3 lin. áuapotegyenletek: $f(p_1, V_1, T_1, S_1, \mu_1, n_1, \dots) = 0$
(pl. $pV - nRT = 0$)

Folyamat: az áuapotjelzők megaltozása

* kudzi-sztatikus folyamat: "lassú" folyamat, egyensúlyi áuapotokon keresztül zajlik, ezeken keresztül végez létezzenek áuapotjelzők

* reverzibilis folyamat: a külső hatásokat megfordítva a rendszer a kiinduló áuapotba jut vissza (ilyen nem létezik, de jól közelíthető)

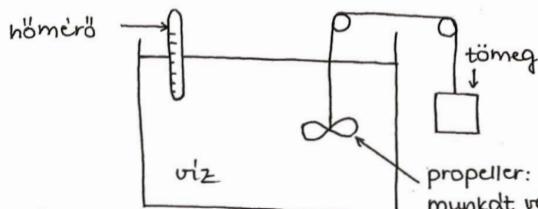
↳ alternatívek megaltotható, de az egész rendszere/világra nézve nem

HÖTAN I. FÖTÉTELE

A tapasztalat szerint a mechanikai munka hőré alakul. (Fordítva nem igaz II. fötétel)

Hötan I. fötétele ≡ Energiamegmaradás tétel (mechanikai és termikusra)

Joule - kísérlet:



miközben a tömeg munkált végez (grav. erőtér): propellert forgatja → hőméseklet megaltozik (nincsen mérhető)

$m = 1 \text{ kg}, h = 1 \text{ m}$ elmozdulás
 $1 \text{ kg} \text{ víz} \rightarrow W_{\text{mecha}} = \Delta E_{\text{pot}} = 10 \text{ J}$

$c_{\text{víz}} = 4200 \text{ J/kg K} \rightarrow \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{m \cdot c} = \Delta T \quad \Delta T = 2 \text{ mK}$

A rendszer 2 állapot közti átmenethez mindenig ugyanazt a mechanikai munkát kell végezni.

analógia: Munkatétel: $\Delta E_{\text{mech}} = \int \underline{F} \cdot d\underline{r} = W$

Az analógia alapján definíálható ún. belső energia (= termodinamikai potenciál)
jele: U , ez is állapotjelező

\uparrow analógia
 \downarrow potenciális energia

$\Delta U_{AB} = U_B - U_A$: extenzív, $U = U(T, p, n, \dots)$

Eddig: a munkavégzés a belső energiadalt változtatja meg.

A tapasztalat szerint a testek belső energidalt hőközlessel is megváltoztathatjuk.
(a hőközlelés is mechanikai munka mikroszkopikusan) ← rendezetlen

Ezzel kiegészítve: $\Delta U_{AB} = U_B - U_A = W + Q$

\uparrow
I. főtétel matematikai alakja rendszeren végzett munka rendszerrel mikroszkopikus között hő } mech. k.h.

I. főtétel

ΔU is csak a kezdeti és a végállapototól függ (útdolnem)

Elémi folyamatokra: (eddig véges folyamatokra írtuk fel)

$$dU = \delta W + \delta Q$$

dU : belső energia teljes differenciálja, útfüggetlen, csak kozdó e's végponttól függ

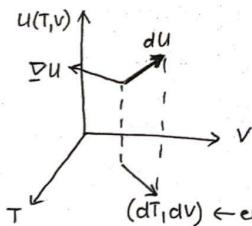
$\delta W, \delta Q$: élmi munkavégzés, élmi hőközlelés: útfüggő, az adott állapot-változástól függ

Teljes differenciál: (matematikai def.) ha $U(T, V)$ (azaz U a T e's V függvénye),

akkor $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V=du} \cdot dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T=dV} \cdot dV$

(Taylor-sor: $f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} (x-x_0) + o((x-x_0)^2)$)

↳ Szemléltetés: $U: T$ e's V változóktól függő skálár mennyisége



$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \Big|_{V=dV}, \frac{\partial U}{\partial V} \Big|_{T=dT} \right)$$

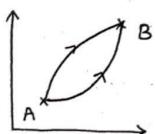
gradiens: maximális változás irányába mutató vektor

$$\text{A'elütsés: } dU = (dT, dV) \cdot \nabla U = \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_{V=dV} \cdot dT + \frac{\partial U}{\partial V} \Big|_{T=dT} \cdot dV$$

skáláris szorzás



W e's Q útfüggő, ΔU nem!

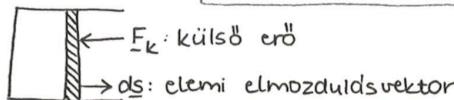


Adott hő: $dU = \delta W + \delta Q \rightarrow \delta Q = dU - \delta W$

ún. adiabatikus folyamat: nincs közölt hő, ekkor $dU = \delta W^{\text{ad}}$; viszont: elvben dU csak munkavégzések méréséből megkapható

MUNKAVÉGZÉS FAJTAI

Mechanikai:



$$W = \int F \cdot ds$$

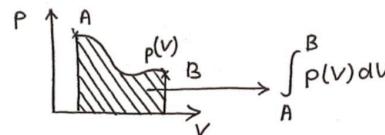
$$dW = F_k \cdot ds = -p A \cdot ds = -p dV \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{előjel: rendszer szempontjából} \\ \text{erő, elmozd. vektor} \\ \text{ellenállás irányú} \end{array}$$

- * Ha a külső erő munkát végez $\delta W > 0 \rightarrow$ összenyomjuk $\rightarrow dV < 0 \rightarrow -p dV > 0 \checkmark$
- * Ha a gáz végez munkát: $\delta W < 0 \rightarrow$ kiszáll $\rightarrow dV > 0 \rightarrow -p dV < 0 \checkmark$

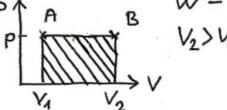
Hakroszkopikus folyamatokra:

$$W = \int_A^B -p(V) dV$$

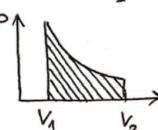
W a görbe alatti előjelű terület $x(-1)$



PL. izobár: p $W = -p(V_2 - V_1) < 0$ ha tágul



PL. izoterm: $p = \frac{nRT}{V}$ $W = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0 \quad \leftarrow 0 \quad \text{ha a gáz tágul: } V_2 > V_1$



Általánosított munkavégzés:

pl. anyagi munka: $dW = \mu dn$ \uparrow intenzív \downarrow extenzív

elektrosztatikus: $dW = \varphi dq$
kondenzátor energiajára \rightarrow itt van a bevezető

Általánosított munka: $dW = X d\zeta$

ha több kölcsönhatás is van: $dW = \sum_i x_i d\zeta_i$

Ezzel az I. főtétel legáltalánosabb alakja: $dU = dQ + \sum_i x_i d\zeta_i$
(\rightarrow pl. $dU = dQ - pdV + \mu dn + \varphi dq, \dots$)

Példa: autó motorja: p $10 \text{ bar} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
 V
 10^{-3} m^3 térfogatú dugattyú

$\left. \begin{array}{l} \text{egy ciklus alatt} \\ pV = 10^3 \text{ J} \\ \text{teljesítménye: } 10^3 \text{ J} \cdot 50 \frac{1}{s} = \\ = 50 \text{ kW} \approx 70 \text{ LE} \end{array} \right\}$

Példa: gumi

- munkát végezünk egy testen \Rightarrow nő a belső energiaja
- gumit kifeszítjük, ezzel megnöveljük a belső energiáját. Ezután megfeszítve várunk, amíg hőt ad le, lehűl. Utána összeugrasztva hidegelbe vallik.
- összeugrasztáskor munkát végez a gumi, erre csökken a belső energiaja, így lehűl.
- rubber band refrigerator erez az elven működik

TAPASZTALATI HÖ

(hő, műlhő, fajhő)

Tapasztalat szerint közölt hő arányos a hőmérsékletváltozással.

$$\delta Q = K \cdot dT \quad \text{hőm. vál.}$$

hőkapacitás (adott teste)

$$K = c \cdot m \rightarrow c : \text{fajhő} [c] = J/kg \cdot K$$

$$K = C \cdot n \rightarrow C : \text{műlhő} [C] = J/mol \cdot K$$

δQ folyamatfüggő \Rightarrow megfelelő fajhők is azok

Spec. esetek: 1) $C_V \Rightarrow V$ állandó ha $T = du \Rightarrow C = 0$ (triv.)

2) $C_p \Rightarrow p$ állandó

1) $V = \text{állandó}$ I. főtétel: $du = \delta Q - pdV \rightarrow \delta W = 0$ nincs térfogati munka

$$du = \delta Q_V = n \cdot C_V \cdot dT$$

$du \cdot V$ definíció (C_V -nek)

$$\text{Innen: } du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T dV = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V dT \quad (\text{teljes differenciál})$$

Két egyenlet összehasonlításából: $\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V dT = n \cdot C_V \cdot dT \leftarrow$ itt dT tetszőleges, ezért az együtthatóknak meg kell egyenlíük

$$\Rightarrow C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V \leftarrow \text{kitüntetett mennyiséq, mert mérhető}$$

2) $p = \text{állandó}$ $\delta Q_p = n C_p \cdot dT$ (C_p definíciója)

$$du = \delta Q - pdV \text{ most van térfogati munka}$$

átrendezés: $\delta Q = du + pdV$

új fizikai mennyiséq: entalpia $H = U + PV$ $[H] = J$

$$\hookrightarrow dH = du + d(PV) = du + pdV + Vdp$$

ha $p = du \Leftrightarrow dp = 0: dH_p = du + pdV$

$$\Rightarrow dH_p = \delta Q$$

Tekintsük H -t p és T függvényének! Teljes differenciál: $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dp + \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT$

$$\hookrightarrow \text{ezzel ha } dp = 0 \quad dH_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT$$

$$\Rightarrow dH_p = \delta Q = n C_p dT$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT = n C_p dT \quad : dT \text{ tetszőleges infinitesimalis mennyiséq}$$

$$\Rightarrow C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad \text{Emlék: } C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V \Rightarrow \text{rókon mennyiségek}$$

A KÉT FAJHŐ KAPCSOLATA

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \frac{1}{n}$$

$$C_p - C_V = ?$$

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V \frac{1}{n}$$

I. főtétel: $du = \delta Q + \delta W \rightarrow \delta Q_p = du + pdV \quad (\text{csak térfogati munka})$

$$\delta Q_p = n C_p dT \quad (\text{definíció alapján})$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T dV$$

\otimes behelyettesítés:

$$\Rightarrow n C_p dT = n C_V \cdot dT + dV \left[\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T + P \right] \quad \leftarrow 2 \text{ infinitesimalis tag, serepel, } dV \text{-t szeretnék elminálni}$$

Tekintsük V -t a másik kit ducapotjáró függvényként: $V = V(p, T)$

$$\text{teljes differenciája: } dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT \stackrel{p=du}{=} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT$$

(csakis: dV infinitesimalis mennyiséget teljes differenciálként tekintem)

\Rightarrow így dV -t dT -vel arányos alakra hoztuk. Behelyettesítve:

$$n(C_p - C_v) dT = dT \left[\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$C_p - C_v = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T + P \right] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

izobár hőtágulási együttható (definíció): $\beta_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

izoterm kompressibilitási együttható: $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ (van Θ előjel!)

$$\Rightarrow C_p - C_v = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T + P \right] V \cdot \beta_p$$

később jön, fontos, általános $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T$ -val analógia alapján

Ideális gázra:

$$pV = nRT \text{ és } U = U(T) = \frac{f}{2} nRT$$

$$\begin{cases} dU_V = nC_V dT \\ dU_P = nC_P dT - pdV \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} U \text{ csak } T \text{-től függ, ezért ez a 2 mennyisége egyenlő} \\ \uparrow \\ \text{feltesszük, h. a hőmérséklet megváltozása arányos} \\ \text{terefogat változás (ha csak } T \text{ változik:)} \end{array} \right\} dU_P = \frac{nRdT}{P}$$

ha dT arányos, akkor $dU_V = dU_P$

$$nC_V dT = nC_P dT - \frac{nRdT}{P} \cdot P \Rightarrow C_p - C_v = R > 0$$

$C_v < C_p$, mert állandó tereforgaton a hő csak működít a rendszert (nincs munkavégzés)
állandó nyomáson van munkavégzés, között hő egy része munkává alakul,
ezért ugyanakkor T változásra nagyobb hőt kell közelíni

Altalános képletből:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \beta_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V} \cdot \frac{V}{T} = \frac{1}{T}$$

$u(T)!$ $V = \frac{nRT}{P}$

$$\Rightarrow C_p - C_v = \frac{1}{n} \cdot P \cdot V \cdot \frac{1}{T} = R$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{f}{2} nRT - b \quad \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V = nC_v \rightarrow C_v = \frac{f}{2} R \\ C_p &= C_v + R \Rightarrow C_p = \frac{f+2}{2} R \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f} = \gamma \\ \text{fajhőhányados} \end{array} \right\}$$

Példa:

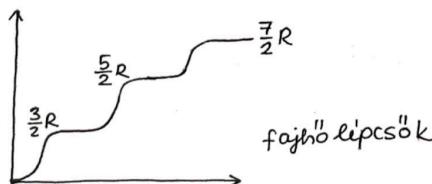
	C_v/R	C_p/R
H_2	2,43	3,46
CO	2,43	
N_2	2,39	3,5
Br_2	3,39	

számok alakjának oka:

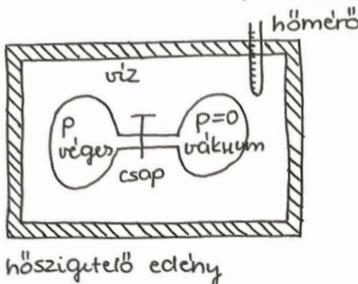
- legtöbb hőmérsékleten a szabadsági fok természetes szám \rightarrow fajhőlépcso
- nem ideális gáz

$$C_p - C_v \approx R$$

szobahőmérsékleten: H_2 forog, nem rezeg
 Br_2 forog, rezeg $3,39 \approx \frac{7}{2}$



GAY - LUSSAC KÍSÉRLET



- 1, csapot kinyitjuk
- 2, Tapasztalat szerint fürdő hőmérséklete nem változott

$$dU = \delta Q + \delta W$$

nincs hőközlelés

nincs munkavégzés,
mert vakuumban talál

($\nabla F_{kül}$, ami ellenében munkát végezne)

$dU = 0$ belső energia állandó, DE: p és V változott, de T és U állandó,
így U nem függhet p, V -től, csak T -től!

$$U = U(T)$$

Ideális gáz koncepciójának alapja (pontosan nem igaz, "szerencsés mérési hiba",
a nagy hőkapacitású folyadék miatt)
ekvivalens definíciója az ideális gáznak!

$$\text{VALÓDI GAZZAL: } U_{\text{vákuum}} = U_{\text{id}} - \frac{an^2}{V} = nC_V T - \frac{an^2}{V}$$

$$dU = \delta Q + \delta W = 0$$

ha nincs hőközlelés, gyorsan talál

adiabata

$$U_1 = U_2$$

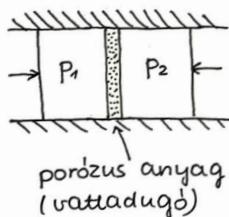
de $V_1 \rightarrow V_2$ -re talál

$\Rightarrow T$ -nek kell változnia!

nyitás előtt nyitás után

$$nC_V T_1 - \frac{an^2}{V_1} = nC_V T_2 - \frac{an^2}{V_2} \rightarrow T_2 - T_1 = \frac{an^2}{nC_V} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) < 0 \quad \text{lehűl a gáz}$$

JOULE - THOMSON KÍSÉRLET (Lord Kelvin)



Lassan mozgatjuk, miközben nyomás állandó (pl. rugóerő)
 $P_1 \neq P_2$, állandó nyomás-különbség
 hőszigetelő fal \rightarrow nincs hőközlelés $\rightarrow dU_1 = -P_1 dV_1$
 ($\exists-T$ a G-L pontosabban megismertlése)

$$\Delta U = - \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = - \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV = - \int_{P_1}^{P_2} P dV = P_1 V_1 - P_2 V_2$$

bal oldalon $V_1 \rightarrow 0$
 jobb old.: $0 \rightarrow V_2$

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$, egyesen és kettesen végzett munka összege

átrendezve: $U_{\text{vég}} + P_2 V_2 = U_{\text{kurd}} + P_1 V_1$; $H = u + PV \rightarrow H_{\text{vég}} = H_{\text{kurd}}$ állandó, de U nem!

felírva: $H = H(P, T)$ és $dH = 0$, mert $H = du$.

$$dH = 0 = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T}_{nC_P} dP + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}_{dH} dT, \quad \text{átrendezve: } \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = -\frac{1}{nC_P} \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$$

Joule-Thomson együttható: $\mu_{\exists T} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ entalpia állandó

szemléletes jelentés: $\mu_{\exists T} > 0 \rightarrow$ talál, P csökken $\rightarrow T$ csökken

$\mu_{\exists T} < 0 \rightarrow P$ csökken $\rightarrow T$ nő

szabdalszifon,
biciklipumpa

"Pongyola"

① Inverz függvény deriváltja

$$y(x); \quad y^{-1} = x(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{formálisan}$$

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

szemlélet:

inverz-füg: $y = x - \text{re tükörzés}$



② Függvény egyenlete

$$f(x, y) = \text{const}$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx = 0$$

↓↓ átossztás

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{f=\text{const}} = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}$$

Példa: (jön) ← adiabata egyenlete

$$a \cdot \frac{dT}{T} = - \frac{dV}{V} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dT}{dV} = - \frac{T}{aV} \\ y' = -b \frac{V}{x} \end{array} \right\}$$

$$y' = -b \frac{V}{x} \quad \text{mo: polinom: } y = x^{-b}, \quad \text{Ell: } y' = -bx^{-b-1}$$

③ Implicit deriválás

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$\Phi = y(x)$ megoldása x -re bonyolult, de mi van, ha ennek csak $\frac{dy}{dx}$ érdekel?

$$F(y, x) = y - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\Phi = \frac{dy}{dx} = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

"Pongyola"

$$dT (C_p - C_v) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \cdot \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \cdot dT$$

dT -vel leosztunk
(egyszerűsítünk)

"Precíz"

dT tetsz. infinitezimális mennyisége, ennek együtthatója a két oldalon arányos kell legyen (mert dT tetszőleges mennyisége)

$$\text{Példa: } a dT + b dV = c dT + e dV$$

$$\text{innen: } a = c \\ b = e$$

Joule-Thomson folyt:

IDEALIS GÁZRA: $u = u(T)$, $H = H(T)$

$$\text{innen: } \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0 \rightarrow \boxed{\mu_{JT} = 0} \leftarrow \text{id. gázra}$$

Azonosság (jön)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\text{Ezzel: } \mu_{JT} = - \frac{1}{nC_p} \cdot \left(V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \right) \otimes$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = ? \quad \text{ideális gázra: } V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{V}{T}$$

van der Waals

$$\text{állapotegyenlet: } \left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad \mu_{JT, \text{vdrw}} = ?$$

$\frac{\partial}{\partial T}$ állapotegy., $P = \text{áll.}$:

$$-\frac{2an^2}{V^3} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (V - nb) + \underbrace{\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)}_{\frac{nRT}{V-nb}} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = nR$$

$$\Rightarrow \text{átalakítással: } \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{\frac{nRT}{V-nb} - \frac{2an^2}{V^3}(V-nb)}$$

$$\text{visszahelyettesítve } \otimes\text{-ba, és Tfhi. } V \gg b \cdot n, \quad RT \gg \frac{an^2}{V} \quad \text{és } \frac{1}{1-x} \approx 1+x \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &\approx \frac{1}{C_p} \cdot \left(\frac{2a}{RT} - b\right) \\ &\text{a és } b > 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{x}{1+x}$

$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H \approx \frac{1}{C_p} \cdot \left(\frac{2a}{RT} - b\right)$

kizárt terfogat
kicsi
kohéziós nyomásos tag

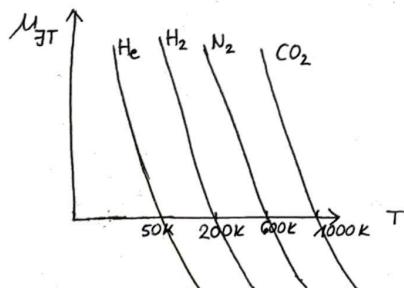
előjelet tud várni (T függvényében) $\Rightarrow \exists$ ún. inverziós hőmérséklet

$$T > T_i \rightarrow \mu_{JT} < 0$$

$$T_i = \frac{2a}{bR}$$

$$T < T_i \rightarrow \mu_{JT} > 0$$

ha T_i nagy $\rightarrow a_i$ kohéziós erő nagy (nagy a kohézió)



lehet tünteni vele, technikai jelentőség:
gázok cseppfolyósítása

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{uR}{\frac{uRT}{V-u} - \frac{2au^2}{V^3}(V-u)}$$

nevező

$$\frac{uRT}{V-u} - \frac{2au^2}{V^3}(V-u) \approx$$

$$= \cancel{\frac{uRT}{V(1-\frac{ub}{V})}} - \frac{2au^2}{V^3} \underset{\substack{V \approx uRT \\ 1-x \approx 1+x}}{\cancel{\frac{uRT}{V}}} \left(1 + \frac{ub}{V}\right) - \frac{2au^2}{V^2}$$

$$= \frac{uRT}{V} \left[1 + \frac{ub}{V} - \frac{2au}{VTR} \right]$$

a hármas
(műtök felbontása)

$$\frac{V}{T} \left(1 - \frac{ub}{V} + \frac{2au}{VRT} \right)$$

bevezetve $\mu_{ST} = \frac{1}{uC_p} \left(V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right)$

$$\mu = V - V \left(1 - \frac{ub}{V} + \frac{2au}{VRT} \right) = ub - \frac{2au}{RT}$$

a vezszerűségek

$$\left[\frac{1}{C_p} \left(\frac{2a}{RT} - b \right) \right]$$

IDEÁLIS GÁZ ÁLLAPOTVÁLTÓZÁSAI

folyamatok: - kódzisztatikusak (p és V rendelhető hozzá)
- reverzibilisek

① IZOTERM $T = \text{konst.}$, $pV = nRT$ $p(V) = \frac{nRT}{V}$

$$U = \frac{f}{2} nRT \Rightarrow \text{állandó!}$$

$$V_1 \rightarrow V_2 \text{ történt}$$

$$W = - \int p(V) dV = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \quad \text{ha } T \text{ konst. : } W < 0$$

$$\text{teljes folyamatra } \Delta U = 0 = Q + W \quad Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = -W$$

② IZOCHOR $V = \text{konst.}$, $W = 0$ nincs munkavégzés

$$\Delta U = Q \quad (\text{hő átvesztés energiat növeli})$$

$$Q = U_2 - U_1 = nC_V(T_2 - T_1)$$

$$\text{tehát } \Delta U = nC_V \Delta T$$

③ IZOBAR $p = \text{konst.}$

$$\Delta U = Q + W = Q - p(V_2 - V_1) = U_2 - U_1$$

$$W = -p(V_2 - V_1)$$

$$\underbrace{U_2 + pV_2}_{H_2} - \underbrace{(U_1 + pV_1)}_{H_1} = Q \quad H_2 - H_1 = Q \Leftrightarrow \Delta H = Q$$

$$\text{fajhőre átírva: } Q = nC_p \Delta T = nC_p(T_2 - T_1)$$

$$\text{ha } T_2 > T_1 \rightarrow Q > 0 \quad \text{hőt közzünk, melegszik}$$

④ ADIABATIKUS (izentropikus)

$$Q = 0 \quad \text{nincs között/leadott hő} \quad \delta Q = 0 \rightarrow dU = -pdV$$

ADIABATA EGYENLETE

$$\underbrace{nC_V dT}_{dU \text{ id. görznál}} = -p dV \quad p = \frac{nRT}{V} \quad p-t eliminálás: \quad$$

$$\frac{dT}{dV} = \frac{nRT}{V^2}$$

$$nC_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 \quad T \text{-vel átosztás}$$

$$nC_V \frac{dT}{T} = -nR \frac{dV}{V} \quad R = C_p - C_v \quad \frac{R}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} - 1 = \gamma - 1$$

$$\frac{dT}{T} = -\left(\frac{C_p - C_v}{C_v}\right) \frac{dV}{V}$$

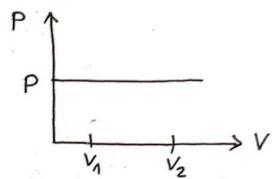
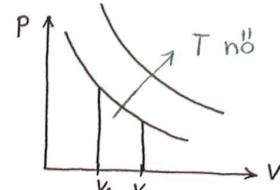
$$\frac{dT}{dV} = -(\gamma - 1) \frac{T}{V} \quad \text{diff. egyenlet} \rightarrow \text{megoldás: } T(V) = \text{const.} \cdot V^{1-\gamma}$$

↳ másik alak:

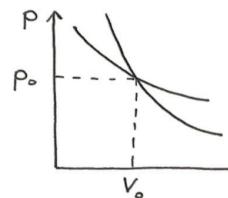
$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$pV = nRT \rightarrow T = \frac{pV}{nR} \rightarrow \text{belük: } p \cdot V \cdot V^{\gamma-1} = pV^\gamma = \text{const}$$

$\gamma > 1 \Rightarrow$ hiperbolánál meredekebb görbe



Adiabata vs. izotermia a meredekelt?



$$\text{izotermia egyenlete: } p = \frac{\text{const}}{V}$$

$$\text{adiabata egyenlete: } p = \frac{\text{const}'}{V^{\gamma}}$$

Meredekségek?

$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_{iz(p_0, V_0)} = - \frac{\text{const}}{V^2} \Big|_{(p_0, V_0)} = \boxed{-\frac{P_0}{V_0}}$$

$$\text{const} = \frac{P}{V} \quad (\text{egyenlet})$$

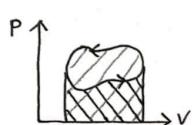
$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_{ad(p_0, V_0)} = \frac{\text{const}'}{V^{\gamma+1}} \quad (-\gamma) = -\gamma \frac{\text{const}'}{V_0^{\gamma}} \cdot \frac{1}{V_0} = \boxed{-\gamma \frac{P_0}{V_0}}$$

$\gamma > 1 \Rightarrow \text{adiabata meredekelt!}$

Jelentőség: Carnot - körfolyamatnál

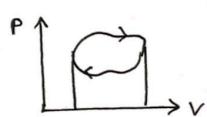
KÖRFOLYAMATOK

(gyakorlati jelentőség)

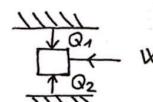


$$W = \underbrace{- \int pdv}_{\text{negatív}} + \underbrace{\int pdv}_{\text{pozitív}} = \boxed{W} > 0$$

Mi végzünk munkát a gázon
(δ csindle valamit)
hőszivattyú



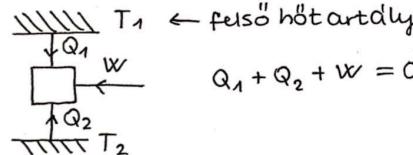
$$W < 0 \quad \text{hőerőgélip} \rightarrow$$



Q_1 : hőt vesz fel, Q_2 -t ad le
 W : negatív!
(munkát végez)

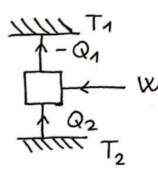
körfolyamatokra: $\Delta U = 0 \Rightarrow \sum Q + \sum W = 0$

szemlelőtől: $T_1 \leftarrow$ felső hőtartalú

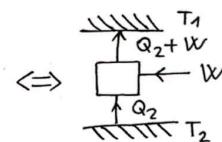


itt most a nyílak befele mutathnak,
ezért Q_1, Q_2, W előjelű mennyiségek

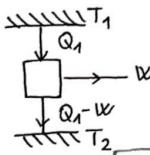
A'ltalános eset:
HÜTÖGÉP:



Q_1 hőt ad le
 W munkát végezik rajta
 Q_2 : hőt vesz fel



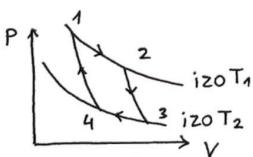
HÖERÖGÉP:



Q_1 hőt vesz fel
 W munkát végez
 $Q_1 - W$ hőt ad le

ezeken az elvonalon
minden mennyiség pozitív!
általános esetben, amikor a nyíl befele mutat, a menny.-ek előjelűek,
azaz lehetnek negatívak is

CARNOT KÖRFOLYAMAT



$T_1 > T_2$

$1 \rightarrow 2$ $Q > 0$ hőt közzük, tágul a gáz $W < 0$

$$Q_1 = Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

$2 \rightarrow 3$ adiabata $Q=0$ kis tágulás $W < 0, \Delta U < 0$ (elhűlé)

$$Q_{23} = 0, W_{23} = U_3 - U_2 = nC_V(T_2 - T_1)$$

$3 \rightarrow 4$ $Q < 0$ hőt ad le, munkát végezik rajta $W > 0$

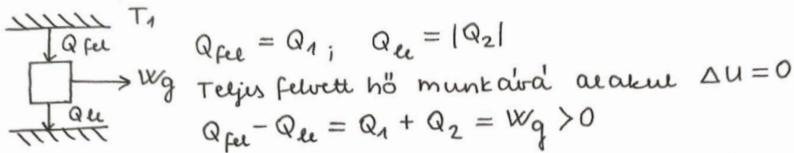
$$Q_2 = Q_{3 \rightarrow 4} = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = -W_{34}$$

$4 \rightarrow 1$ ad. $Q=0, W>0, \Delta U>0, W_{41} = U_1 - U_4 = \Delta U = nC_V(T_1 - T_2) > 0$

új mennyiségek: $W_g = -W$: a gáz által végrezett munka

$$W_g = -W_{12} - W_{23} - W_{34} - W_{41} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} > 0$$

\uparrow
teljes Carnot-körfolyamatra $W_{41} = -W_{23}$ két adiabatain



Hatásfok def: $\eta \stackrel{!}{=} \frac{W_g}{Q_{\text{fel}}} = \frac{Q_{\text{fel}} - Q_u}{Q_{\text{fel}}} = 1 - \frac{Q_u}{Q_{\text{fel}}} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1$, mert $Q_2 < 0$

\hookrightarrow hatásfokot a mechatikai hő rontja!

Továbbiura:
(Carnot) $\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$ V_1, V_2, V_3, V_4
ezeket adiabataik kötik össze

$$\begin{aligned} T_1 V_2^{\eta-1} &= T_2 V_3^{\eta-1} \\ T_1 V_1^{\eta-1} &= T_2 V_4^{\eta-1} \end{aligned} \quad \left\{ \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\eta-1} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\eta-1} \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{T_2}{T_1} \underbrace{\frac{\ln \frac{V_4}{V_3}}{\ln \frac{V_2}{V_1}}}_{\eta-1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1, \text{ mert } T_2 < T_1$$

Megj: pl. beszűrőgésű motor: $T_1 \approx 600K$ $1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 30\%$
 $T_2 \approx 400K$

pl. Paks nyomotturizás reaktor: (125 bar, $\sim 300^\circ C$)

$$\begin{aligned} T_1 &\approx 600K \\ T_2 &\approx 300K \end{aligned} \quad \eta \approx 50\%$$

Hőszivattyú, hűtőgép

$Q_{\text{fel}} = Q_{\text{fek}} + W$

$k_{\text{sz}} = \frac{Q_{\text{fel}}}{W} > 1$, $k_{\text{sz}} = \frac{1}{\eta}$; $k_{\text{sz}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$

k_{sz} akár 3-4 is lehet

k_{sz} : jóslagi tényező

Inverteres klima: pl.: 1 kW-os elektromos teljesítménnyel
3 kW-os hőteljesítmény érhető el

jelentés: 1 egységnyi befektetett munka, ahol tartályból 3-at visz el,
4-et ad le a felső hőtartályba

Carnot körfolyamat

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \leftarrow \text{felső izoterminál hőcsere}$$

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \text{ átrendezve: } \frac{Q_1}{T_1} = - \frac{Q_2}{T_2} \rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0}$$

Carnot hatásfok

A redukált hők összege 0 a Carnot körfolyamatra

HÖTAN II FÖTÉTELE

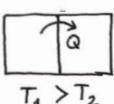
Megfigyelések:

- meleg tárgy lehűl a környezet hőmérsékletére
- meleg + hideg tárgy → meleg lehűl, hideg felmelegszik (spontán folyamatban)
- csepp tűnta vizben feloldódik, elkeveredik
- lecsökkentett tárgyak széttörnek, nem fordítva
- ⇒ egyik folyamat fordítottja sem mond elint az energiamérő maradásnak
(I. fötétel)

Pl. mechanikai mozgás minden hővé alakul → pl. asztalon pattogó golyó, megdu, hő lesz belőle → energia szétszóródik

⇒ Időbeni folyamatok irányára adott, "visszafele eljátszott film"

Kísérlet Melegebb + hidegebb test



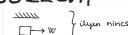
$$\text{vegyük a redukált hők összegét} \\ \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0 \quad \leftarrow \text{előjel egyértelmű}$$

II FÖTÉTEL: 4 ekvivalens megfogalmazás:

1. Carnot: Nem lehet egy testtel úgy hőt közölni, hogy teljesen munkára alakitsa leadott hőt nélküli



2. Thomson (Lord Kelvin): Nincsen olyan, hogy egy rendszer energiája csökken, és ez teljesen munkára alakul.



3. Clausius: Nincs olyan spontán folyamat, ami csak abbra áll, hogy hőt megy hidegebb helyről melegobbra.

4. Planck: $\eta < 1$, hőerőgépkent működő folyamat hatásfoka $\eta < 1$.

↔ Nem létezik másodfajú perpetuum-mobile
(elsofajú perp. mobile már az I. fötételnek is ellenmond)

Megj → 2. fötétel a folyamatok irányára vonatkozik (pl. videó „határafelé”)
→ energia szétszóródik



1 golyó mozog, többi áll → több mozognak

→ I. fötétel: megmondja, hogy milyen folyamatok lehetnek végre

II. fötétel: _____ mennyek valóban végrebe.

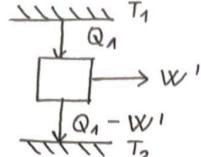
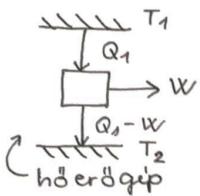
Carnot - tétel

- 2 hőtartály között működő reverzibilis hőerőgép hatásfoka maximális, és anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől nem függ.
- minden, kit arányos hőtartály között működő reverzibilis hőerőgép hatásfoka egyenlő, és független az anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől.
(reverzibilis folyamat egzaktul nem létezik)

A'ltá's:

Carnot körfolyamat is ilyen, maximális hatásfokú reverzibilis körfolyamat.

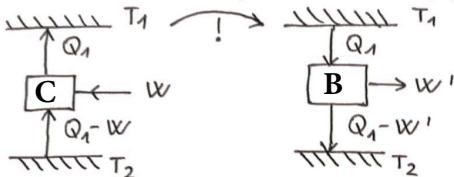
Bizonyítás: Indirekt Tf. $\exists \eta_B > \eta_c$ (Carnot: η_c)



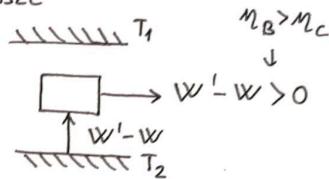
$$\eta_c = \frac{W}{Q_1} \quad \eta_B = \frac{W'}{Q_1}$$

$$\eta_B > \eta_c$$

Most: C: höszwattyu, B: höerőgép \rightarrow ereket kössük össze



összeadott gép:



Nem lehet ilyen a II fötétel Carnot-féle megfogalmazás alapján.
 $\Rightarrow \eta_B > \eta_c$

Megij: Ez nem két izoterma között zajlik.



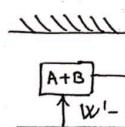
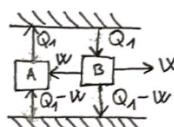
A'lítás: A Carnot körfolyamat hatásfoka anyagi minőségtől független
 \Rightarrow nem csak ideális gázra!

Bizonyítás: Tekintsünk két Carnot körfolyamatot arányos T_1, T_2 között

$$A: \text{id. gáz } \eta_A = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$B: \text{nem id. gáz } \eta_B$$

Legyen $\eta_B > \eta_A$ B: höerőgép, A: höszwattyu



szüntetélyt mondás,
csak akkor van az, ha $W' - W = 0$
 $\Rightarrow \eta_B = \eta_A$

TERMODINAMIKAI HÖMERSEKLETI SKA'LA

$$\eta_c \text{ hőmérs. függő: } \eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

"recept": Végigzük el a Carnot körfolyamatot T_o (olvadó viz-jéig) és T_f (forrásban levő viz \rightarrow nyomás!) hőmérsékletek között.

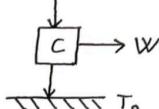
Itt merjük η_o -t, $T_f - T_o = 100$ $\rightarrow \eta_o = \frac{T_f - T_o}{T_f}$ $\rightarrow \eta_o = 0,268$ mértű
Igy a két ismeretlenre kapott eredmény:

$$T_o = 273,15 \text{ K}$$

$$T_f = 373,15 \text{ K}$$

Ismeretlen T mérése: Tf. $T > T_o$

$$T$$



$$\eta_T = \frac{T - T_o}{T} \quad T = \frac{T_o}{(1 - \eta_T)}$$

\nwarrow mérhető

$$\text{ha } T < T_o \rightarrow T = T_o (1 - \eta_T), \text{ mert } \eta_T = \frac{T_o - T}{T_o}$$

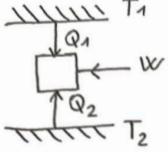
Megij - elvi lehetségek

- jobb lehetségek: víz 3-as pontjának használatával, T_h, P_h is meghatározott a skála 0-jára

$$273,15 \text{ K} \quad 606 \text{ Pa}$$

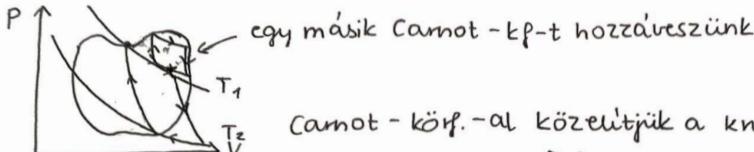
AZ ENTRÓPIA

Carnot - körfolyamat: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (redukált hők összege 0)

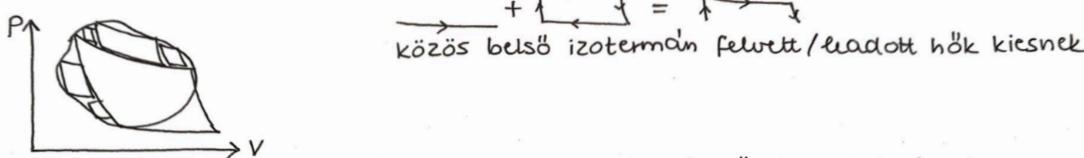


ha hőerőgép: $W < 0, Q_2 < 0$

Tekintsünk egy általános körfolyamatot!



Carnot - körf. - al közelítjük a környezetet



Az eredeti körfolyamat tetszőlegesen pontosan közelíthető Carnot körf. - ok összegével, melyre a redukált hők összege 0.

$$\oint \frac{\delta Q^{\text{ter}}}{T} = 0$$

Analóg konz. erőter

ált. reverzibilis körfolyamatra

$$\oint E^{\text{elektrosztat}} ds = 0$$

$$\oint F^{\text{grav}} ds = 0$$

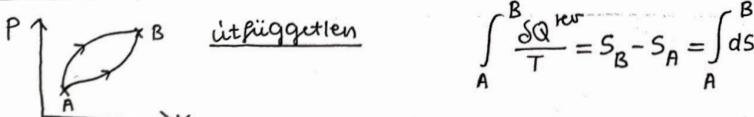
$\left. \begin{array}{l} \exists \text{ potenciálja} \\ E = -\nabla \psi \\ \oint du = 0 \quad (u: \text{duapotjelzés}) \\ \hookrightarrow I. \text{ fokelétel} \end{array} \right\}$

Clausius: a redukált hő (reverzibilis folyamatban) egy duapotfüggvény teljes differenciája \Rightarrow ami az ún. entrópia: $ds = \frac{\delta Q^{\text{ter}}}{T}$

\hookrightarrow előjele megadja a folyamatok irányát

$$Ebből: \underbrace{\delta Q^{\text{ter}}}_{\text{folyamat-függő}} = T \cdot \underbrace{ds}_{\text{teljes differenciálé}}$$

Következményei: véges reverzibilis folyamatra



S tulajdonságai:

- extenzív (mert hőközlésekkel definiáljuk)
- ha $S = du$: adiavatikus foly. \Leftrightarrow izentropikus foly.
- duapot jelmző / duapotjelző (ter. foly-ra)

S egy átlagos reverzibilis folyamatban:

$$S(T_1) = S(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} \frac{\delta Q^{\text{ter}}}{T} = S(T_0) + n \int_{T_0}^{T_1} \frac{C(T) dT}{T} = S(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} f(T) dT$$

S arzf primitív függvénye

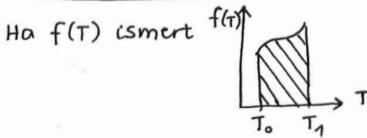
$$S_B - S_A = \int_A^B ds \rightarrow S_B = S_A + \int_A^B ds$$

$$\delta Q^{\text{ter}} = n \cdot C(T) dT$$

↑ folyamatfüggő

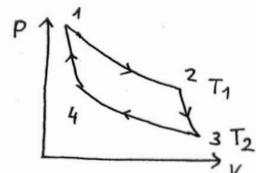
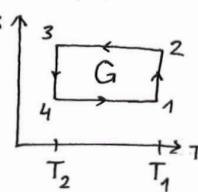
$$f(T) = \frac{nC(T)}{T}$$

azaz



Ha f(T) ismert

S-T diagram + Carnot körfolyamat:



Integrál általános tétel

$$\intop_{A}^B \underline{F} \cdot d\underline{r} = U(B) - U(A); \text{ ahol } \underline{F} = \nabla U$$

(A - B hárteg)

$$\intop_{\Sigma} \underline{D} \cdot \underline{D} dV = \oint_{A} \underline{D} \cdot d\underline{A} \quad \text{Gauss tétel}$$

$$\intop_{A} \underline{\nabla} \times \underline{E} dA = \oint_{\Sigma} \underline{E} \cdot d\underline{s}$$

Általánosított Stokes tétel

$$\intop_{\Sigma} d\underline{w} = \intop_{\partial \Sigma} \underline{w}$$

Nyolcaság

$\partial \Sigma$ nyolcaság hárteg

$d\underline{w}$: nyolcaságú vett derivatek

$\underline{\nabla}; \underline{\nabla} \cdot; \underline{\nabla} \times$

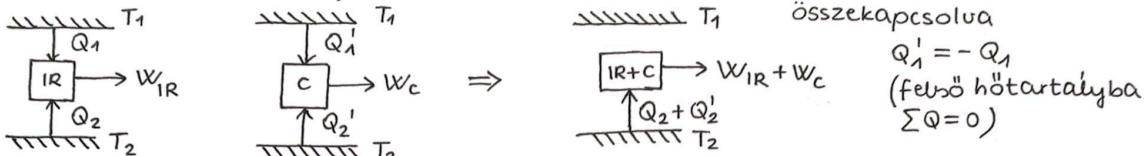


IRREVERZIBILIS FOLYAMATOK ÉS AZ ENTRÓPIA

Reverzibilis folyamatokban csak hőcserevel változhat S.

Fázisátalakulások: $\Delta S_f = \frac{\Delta Q_f}{T} \leftarrow$ latens hő (olvadás, fagyás, forrás...)

Tekintsünk irrev. + rev. folyamatot (pl. Carnot)



II. főtétel szerint $W_{IR} + W_C \leq 0$

$$W_{IR} = Q_1 + Q_2$$

$$W_C = Q'_1 + Q'_2 \quad \text{és Carnotra: } \frac{Q'_1}{T_1} + \frac{Q'_2}{T_2} = 0 \rightarrow Q'_2 = -\frac{T_2}{T_1} Q'_1$$

$$W_{IR} + W_C = Q_1 + Q_2 + Q'_1 + Q'_2 = Q_2 + \left(-\frac{T_2}{T_1} Q'_1 \right) = Q_2 + Q_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \leq 0 \rightarrow \begin{array}{l} \text{elől} \\ \text{a } T_2-t \\ \text{kicmelyük} \end{array} \Rightarrow$$

egymás ellenében

$$\Rightarrow T_2 \left(\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \right) \leq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0}$$

általános inverzibilis folyamat redukált hője nem lehet pozitív.

Diszkusszió: = ha csak reverzibilis
< ha inverzibilis

Következmény: $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ Clausius egyenlötésség

→ véges folyamatokra

$$\begin{array}{c} P \uparrow \\ \text{inver} \quad \text{rev} \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ A \quad B \end{array} \quad \oint \frac{\delta Q}{T} < 0, \quad \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \overset{\text{inver}}{<} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T} \overset{\text{rev}}{<} < 0 \rightarrow \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \overset{\text{inver}}{<} S_B - S_A$$

Clausius egyenlötésségek (II. főtétel matematikai alakja)

$$\left. \begin{array}{l} (1) \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \\ (2) \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq S_B - S_A \\ (3) \frac{\delta Q}{T} \leq dS \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \text{ha reverzibilis} \\ < \text{ha inverzibilis} \end{array}$$

ENTRÓPIA PRODUKCIÓ

Inverzibilis foly.: $\delta Q_{inver} < T dS \Rightarrow$ eltezik $dS^{prod} > 0$ (jön: nemkonz. erők munkája)

hőcsere nem fedelezi

$$Ezzel a II. főtétel: \boxed{dS = dS^{prod} + \frac{\delta Q}{T}}$$

rev.: $dS^{prod} = 0$
inver: $dS^{prod} > 0$

$$dS^{prod} = \frac{\delta W_{inver}}{T}$$

inverzibilis
erők munkája

Zárt rendszene $\delta Q = 0$ (pl. hőszigetelő falakk körfolyamra) $\Rightarrow dS = dS^{prod}$

Véges folyamatra:

$$S_B - S_A \stackrel{\text{zárt rendszene}}{=} \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = 0 \rightarrow \boxed{S_B - S_A \geq 0} \Rightarrow \text{entrópia nem csökkenhet spontán folyamatban}$$

entrópiánövekedés tétele

elrendezett entrópia csökkenhet, egész rendszert nem!

Diszkusszió:

- zárt rendszer egyensúlyban van, ha $S = \max$, $dS = 0$
- Univerzum: "hőhalál" \rightarrow A energia egyenlítetlen, hőmozgás formájában osztik el.
 - most: energiaszint - gradiensek vannak \rightarrow energia nincs egyenlítetlen elosztva
 - XIX. sz. vége: Univerzum nem létehet végtelen ideje
 - Nap \rightarrow termikus (plazma) \rightarrow fotonok (hőmérsékleti sugárzás) \rightarrow fotoszintézis \rightarrow ember hőt termel (+ ösi fotonok energiáját használjuk)
 - Univerzum jövője \rightarrow végtelen ideig tagul
 - Nagy Reccs \Rightarrow nem születhet újra alacsony entropiájú áltapotban (II. főtétel)

Érdekkesség: • Fekete lyukak (van entropia)

↳ van hőmérséklete \rightarrow Hawking sugárzás

• reverzible computing

Landauer: információs entropia: 1 bit információ törléséhez is energiára van szükség: $k_B T \ln 2$

\Rightarrow elfelejtéshez munka kell, hőt termel

"számolás info' törlése nélkül" $dS = 0$ \rightarrow legenergiahatékonyabb

Mai gép: $10 \text{ W teljesítmény felvétel } 10 \text{ W} = 10^7 \text{ J/s}$

4 művelet/órajjal 1 GHz-es órajel $\rightarrow 4 \cdot 10^{10} \text{ bit/sec}$

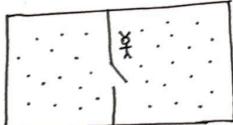
Landauer: $4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{s}} \Rightarrow k_B T \ln 2 = 10^{-21} \text{ J/s}$

$$\Rightarrow 4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{sec}} = 10^{-11} \text{ W}$$

\Rightarrow Mai gép $10^{-11} - 10^{-12}$ -szer kevésbé hatékony, mint az elvi határ

Maxwell-démon gondolatkísérlet

Kezdetben arányos gáz



démon: • ha balról jön egy gyors részecke: elengedi

• ha jobboldalról jön egy lassú — — elengedi

\Rightarrow jobboldalon melegszik a gáz,
baloldalon hideg



ez a II. főtételnek ellentmond

Feloldás: • nyitás/csatlásbahoz energia kell

• démonnak figyelnie, memére kell a részecskéket, ehhez energia kell

\Rightarrow információtárolás

"információs munkavégzés"

PL hűtőgépen belül entropia csökken (réstrendszeren belül)

de ez nem igaz a zárt rendszere

Példa Laminar Flow Demonstration

magas viskozitású anyagba cseppekkel tintafoltokat előre majd visszafelé pörgetünk, visszadul a kezdeti áltapot

OK: folyadék magas viskozitású \rightarrow folyadék nem osztik szét véletlenszerűen, hanem csak a rétegek csúsznak el egymáson \Rightarrow nincs információ veszteles

entropiája nem nő a rendszernél

Hasonló jelenség: spin echo

HÖTAN FUNDAMENTA'LIS EGYENLETE

I. főtétel: $dU = \delta Q + \delta W$

teljes diff. út, folyamatfüggőök

reverzibilis folyamatra: $ds = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \rightarrow Tds = \delta Q_{rev}$

reverzibilis munka
↓

$\delta W = -pdV$

(ha csak törfogati munka)

ebből: $dU = Tds - pdV$ a hötan fundamentalis egyenlete (valódi dU jelekk teljes diffjai!)

Ldtszolag csak reverzibilisre igaz. Allítds: inverzibilisre is igaz!

$\delta Q + \delta W = Tds - pdV \leftrightarrow$ különben nem igaz, hogy $Tds = \delta Q$ tetsz. folyamatra, de együtt igen!

ebben vannak az inverzibilis részek

A folyamat részleteitől függetlenül: $\delta W_{rev} + \delta Q_{rev} = \delta W_{iner} + \delta Q_{iner}$

$ds = ds^{prod} + \frac{\delta Q_{rev}}{T}$

$Tds - pdV = \delta Q + \delta W$

Legezen inverzibilis munkavégzés (pl. súrlódás):

$\delta W = -pdV + \delta W_{iner}$

sűr. mentes tf-i munka

\Rightarrow Beirva a fundamentalis egyenletbe: $Tds - pdV = Tds - \underbrace{Tds^{prod}}_{\delta Q} - pdV + \delta W_{iner}$

$\Rightarrow Tds^{prod} = \delta W_{iner}$

inverzibilis erők munkája (prod.) entropiadát hoz előre

Fund. egy.: I e's II főtétel közös matematikai alakja: $dU = Tds - pdV$

$dU = Tds - pdV \rightarrow ds = \frac{1}{T}(dU + pdV)$

A'lalinos munka:

$dU = Tds - pdV + \underbrace{udn}_{\text{anyagi munka}}$ $\Rightarrow \begin{matrix} T & - & S \\ -p & - & V \\ \mu & - & n \end{matrix} \}$ intenzív-extenzív
pdrok

kémiai pot. részecskeszám

általánosítva: $dU = Tds + \sum_i x_i d\%_i \leftrightarrow dU = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{\sum_i x_i d\%_i}$

ittrendezve: $ds = \frac{1}{T}(dU + pdV - udn)$ vagy $ds = \frac{1}{T}(dU - \sum_i x_i d\%_i)$

IDEA'LIS GA'Z ENTRÓPIA'JA

$U = U(T)$, $\underbrace{PV = nRT}_\text{du. egy.}$, $ds = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV$ F.E. (fund. egyenlet)

$ds = nC_V dT$, általános alakban: $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = nC_V dT$ $\left(C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right)$
 \downarrow id. gáz def.

$\Rightarrow ds = nC_V \frac{dT}{T} + \underbrace{(nR \frac{dV}{V})}_{\text{P}} \leftrightarrow$ v.ö. adiabata duapotegeyenletével
(ott a $ds = 0$, ami itt a baloldal)

Tekintsük S-t T,V függvényekint!

$S = S(T, V) \Rightarrow ds = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$

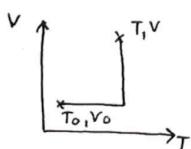
együthetők egyenlők a két oldalon

$\Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{nC_V}{T} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{nR}{V}$

S parciális deriváltjai ismertek!

volt: $S_B - S_A = \int_A^B ds$

innen: $S(T, V) = S_0(T_0, V_0) + \int_{T_0}^T \frac{nC_V}{T'} dT' + \int_{V_0}^V \frac{nR}{V'} dV' = S_0(T_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$



- Igazuk át $S(p, V)$ -re $nRT = PV \rightarrow T = \frac{PV}{nR}$
 $\Rightarrow S(p, V) = S_0(p_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{PV}{P_0V_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = S_0(p_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + n\underbrace{C_V}_{C_V+R} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$
- Igazuk át $S(p, T)$ -re $V = \frac{nRT}{P}$
 $\Rightarrow S(p, T) = S_0(p_0, T_0) + nC_V \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + nC_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = S_0(p_0, T_0) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + nC_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$

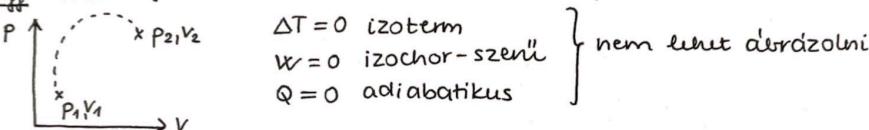
Diszkusszió: $T_0 = 0$ -nál nincs értelme! Ennek feloldása: ideális gáz koncepciója nem elvénnyes $T \rightarrow 0$ esetben.

GAY - LUSSAC KÍSERLET ÉS ENTROPIA

G-L kísérlet: irreverzibilis

$$\begin{aligned} V_1 \rightarrow V_2 \text{ tölcsély a gáz } & \left. \begin{array}{l} \Delta U = 0, \Delta T = 0, \\ W = 0, Q = 0 \end{array} \right\} \\ p_1 \rightarrow p_2 \text{ csökken a gáz nyomás } & \left. \begin{array}{l} \Delta U = 0, \Delta T = 0, \\ W = 0, Q = 0 \end{array} \right\} \\ \text{Az entropia - kezdetben: } S_1(T_1, V_1) = S_0(T_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) & \\ - végállapot: S_2(T_1, V_2) = S_0(T_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right) & \\ \Rightarrow \Delta S = S_2 - S_1 = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0 & \text{G-L kísérlet végbemegy spontán módon, ellenetje nem.} \\ & \text{irreverzibilis folyamat} \end{aligned}$$

Megj. A bőrizoljuk a G-L kísérletet $p-V$ diagramon



Ellentmondás feloldása: G-L nem ábrázolható $p-V$ diagramon, "eltűnik a $p-V$ diagramról"

- csak olyan foly. ábrázolható $p-V$ diagramon, ami kvalitativan általános
- G-L kísérletet nem lehet kvali-stac.-án tenni, mert ha arra próbálunk tenni, lenne munkavégzés.
- nem lehet mérni p -t, V -t a folyamat alatt, mert akkor lenne munkavégzés
- Túl gyorsan tágul (fontos, hogy vákuumba tölcséljen)

ENTROPIAVALTOZA'S KIEGYENLÍTÖDE'SI FOLYAMATBAN

T_1, P_1	T_2, P_2
U_1, V_1	U_2, V_2

kölcsonhatásban mechanikai munka + hőcseré

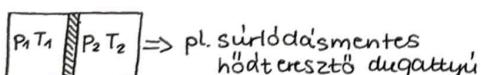
$dS = ?$

elemi lépésben: 1-esre: $dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{P_1 dV_1}{T_1}$

2-esre: $dS_2 = \frac{dU_2}{T_2} + \frac{P_2 dV_2}{T_2}$

kehyszerük: I. fótételel
 \downarrow
 $dU_1 = dU_2 + dU_2 = 0$
 $\rightarrow dU_1 = -dU_2$
 $dV = dV_1 + dV_2 = 0$
 $\rightarrow dV_1 = -dV_2$

} zárt rendszur



⇒ pl. szabadlásszerű hőátmenet

hőátmenet nincs dugattyú

A teljes entropia változás:

$dS = dS_1 + dS_2 = dU_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + dV_1 \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right)$

II. fótételel

1. eset $P_1 = P_2 = P$ de $T_2 > T_1$

$\text{akkor } dS = dU_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + P dV_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = (dU_1 + P dV_1) \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$

$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} > 0 \Rightarrow dU_1 + P dV_1 > 0$

dQ_1 : 1-essel között hő

2-es test hőt ad dt az 1-esnek, ha $T_2 > T_1$

2. eset $p_2 > p_1, T_1 = T_2 = T$

$$ds = \frac{dV_1}{T} (p_1 - p_2) > 0 \quad p_1 - p_2 < 0 \Rightarrow dV_1 < 0 \text{ azaz a } 2\text{-es kitagul, } 1\text{-es összemegy (ahogy valtuk)}$$

↑
II. főtétel

\Rightarrow A spontán kiegyenlítőteli polyamatok a II főtétel következményei!

BELSÖ ENERGIA TERFOGATFÜGGÉSE

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = ? \quad \text{Volt: } C_p - C_v = \frac{1}{n} \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}_{V/\beta_p} \cdot \underbrace{\left(P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right)}_{?}$$

Matek + F.E. $ds = \frac{1}{T}(dU + pdV)$ ← fundamentális egy.

$$\begin{aligned} \text{Tekintsük } S = S(T, V) \rightarrow ds = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT \\ \text{és } U = U(T, V) \rightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{matek} \\ \text{?} \end{array} \right\}$$

$$3 \text{ egyenlötöböl: } \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + dV \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{P}{T} \right]$$

$$\text{Két oldali együtt hatók arányosak: } \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \text{ i } \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{P}{T}$$

$$\text{Young-tétel: } \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \quad \left. \begin{array}{l} \text{kiesnek (Young-t.)} \\ \text{?} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Baloldal: } \frac{\partial}{\partial V} \text{ miközben } T \text{ konstans: } \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \quad \downarrow$$

$$\text{Jobb oldal: } \frac{\partial}{\partial T} \text{ miközben } V \text{ konstans: } -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}\right) + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - \frac{P}{T^2}$$

$$\text{Két oldal összehasonlítása: } 0 = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - \frac{P}{T^2}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

$C_p - C_v$ -be beírva: $C_p - C_v = \frac{1}{n} \cdot V \cdot \beta_p \cdot T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ mérhető fizikai mennyiségek közötti kapcsolat (C_p, C_v, V, β_p)

Példák:

$$\begin{aligned} \text{1. id. gáz: } pV = nRT \rightarrow p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{P}{T} \\ \beta_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \rightarrow V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow \beta_p = \frac{1}{T} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{n} \cdot V \cdot \frac{1}{T} \cdot T \cdot \frac{P}{T} = \underbrace{PV}_{nRT} \cdot \frac{1}{T} = R \\ \checkmark \end{array} \right\}$$

$$\text{2. vduv gáz: } \left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) \cdot (V - nb) = nRT \rightarrow p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V-nb} = \frac{1}{T} \left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)$$

$$\text{innen: } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \frac{an^2}{V^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{idélezni gázra 0 lenne} \\ \text{?} \end{array} \right\}$$

Gyakorló feladat:

$$ds = \frac{1}{T}(du - x d\xi) \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_T = -T \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_{\xi} + x \quad \begin{array}{l} x \rightarrow -P \\ \xi \rightarrow V \end{array}$$

Gyakorló feladat:

$$H = U + PV, \quad du = Tds - pdV \rightarrow dH = Tds - pdV + d(PV) = Tds - pdV + pdV + Vdp$$

$$dH = Tds + Vdp$$

$$ds = \frac{1}{T}(dH - Vdp) \quad \text{F.E.}$$

$$\text{Mut. mág.: } \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

$$C_p - C_v = \frac{1}{n} V \beta_p \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

első gondolat: "V-vel böülés" $\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T}$ ROSSZ

$$\text{A'ltalánosan: } f(x,y) = \text{const} \Rightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)_{f=\text{const}} = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x}$$

Alkalmasra:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T} = + \frac{V \cdot \beta_P}{V \cdot K_T}$$

$$\text{Mindösszesen: } C_p - C_v = \frac{1}{n} \cdot V \cdot T \cdot \frac{\beta_P^2}{K_T}$$

$$K_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

\uparrow $dp > 0$ -nál $dv < 0$ és K_T -ra \oplus -at szeretnék

← anyagtól független, általánosabban összefüggés (csak mérhető mennyiségek szerepelnek)

Ideális gázra:

$$\begin{aligned} V = \frac{nRT}{P} \rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \frac{1}{V} = \frac{1}{T} = \beta_P \\ \rightarrow K_T = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left(-\frac{1}{V} \right) = \frac{1}{P} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} C_p - C_v = \frac{1}{n} \cdot V \cdot T \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \frac{1}{P} = \frac{PV}{nT} = R \end{array} \right\}$$

AZ ENTRÓPIA STATISZTIKUS ÉRTELMEZESE

fenomenológikus hőtan \longleftrightarrow sztatistikus fizika

kettő között S teremt kapcsolatot, leírható fenomenológikus és sztatistikus nyelven is.
→ A rendszerek \exists egyensúlyi állapotja, itt vannak állapotjelzők (U, V, T, n, μ)

Boltzmann-hipotézis: Az egyensúly a valódszínűbb állapot

sok részecske van $\rightarrow 6 \cdot 10^{23}$

Mai ismertek szerint a természet valószínűségi viselkedést követ

B.H. alapján: valódszínűbb állapotot keressük, valószínűséget számolunk (sok részecske)
fenomenológikus hőtan: S-nek egyensúlyban maximuma van
 \Rightarrow a két vidig összeér: S-nek közé van a valószínűségi elő-hoz

↳ "program": sok részecskeire urszg-et számolunk \rightarrow entrópiát megkapunk \rightarrow
F.E \rightarrow mérhető mennyiségek \rightarrow összevetjük a természettel

ÜZ FOGALMIK:

Makroállapot: makroszkopikus állapotjelzőkkel jellemezhető állapot
(P, V, U, n, μ, \dots)

Mikroállapot: a részecskék összeségét jellemző (β, r) állapotok sokasága

A'ltalás: 1 makroállapotot sok mikroállapot valósíthat meg

B.H. nyelvén: Az a makroállapot valósul meg, amit a legtöbb mikroállapot tud megvalósítani.

Entrópia a B.H. alapján:

II főtétele: zárt rendszer egyensúlyában $S = \text{max}$.

Mikroállapotok száma legyen W (nagy szám pl. $(6 \cdot 10^{23})^{6 \cdot 10^{23}}$)

\Rightarrow áll.: S a W monoton függvénye \Leftrightarrow Boltzmann-hipotézis

• S extenzív, azrendszerre additív $S = S_1 + S_2$

• két azrendszerben W_1 és W_2 egysített rendszerben $W = W_1 \cdot W_2$

• S milyen $S = q(W)$ függvény?

$$q(W_1 W_2) = q(W_1) + q(W_2) \text{ additív függvénye egyenlít}$$

\Rightarrow egyetlen mo: $[S \sim \ln W] \leftarrow$ Boltzmann-hipotézis következménye

$$[S] = \bar{J}/k, \text{ en } W = \text{dimenziótlan szám}$$

pl. ex: Taylor-sorában végtelen fokszámú polinomok vannak

$$[S = k_B \ln(W)]$$

k_B : Boltzmann-állandó

$$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

↳ mikro- és makrovilágot köti össze

utolsó derivált: $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda}\right)_{x,y} d\lambda = g(x,y) - c = 0$ pont a kényszer

és $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ i. $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)_{x,\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$ egyenletrendszer,
 λ, x, y -ra megoldható! Tehát $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

A mi esetünkben legyen:

$$\lambda(N_1, N_2, \dots, N_k, \lambda) = \ln W(N_1, N_2, \dots, N_k) - \lambda \left[\sum_i N_i - N \right]$$

szükséges feltétel: $d\lambda(N_1, \dots, N_k) = 0$ ← csak a szélső érték szüks. feltételle
 $\ln W = N \ln N - N - \left[\sum_i (N_i \ln N_i - N_i) \right] \otimes \leftarrow W(N_1, N_2, \dots, N_k) = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_k!}$ ← csak szükséges feltételle

A kapott egyenletrendszer: (honnán kapjuk?)

$$\frac{\partial \ln W}{\partial N_i} + \lambda \frac{\partial \sum N_i}{\partial N_i} = \left[\frac{\partial \ln W}{\partial N_i} + \lambda = 0 \right] \quad k \text{ db egyenlet}$$

$$\otimes \Rightarrow \frac{\partial \ln W}{\partial N_i} = - \frac{\partial (\sum N_i \ln N_i)}{\partial N_i} = - \ln N_i - 1 \approx - \ln N_i$$

$$-\ln N_i = -\lambda \rightarrow N_i = e^\lambda \text{ állandó és mivel } \sum N_i = N \rightarrow \boxed{N_i = \frac{N}{k}} \quad k \text{ db doboz}$$

a legrálósztalibb áupapot → k dobozban ugyanannyi részecske van!

2. STATISZTIKAI MODELL (Maxwell-Boltzmann eloszlás)

A részecskék különböző energiaszinteken lehetnek / küll. (energia) áupapotban i.-edik áupapotban N_i db részecske

\downarrow belső energia

kényszer: $\sum_i N_i = N$ és $\sum_i E_i N_i = E (=U)$

\uparrow összenergia

E₂ Feladat: $\ln W$ max-a a 2 kényszer mellött

$\ln W(N_1, \dots, N_k)$ ugyanaz, mint eddig

$$M_0: \lambda(N_1, \dots, N_k, \lambda_1, \lambda_2) = \ln W(N_1, \dots, N_k) + \lambda_1 (\sum_i N_i - N) + \lambda_2 (\sum_i N_i E_i - E)$$

Egyenletrendszer szüks. feltételle: $\left[\frac{\partial \ln W}{\partial N_i} + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0 \right] \quad k \text{ db egyenlet}$

Tehát $-\ln N_i + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0 \rightarrow \ln N_i = \lambda_1 + \lambda_2 E_i \rightarrow \boxed{N_i = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2 E_i}}$

Legyen: $A = e^{\lambda_1}$ konst és $\beta = -\lambda_2$

$$\sum_i N_i = N \rightarrow A \cdot \sum_i e^{-\beta E_i} = N \rightarrow A = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta E_i}} \leftarrow \boxed{Z = \sum_i e^{-\beta E_i}} \quad \text{áupapotösszeg}$$

innen $\boxed{N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i}}$ és $\boxed{P_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}}$

\uparrow csak az energiaszintektől függ, rendszere jell. menny.

i. áup. betöltöttsége

\uparrow i.-edik áupapot valószínűsége

Maxwell-Boltzmann elo-fu ↔ barometrikus magasságformula $p = p_0 \cdot e^{-\frac{mgz}{kT}}$

ENTRÓPIA A MAXWELL-BOLTZMANN ELOSZLÁSRÁ

$$S = k_B \ln W \rightarrow \ln W = N \ln N - \underbrace{N}_{\substack{\uparrow \\ \text{volt}}} - \underbrace{\left[\sum_i (N_i \ln N_i - N_i) \right]}_{\substack{\uparrow \\ \text{kiesnek}}} \quad \text{B.H.}$$

$$\ln W = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i \quad N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i} \quad \text{-t bevitva:}$$

$$\ln W = N \cdot \ln N - \frac{N}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} \left[\ln \frac{N}{Z} - \beta E_i \right] = N \ln N - \frac{N}{Z} \ln \frac{N}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} + \underbrace{\beta \frac{N}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} E_i}_{\sum_i N_i E_i = E}$$

$$\Rightarrow \ln W = N \ln N - N \ln Z + N \ln Z + \beta E$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln W = N \ln Z + \beta E}$$

tudjuk, h. $S = k_B \ln W = k_B N \ln Z + k_B \beta E \quad \otimes$

$$\text{F.E. alapján: } \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = \frac{1}{T} = k_B \beta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}} \quad \beta: \text{termodynamikai hőmérséklet}$$

Ezzel: $M = B$ eloszlás:

i-edik állapot
betöltöttsége

$$N_i = \frac{N}{\sum_i e^{-E_i/k_B T}} \cdot e^{-E_i/k_B T}$$

- nagy energiák betöltöttsége alacsony
- nagy T-n magasabb Ei-k is be lesznek töltve

GIBBS-FÉLE ENTRÓPIA FORMULA

(motívum, hogy arynos a Boltzmannnal)

$$\frac{S}{N} = -k_B \cdot \sum_i p_i \ln p_i, \text{ ahol } p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

$$\ln p_i = -\ln Z - \beta E_i \rightarrow \text{beírva Gibbs-be: } \frac{S}{N} = -k_B \cdot \sum_i p_i (-\ln Z - \beta E_i) = k_B \ln Z + k_B \beta \frac{E}{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = k_B N \cdot \ln Z + k_B \beta E}$$

$$\sum_i N_i E_i = E \text{ és } \sum_i p_i E_i = \frac{E}{N}$$

ugyanaz, mint \otimes

Gibbs és Boltzmann formula arynos eredményt ad!

KVANTUMSTATISZTIKA

Tapasztalat szerint 2félre részecske van

adott energiaszinten
(kvantumállapot)

1 db részecske lehet

FERMIONOK

megnyilvánulása:

Pauli-elv
feles spinű részecskék
 e^- , kvarkok, neutrino
anyagot alkotják

Fermionok statisztikája

tetszőleges számú lehet

BOZÓNOK

egész spinű részecskék
foton, gluon, W^\pm , Z^0 , Higgs
kölcsönhatást közvetítenek

i.-edik állapotban 0 vagy 1 részecske lehet

p_0 : uszq, h. az i.-edik állapot nincs betöltve

p_1 : $\frac{p_1}{p_0}$ " 1-szeresen betöltve

Hennyi? $\frac{p_1}{p_0} = e^{-\beta E}$ ε : ennyivel nő az energia, ha az i.-edik áll.-t betöljük

Boltzmann-Ansatz (jön!)

$$\bullet p_0 + p_1 = 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon / \beta \text{ ismert} \Rightarrow 2 \text{ egyenlet, 2 ismeretlen}$$

Egyenletrendszer megoldása:

$$p_0 = \frac{1}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} \quad \text{és} \quad p_1 = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1}$$

Betölte's valóható értéke: $\langle n \rangle = p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 = \frac{1}{e^{\beta E} + 1}$ ← Fermi-Dirac eloszlás függvény
 végső kémiai potenciállra: 0 kím. pot.-ra

$$f(\varepsilon, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)} + 1} \rightarrow \text{abrazolva: } \begin{array}{c} \text{ha } T > 0 \\ \text{Graph: } \begin{array}{c} \text{y-axis: } \frac{1}{2} \\ \text{x-axis: } \varepsilon \\ \text{A sigmoid curve starting at } (0, 0) \text{ and approaching } (1, 1). \text{ A dashed horizontal line is drawn at } y = \frac{1}{2}. \text{ A vertical dashed line is drawn at } \varepsilon = \mu. \end{array} \end{array}$$

$$\frac{1}{k_B T} (\varepsilon - \mu) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \begin{cases} -\infty & \text{ha } \varepsilon < \mu \\ +\infty & \text{ha } \varepsilon > \mu \end{cases}$$



\leftarrow Fermi - Dirac
eloszlás függvény

végus kémiai potenciálra:

↑

$$f(s, u) = \frac{1}{s} \rightarrow \text{Schrägzug: } \uparrow \quad \text{zu } T \approx$$

A graph showing a function decreasing from $\frac{1}{2}$ towards zero as ϵ increases. The horizontal axis is labeled ϵ and the vertical axis has a tick mark at $\frac{1}{2}$. A dashed horizontal line extends from $\frac{1}{2}$ to the curve. A vertical dashed line extends from the point where the curve intersects the $\frac{1}{2}$ line to the horizontal axis, marking a point labeled μ .

Bozonok statisztikája

\forall duapot többszörösen be lehet töltve $N=0, 1, \dots, \infty$

Tf h. már n-szeresen be van töltve egy állapot $\rightarrow p_n$ үszg +1-et hozzádunk + ε energidával $p_{n+1} = ?$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{-\beta E} \quad n+1 \text{ db egyenlet}$$

\uparrow B. Ansatz

$$\sum_{i=0}^{n+1} p_i = 1 \quad +1 \text{ egyenlet}$$

$$\text{Megoldás: } p_n = \frac{e^{-n\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon} + \dots + e^{-n\beta\varepsilon}}$$

$\Rightarrow n+2$ db egyenlet, $n+2$ db ismeretlen
 P_1, \dots, P_{n+1} $(n+1)$ db

$$\text{nevező: } Z = 1 + \bar{e}^{-\beta\varepsilon} + \dots + \bar{e}^{-n\varepsilon\beta} = \frac{\bar{e}^{-(n+1)\varepsilon\beta} - 1}{\bar{e}^{-\varepsilon\beta} - 1}$$

\uparrow dílapötösszeg \uparrow mértni sorozat

$$q^{n+1} - 1 = (q-1)(q^n + \dots + 1)$$

ha $n \rightarrow \infty$, akkor $Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}$

$$P_n = \frac{e^{-\beta n \varepsilon}}{Z} \quad \text{Bijz: } \quad \frac{P_{n+1}}{P_n} = e^{-\beta \varepsilon} \quad \text{OK} \quad \sum p_i = \frac{\sum e^{-n \beta \varepsilon}}{Z} = \frac{Z}{Z} = 1 \quad \text{OK}$$

$$\text{Ezzel a betölte's várható értéke: } \langle n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i\beta E} \cdot i =$$

$\left[\partial e^{-i\beta E} / \partial \beta \right] = -i e^{-i\beta E}$

formális deriválás βE -re mint

$$= \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial(\beta\varepsilon)} \sum_i \bar{e}^{-i\beta\varepsilon} (-1) = (1 - \bar{e}^{-\beta\varepsilon}) (-1) (-1) (-1) (-1) e^{-\beta\varepsilon} \frac{1}{(1 - \bar{e}^{-\beta\varepsilon})^2} =$$

$\underbrace{\frac{1}{z}}_{z = \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}} \quad \underbrace{\frac{1}{z}}$

deriválás
(hárva-
dos)

nevezőt
deriválva

$e^{-\beta\varepsilon}$ -t deriválva
 $\beta\varepsilon$ nem

$$= \frac{e^{-\beta \epsilon}}{1 - e^{-\beta \epsilon}} = \boxed{\frac{1}{e^{\beta \epsilon} - 1}} \quad \leftarrow \text{Bose-Einstein}$$

Összefoglalás:

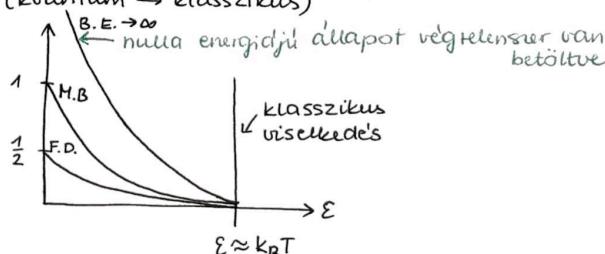
$$F - D : \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1}$$

$$B-E : f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$$M - B : \quad f(\varepsilon) = e^{-\beta\varepsilon} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}}$$

ha $\varepsilon \gg k_B T$: (akkor 1 elhanyagolható $e^{\beta \varepsilon}$ -hez közelít)

F-D e's B-E is M-B -her tart
(kvantum → klasszikus)



TERMODINAMIKAI POTENCIAL

U: belső energia

H: entalpia

F: szabad energia (Helmholtz-féle szabad energia)

G: Gibbs-potenciál, Gibbs-féle szabadenergia, szabadtalpia

$$dU = TdS - pdV; \quad U = U(S, V) \text{ ext.-tól függ} \quad S, V \text{ a természetes vált (F.E. alapján)}$$

$$H = U + pV \Rightarrow dH = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp \rightarrow H = H(S, p)$$

$$F = U - TS \Rightarrow dF = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV \rightarrow F = F(T, V)$$

$$G = U - TS + pV \Rightarrow dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp = -SdT + Vdp \rightarrow G = G(T, p)$$

\downarrow intenzív!

$$\begin{array}{c} -TS \\ U \xrightarrow{\substack{-TS \\ +pV}} F \\ \downarrow \quad \downarrow \\ +pV \quad \quad \quad pV \\ H \xrightarrow{\substack{+pV \\ -TS}} G \end{array}$$

U: S, V a term. változói, fizikában hasznos (rendszer mechanikai energiája)

H: S, p — " — , állandó nyomáson lévő folyamatoknál fontos, vegyesek használjak $dH = \delta Q_p$ (kémiai reakcióhő)

F: gépesek, maximálisan kinyerhető mechanikai munka

G: bioldgusok, nem termikus, nem mechanikai munka (pl. anyagi)

Legendre-transzformáció

Harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye:

$$L(x, \dot{x}) = L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Dx^2$$

definíció

harm. oszc.

$$\text{Hamilton-függvény Lagrange-függvényből: } H(x, p) = \underbrace{\dot{x} \cdot p - L(x, \dot{x})}_{\frac{p^2}{m}} = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

$\dot{x} \rightarrow p$ -re áttérés: $\dot{x}p - t$ laponok
(előjel előjeleg)

$$U(S, V) \rightarrow H(S, p)$$

$V \rightarrow p$ áttérés: $(-pV) - t$ laponok Ez az áttérés a Legendre-transzformáció

Fundamentális függvények: a termodin. potenciálok saját, ún. természetes változói szerint kifejezve

pl. $U = U(T, V)$ volt, de $U = U(S, V)$ a fund. függv.

$$H = H(S, p)$$

$$F = F(T, V)$$

$$G = G(T, p)$$

$$\left. \begin{array}{l} dU = TdS - pdV \\ dH = TdS + Vdp \\ dF = -SdT - pdV \\ dG = -SdT + Vdp \end{array} \right\} \text{FIZIKA} \quad \begin{array}{l} (H = U + pV) \\ (F = U - TS) \\ (G = U - TS + pV) \end{array}$$

Fundamentális függvények deriváltjai:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p$$

$$\overset{\text{MATEK}}{\text{Hasonlóan: }} \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V \quad \left. \begin{array}{l} \text{erek} \\ \text{állapot-} \\ \text{egyenletek} \end{array} \right\}$$

Maxwell-rendszer

$$\text{Eml. } \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \dots$$

$$\text{Young-tétel: } \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

$$\text{Hasonlóan: } H: \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \quad F: -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad G: -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\text{Pl. } \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\beta_p \text{ volt, } \text{jb. } S(p) \text{ ha } T = \text{du}$$

$$\text{Pl. } \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \text{ volt, } f(x, y) = \text{const} \quad df = 0 \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{f=\text{du}} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}$$

$$\text{innen } f \equiv V, \quad y \equiv p, \quad x \equiv T \text{ erzékt: } \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} = -\frac{V\beta_p}{-V\kappa_T} = \frac{\beta_p}{\kappa_T} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{\beta_p}{\kappa_T} \text{ jön ki}$$

Gyakorló példa: id. gáz: $S(p, V) = S_0 + nC_V \ln \frac{p}{p_0} + nC_p \ln \frac{V}{V_0}$ Biz. be, h. $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -V\beta_p$

FUNDAMENTALIS FV-EK TÖVIBBI TULAJDONSAI

$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S$ és $F = U - TS$ innen megkapható: $F = U + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$
 másik pl.: $G = U - TS + PV \stackrel{!}{=} H - TS$ és $dG = -SdT + Vdp$ innen $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S$
 tehát: $G = H + T \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P \quad \leftarrow \text{Gibbs-Duhem relációk}$

EULER - EGYENLETEK

Termodynamikai potenciálok extenzívek, de változóik extenzívok és intenzívök

Tekintsük λ -szorosra növelt rendszert

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\lambda} \Rightarrow \lambda \xrightarrow{\lambda} \text{ és } X \rightarrow \lambda X \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \text{int} \qquad \qquad \qquad \text{int} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} U(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \lambda U(S, V, n) \\ H(\lambda S, P, \lambda n) = \lambda H(S, P, n) \\ F(T, \lambda V, \lambda n) = \lambda F(T, V, n) \\ G(T, P, \lambda n) = \lambda G(T, P, n) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{csak akkor lesz } U \text{ } \lambda\text{-szoros, ha } T \text{ extenzív} \\ \text{változóját } \lambda\text{-szorosra növ.} \\ \text{TAPASZTALAT} \\ \text{SZERINT} \end{array} \right.$$

Euler-tétel: ha $f(x)$ -re igaz, hogy $\lambda f(x) = f(\lambda x) \forall \lambda$ -ra, akkor ennek csak $f(x) = C \cdot x$ homogen egyenlet a mo-ja.

Biz $\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} = x \cdot \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} \quad \text{másfelől } f(\lambda x) = \lambda f(x)$
 $\xrightarrow{\text{dánccsabálás}}$
 $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = x \cdot \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} \quad \forall \lambda \text{-ra, pl. } \lambda=1 \text{-re is!}$

tehát: $\lambda=1$ -re: $f(x) = x \cdot f'(x) \rightarrow$ innen $f' = \text{const}$

Alkalmazás a termodynamikai potenciálokra:

pl. U -ra $U(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \lambda U(S, V, n)$ innen (több vált.) \rightarrow

$$dU(S, V, n) = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, n} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, n} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{S, V} dn \quad [dU = Tds - pdv + \mu dn]$$

$$U(S, V, n) = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, n} \cdot S + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, n} \cdot V + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{S, V} \cdot n, \quad \text{ahol } \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, n} = T \text{ stb.}$$

Tehát $U(S, V, n) = TS - PV + \mu n$

\leftarrow mert $f(x) = C \cdot f'(x)$ alakú! (Euler-t)

Innen: $H = U + PV \rightarrow H = TS + \mu n$

$$F = U - TS \rightarrow F = -PV + \mu n$$

$$G = U - TS + PV \rightarrow G = \mu n \quad \leftarrow \text{csak anyagtól függ, nem mechanikai és nem termikus munkavégzés}$$

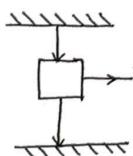
HÖTAN III FÖTÉTELE

(IV. fötétel: Onsager - relációk)

Volt: $\rightarrow S = S_0 + \dots$ mennyi az $S(T=0) = ?$

\rightarrow hasonlóan $U(T=0) = ?$ (id. gáz)

\rightarrow Carnot körfolyamat



$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{ha } T_2 = 0 : \eta = 1 \quad \text{de ez nem lehet!}$$

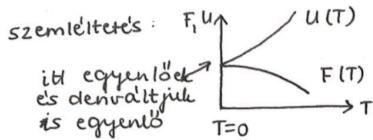
Kísérletek: Walter Nernst (1906 - 1912)

\rightarrow kimai reakciós hői

\rightarrow reakciós hői egyre csökken T csökkenésével, 0-ra tart

Planck általánosította e's matematizálta

III főtétel: $\lim_{T \rightarrow 0} U(T) = \lim_{T \rightarrow 0} F(T)$ és $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial T}$ Megj: $F = U - TS$



szemléltetés: itt egyenlők és derivatek is egyenlő

számláló 0 (Planck áll.)

Planck-féle összefüggés következményei:

$$S = \frac{U - F}{T} \rightarrow \text{beírva: } \lim_{T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{U - F}{T} \xrightarrow{\frac{0}{0}-\text{fél}} l'Hopital:$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{U - F}{T} \xrightarrow{l'Hopital} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T}}{1} = 0 \rightarrow S(T=0) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{alapúapot nem} \\ \text{degenerált, } W=1 \end{matrix} \text{ekvivalens}$$

Kordábban volt:

$$S = S_0 + \int_0^T \frac{\delta Q^{kw}}{T'} = S(T=0) + \int_0^T \frac{C(T')}{T'} dT' \quad \begin{matrix} C \neq 0, \text{ min lineáris rendben} \\ 0-\text{ba tart} \end{matrix}$$

$\delta Q^{kw} = C(T) dT \rightarrow C: \text{hőkapacitás}$

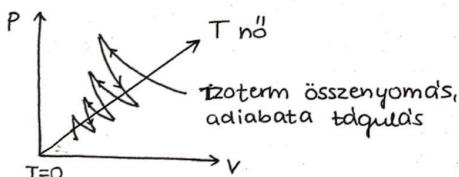
Mivel $\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0 \rightarrow C(T) \text{ is } 0\text{-ba tart}$ egészére lineáris rendben

$\Rightarrow \boxed{\text{fajhő } 0\text{-ba tart}} \Leftarrow \text{Planck ö.f.-ból következményként kapjuk}$

Összefoglalás III főtétele:

- ① Planck: $U(T) = F(T)$ és $\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T}$ ha $T \rightarrow 0$
- ② $S(T=0) = 0$
- ③ $\lim_{T \rightarrow 0} C(T) = 0$
- ④ $T=0$ nem érhető el véges számú lépésekben

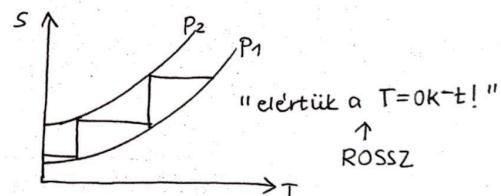
Szemléltetés



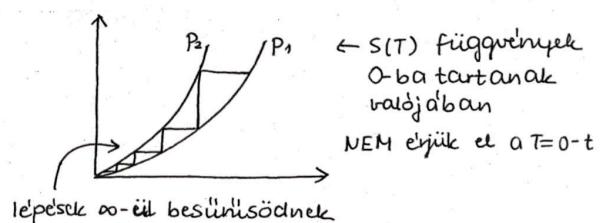
$0-t$ nem érjük el

$(T \rightarrow \frac{1}{T}-s \text{ eppen } \infty)$

egyre kisebbet tudunk haladni, csak megközelíteni tudom



ROSSZ



NEM érjük el a T=0-t

lépések ∞ -éig besűrűsödnek

④ és ② közötti kapcsolatot szemlélteti

EGYE'B FIZIKAI MENNYISE'GEK T=0 KÖRÜL

$$\beta_p(T) = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \cdot \frac{1}{V} = 0$$

Maxwell-öf.

biz. nélkül

\Rightarrow legtöbb fiz. menny. 0-va változik,
ha $T=0$: $C, \beta, K, \mu_{\beta T}$

$$dG = -SdT + Vdp$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$S(T) = S(T=0) + nC_v \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$ mennyi $T_0 = 0 - n$?

id.g.

Megj. $S(T) = S(T=0) + nC_v \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$ mennyi $T_0 = 0 - n$?
 \Rightarrow iedelius gáz konceptciója nem lehetséges igaz $T_0 = 0$ hőm-en, $T \rightarrow 0$ esetben

T=0 MEGKÖZELÍTÉSE

${}^4\text{He}$ 1905 $T = 4,2 \text{ K}$

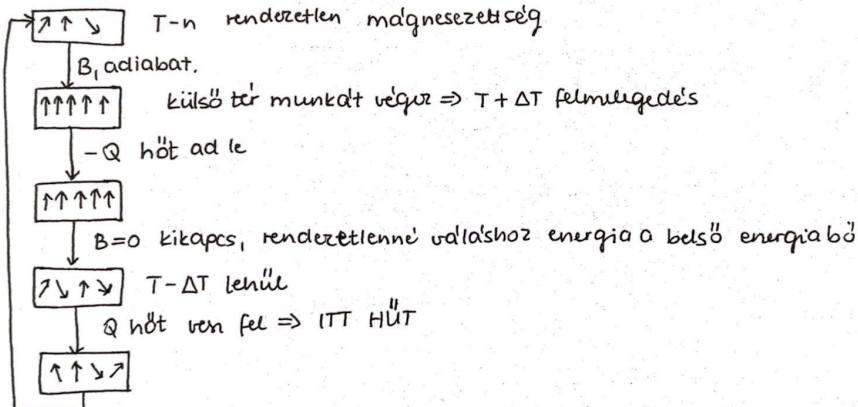
${}^3\text{He}$ $T = 0,5 \text{ K}$

${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ $T = 10 \text{ mK}$

adiabatikus lemagasztás: 60-as évek: 1 uK

lézeres hűtések: 10^{-9} K (szembejövő atomot gerjeszti a lézer, Doppler-effektus → sugárzás → lehűl)

Adiabatikus lemagasztás



emiatt repül szembe
(az gerjesztődik)

- ① gumiszalag analógiája:
 - rendezetten rostok
 - meghúzás
- felmelegszik, rendezettek
 - lehűl
 - összeugrik,
 - újra rendezetten, kömyzetétől hőt vesz fel
- ② ideális gázval hűtőgép

FAZISÁTALAKULÁ'SOK

halmarálapotváltások, szilárd, légnemű, cseppfolyós

FАЗИС minden halmarálapotváltás fazisátalakulás, de fordítva nem pl. ferromágneses rendeződés, szupravezetés, szuperpolykonságról stb.

FAZISHATÁR 2 fazis közti átmenet, fiz. menny. ugrásokkal változhat

KOMPONENS adott kémiai összetettségű anyag. Mi csak 1 komponensű anyagokat vizsgálunk

HALMAZÁLLAPOTVÁLTOZA'SOK reverzibilisek, p-T diagram

- ① foly. ↔ szil. átmenet (olvadás, fagyás)
- ② foly. ↔ gőz - " (párolgás, cseppfolyósodás)
 - ↑ általános, nem csak vízgőz
- ③ szil. ↔ gőz átmenet (szublimáció, megszilárdulás)

HARMASPONT víz: $T_h = 273,16 \text{ K}$, $P_h = 610,6 \text{ Pa}$ $T_{0,0} = 273,15 \text{ K}$ (10^5 Pa)

Mindhárom fazis együtt van jelen. T_h és P_h az univerzumban tölle ugyanaz!

CO_2 : $T_h = -56,6^\circ\text{C}$, $P_h = 5,1 \text{ bar}$

KRITIKUS foly. és gőz nem megkülönböztethető

víz: $T_k = 647 \text{ K}$

$P_k = 218 \text{ bar}$

CO_2 : $T_k = 31^\circ\text{C}$

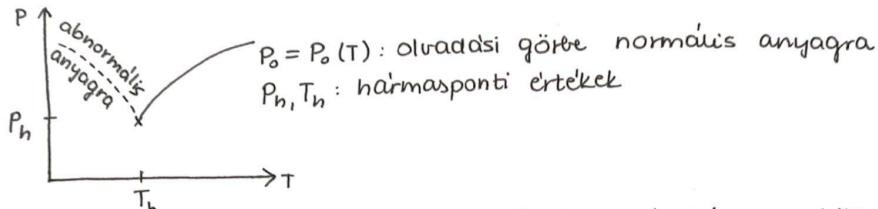
$P_k = 72,8 \text{ bar}$

① A'llandó nyomásban szil. anyaggal hőt közlik, cseppfolyósodik, megolvad

$T = \text{du}$ (fordítva: hőt vonunk el, megfagy)

→ olvaddasható, fagyasható (J. Black)

→ $T = \text{du}$. az extra hőt (latent hő) a molekulák közötti kötési energiákat bontja fel
(pl. víz: erősen poláros, Hidrogén híd-kötések szakadnak fel)

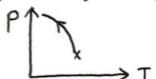


- a görbén fázisegyenlősügyben, együtta létezik a két fázis, stabilan (csak anyagaraink valtozhat)
- normalis anyag: olvaddsnál tagad
- abnormalis anyag: fagyásnál tagad (pl. víz)
 - v. ö. Földi élet, jég üszik a vizet, jég fix szerkezete nagyobb teret igényel

Le Chatelier-Braun-elv

A rendszer a külső hatásra úgy reagál, hogy a hatást csökkentse

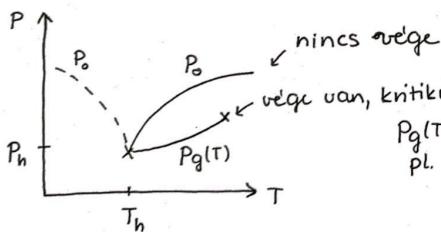
pl. jeget megnyomjuk: olv. pont csökken → megolvad → tel fogat csökken → erőhatás csök.



normalis anyag: $p \text{ nö}, T_0 \text{ nö} \rightarrow$ még több belölle megfagy → térf. csökken → erőhatás csökken



② Párolgás ↔ cseppfolyósodás



$P_g(T)$: ún. görbüre: itt egyensúlyban van a foly. e's görz fázis
pl. vízgörz: 1 bar, 100°C, ha $T = 20^\circ\text{C}$: $P_g = 20 \text{ mbar}$

kukta: $p > 1 \text{ bar} \rightarrow T_g > 100^\circ\text{C}$

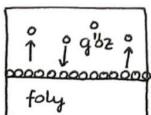
Paks: $p = 125 \text{ bar} \quad T_g \approx 350^\circ\text{C} \rightarrow$ ezért $T_{\text{Paks}} = 300^\circ\text{C}$
szubkritikus víz

Kritikus pont

sz. cseppf. görz "dt lehet menni" fázishatalról nélküli
(entropia, rendezettség szempontjából görz, foly. nem különbozdék)

$P_g(T)$ -n levő állapot neve: telített görz (pl. kriofor)

moldási értelmezés: "kukta"



dinamikus egyensúly: időegység alatti elpárolgás száma = idő-
egység alatti lecsapódás száma

p csak T -től függ, nagyon nem id. q. tr!

párolgás hőt von el, ha elmagy $E_{\text{elmagy}} > E$

Hétköznapokban:

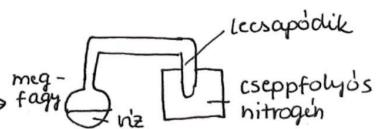
- derzodor

- nedves hőmérő (vízes végett mozgatjuk)

- wind chill (nedves bőr szélben nagyon hideg)

- fagyásztálos érzéstelenítés (spray)

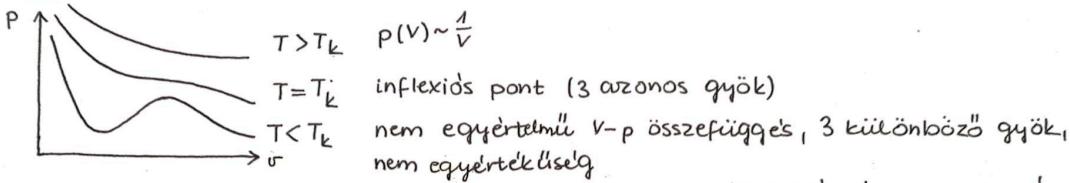
- kriofor



VALÓDI GÁZOK IZOTERMAI

vdw: $\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V-nb) = nRT$ $v: \frac{V}{n}$ fajlagos (molaris) térfogat
 $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(v-b) = RT$ \rightarrow izotermákat ír le

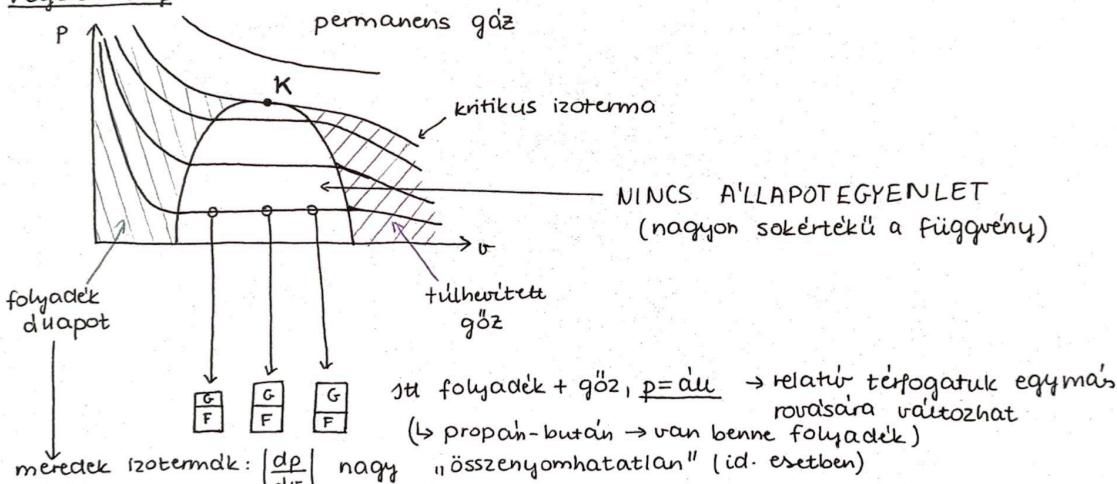
Abrázolva:



Megvalósuló izoterra uin.
Maxwell-konstrukció

két terület arányos \Leftrightarrow munkavégzés arányos
olyan részt nem vettet figyelembe, melynek nagysága
egymást kiejt

Végeredmény



stl folyadék + gáz, $p=a_{ll}$ \rightarrow relatív térfogatuk egymás
rangsára változhat
(\hookrightarrow propan-bután \rightarrow van benne folyadék)

\Rightarrow jól törölhető az erőköt \rightarrow hidraulikus rendszerek

\Rightarrow határgörbe: alatta fázisegyenlőség lehet.
Amikor áthaladunk ($p=a_{ll}$), akkor fázisugrás van, körülve a kritikus ponton!

Példák:

LPG: liquefied petroleum gas $\rightarrow C_3H_8 C_4H_{10}$

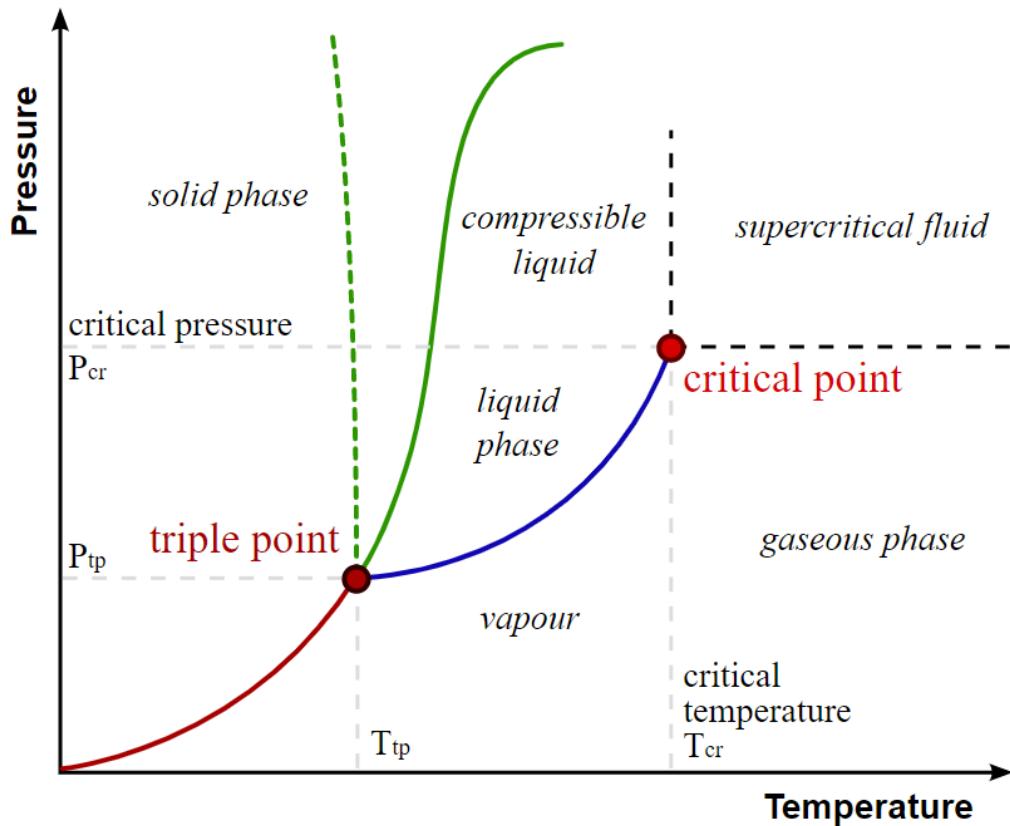
CNG: compressed natural gas (metán) $\rightarrow CH_4$ \rightarrow szobahőm.-n nem folyadék
 \hookrightarrow földgáz

LNG: liquefied natural gas $\rightarrow CH_4$ \rightarrow szállításhoz

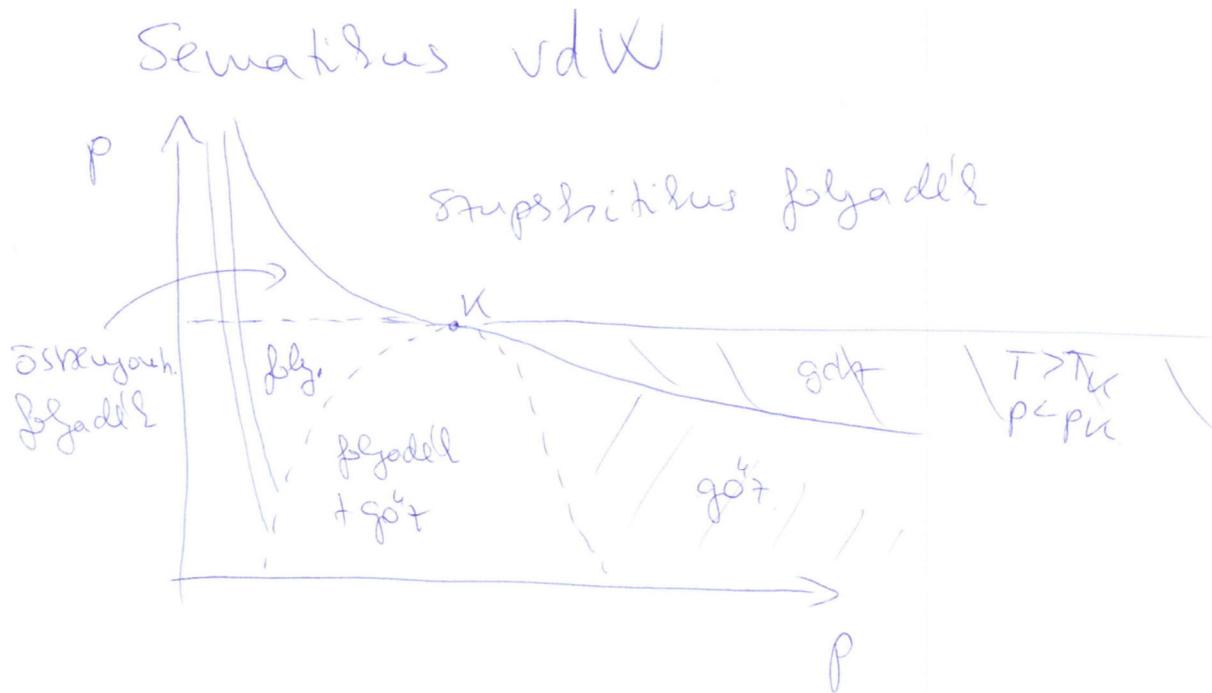
LPG: $T_k = 96^\circ C$ $P_k = 30 \text{ bar}$ } szobahőmérsékleten cseppfolyós $1 \text{ bar} < p < 30 \text{ bar}$

CNG: $P_k = 45 \text{ bar}$ $T_k = -82^\circ C$ } szobahőmérsékleten nem cseppfolyós, permanens gáz
(sosem cseppfolyós akkor $T-n$, de a túl-ai nagyon hasonlak)

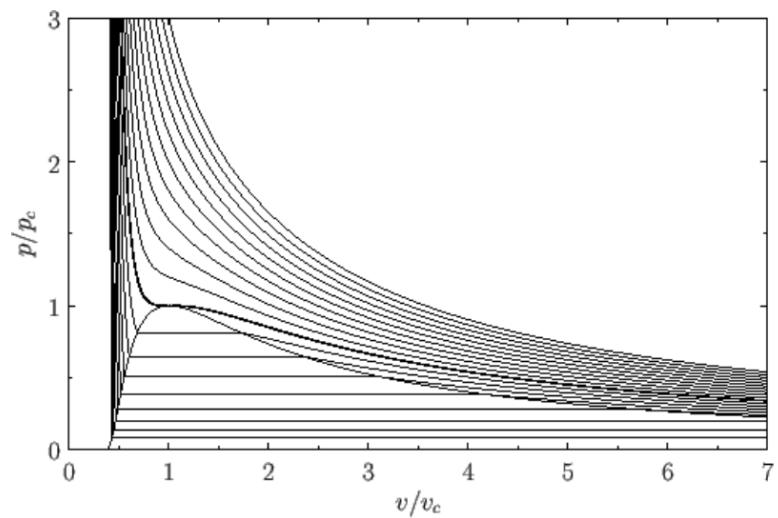
LNG: $T_k = -120^\circ C$ \rightarrow cseppfolyós



[https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_point_\(thermodynamics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_point_(thermodynamics))

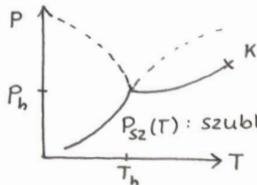


A görbék pontosabb lefutása

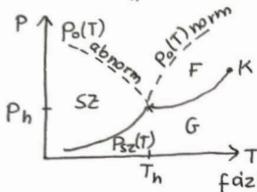


<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/sm1/Thermalhtml/node123.html>

③ Szilárd - Gáz átmenet

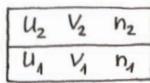


$P_{Sz}(T)$: szublimációs görbe: áthaladva rendezetlől rendezetlenbe, átalakulás van
Nincs kritikus pont!



FÁZIS EGYENSÜLY FELTÉTELE

pl. víz saját gázével kuktában



2. fázis
1. fázis

$$U = U_1 + U_2 = \text{const}$$

$$V = V_1 + V_2 = \text{const}$$

$$n = n_1 + n_2 = \text{const}$$

$$\text{Egyensúly feltétele: } S = \max, \quad dS = 0$$

$$\text{Teljes entropia: } S = S_1 + S_2 = S_1(U_1, V_1, n_1) + S_2(U_2, V_2, n_2)$$

$\hookrightarrow G$ változó, de csak 3 függelék (kétnysszeregyenletek szerint)

$$\Rightarrow dU_1 = -dU_2, \quad dV_1 = -dV_2, \quad dn_1 = -dn_2$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V, n} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U, n} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_{U, V} dn$$

Rendszerünkre felírva:

$$dS = \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1} \right)_{V_1, n_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2} \right)_{V_2, n_2} \right] dU_1 + \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial V_1} \right)_{U_1, n_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial V_2} \right)_{U_2, n_2} \right] dV_1 + \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1} \right)_{U_1, V_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial n_2} \right)_{U_2, V_2} \right] dn_1 = 0$$

tetszőleges dU_1, dV_1, dn_1 -re igaz $\Leftrightarrow \forall$ együttható külön-külön 0

$$\text{F.E.: } dS = \frac{1}{T} (dU + pdV - \mu dn) \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V, n} = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U, n} = \frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_{U, V} = -\frac{\mu}{T}$$

$$\Rightarrow \text{innen } \left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1} \right)_{V_1, n_1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2} \right)_{V_2, n_2} \Rightarrow T_1 = T_2$$

$$\text{hasonlóan } \left(\frac{\partial S_1}{\partial V_1} \right)_{U_1, n_1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial V_2} \right)_{U_2, n_2} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_1 = p_2 \quad \text{Végül } \boxed{\mu_1 = \mu_2}$$

\Rightarrow egyensúly feltételi: a két fázisban \forall intenzív parameter arányos

FÁZISDIAGRAM ÉS CLAUSIUS - CLAPEYRON EGYENLET

$$\text{Fázishatáron: } p_1 = p_2, \quad T_1 = T_2, \quad \underbrace{\mu_1(p_1, T_1) = \mu_2(p_2, T_2)}_{\text{ezt vizsgáljuk}}$$

$p(T)$ összefüggést keresünk, sok értéke van, de tudjuk, hogy $\mu_1 = \mu_2$

Tekintsük: $\mu_1(p_1, T) = \mu_2(p_1, T) - t$! T szerint deriválunk (elsz parciális tisztségekkel)

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{dT} = \frac{d\mu(p, T)}{dT} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dT} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_T, \quad \mu \text{ explicit T függése}$$

Nem baj, ha az eredeti $p(T)$ -t nem kapjuk meg, elég $\frac{dp}{dT}$ -t ismernem (a fr. vizsgálathoz)

Mindkét oldalról \otimes -nak deriválva:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T} \right)_p - \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T} \right)_p}{\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial p} \right)_T - \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial p} \right)_T}$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_p = ? \quad G(p, T, n) \Rightarrow dG = -SdT + Vdp + \mu dn \quad \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)_{T, p} = \mu, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_{T, n} = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{V, n} = -S$$

$$\text{Maxwell - ö.f.: } \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{n, p} = -\left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_{T, p} = -S_M : \text{moláris entropia}$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{T, n} = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{T, p} = V_M : \text{moláris térfogat}$$

S és n ext., két ext. egymás lineáris fv-e ha integrációval konstansak

$$\Rightarrow \text{Clausius - Clapeyron egyenlet: } \frac{dp}{dT} = \frac{S_{M_2} - S_{M_1}}{V_{M_2} - V_{M_1}}$$

Fázisátalakulásnál van dn. latens hő (pl. jegüt melegítjük, megolvasztva, de nem emelkedik a hőmérséklet)

$$\hookrightarrow S_{M_2} - S_{M_1} = \Delta S_{M_1,2} = \frac{Q_{M_1,2}}{T} \leftarrow \begin{array}{l} \text{latens hő} \\ \text{ELŐELES! (pl. paralgaásnál + a latens hő)} \end{array}$$

Betűvel: $\frac{dp}{dT} = \frac{Q_{M_1,2}}{T(V_{M_2} - V_{M_1})} \Rightarrow$ kapcsolat latens hő és moldáris terfogatvált. között

DISZKUSSZIÓ:

A) foly → gőz: $V_{MF} \ll V_{MG_1}$, $Q_{M_1,2} > 0 \rightarrow \frac{dp}{dT}$ aránylag kis szám $\nearrow P_g(T)$

B) szil. → foly. $Q_{M_1,2} > 0$ (olvadásra) → normális: $V_{MS_2} \lesssim V_{MF}$, $\frac{dp}{dT} > 0$ nagy szám $\nearrow P_o(T)$ norm

→ abnormális: $V_{MS_2} \gtrsim V_{MF}$, $\frac{dp}{dT} < 0$ nagy abs. érték $\nearrow P_o(T)$ abnorm

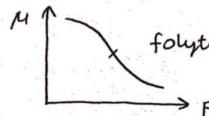
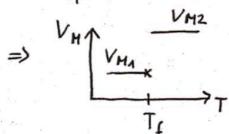
C) szublimáció: (szil. → gőz) $Q_{M_1,2} > 0$, $V_{MS_2} \ll V_{MG}$ → $\frac{dp}{dT} > 0$ kis szám $\nearrow P_{Sz}(T)$

FÁZISÁTALAKULÁSOK OSZTAĽOZÁSA

a-clap: $\Delta V_H \neq 0$ véges terfogatvált.

• Elsőrendű fázisátalakulás:

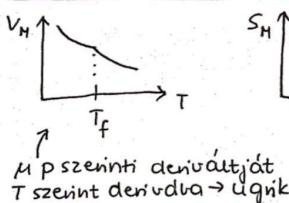
$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{T, n} = V_H \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p, n} = -S_H$$



folytonos a μ , de első derivált ugrat

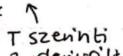
ugrat ⇒ van latens hő

• Másodrendű fázisátalakulás: μ : 1. deriváltja folytonos, 2. ugrat



$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}, \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial T \partial p} \text{ is ugrat}$$

Tapasztalat: vannak ilyen folyamatok a természetben



Második deriváltak

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \right)_{T, n} = \left(\frac{\partial V_H}{\partial p} \right)_{T, n} = -K_T \cdot \frac{V}{n} \quad \text{Megj: } \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{\partial_n V_H}{\partial p} = -K_T \cdot V$$

mérhető fizikai mennyiségek ← ez ugrat!

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_{p, n} = - \left(\frac{\partial S_H}{\partial T} \right)_{p, n} = - \left(\frac{\partial S_H}{\partial H} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = - \frac{C_p}{T} \quad \text{← ez is ugrat}$$

nem intuitív $\uparrow n \cdot C_p$

$$F.E.: dH = Tds + Vdp \rightarrow ds = \frac{1}{T}(dH - Vdp), dS_M = \frac{1}{nT}(dH - Vdp)$$

véges derivált:

$$\frac{\partial \mu}{\partial T \partial p} = \left(\frac{\partial V_H}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{n} V \beta_p \quad \text{or is ugrat!}$$

Clausius - Clapeyronnak csak elsőrendűre van értelme!
Másodrendű fázisátalakulások pl.: szupravezetés, ferromagnézesség ($B=0$)



másodrendű fázisátalakulás: $K-n$ keresztül
(csak itt van másodrendű!)

KVANTUMMECHANIKA

Helye

mechanika (16-17. sz.) Newton, Lagrange, Hamilton

elektrodinamika (19. sz.) Maxwell

termodynamika (19. sz.)

↑ Klasszikus

spec. relativitás elm. 1905 (volt előzmény) ↓ Modern

általáhos rel. elm. 1916- 2016 → gravitációs hullám

kvantummechanika 1920 Heisenberg, Bohr, Schrödinger

relativisztikus kvantummecha. 1928 Dirac

elektromos kölcsönhatás tétele (1950 Feynmann, Tomonaga, Dyson)
(kvantum el. din. QED)

elektromágneses k.h. 1970 Weinberg, Glashow, Salam

standard modell: erős, gyenge, elektromos k.h. egyesítése 1960 - 2015
Gell-Mann, Higgs

GUT (grand unified theory) (Mindenség elmélete) próbálkozások,
kvantumgravitáció, szuperhullám Higgs-bozon

"3 párhuzamos történet"

① Elektromágneses sugarás

1814: Fraunhofer: vonalas színkép a Nap spektrumában

1859: Kirchhoff: {anyagok kibocsátási / elnyelési spektruma, Bunsen-égo
→ láttható fény elnyelésében vonalak vannak \Leftrightarrow ugyanott bocsát ki

1879: Josep Stefan → kibocsátott teljesítmény az ún. "fekete testre"

1884: Boltzmann → termodyn + Maxwell egyenletek \Rightarrow kisug. telj. $\sim T^4$

1890: Wien → eltoldási tömeg

1900: Rayleigh-Jeans → sugarásai tömeg: alacsony freku- \rightarrow jd, magasra nem:
"ultraibolyai katastrofa"

1900: Max Planck (1918 Nobel) → fekete test - sugarás leírása: "kvantum hipotézis"
sugarásai tömeg. "A tapasztalat dönti el, hogy igaz-e!"

② Fény és anyag kölcsönhatás

17-18. sz. Huygens → fény: hullám

1803 Young: két részes kísérlet → elhajlás (= diffráció)

1887 Hertz: fény hatására fémekből elektronok lépnek ki → fotoeffektus

1905 Lenard Fülöp: fotoeffektusról minden lemezt

1905 Einstein (1921 Nobel) → elmélet: $E = h\nu$ foton

③ Atommodellek

i.e. 4. sz. Demokritosz: sajt + kecs → egy idő után nem tudjuk kisebb darabokra vágni
"atomosz"

1848 M. Faraday: katodsgárdas

1870 Mengyeljev: periodusos rendszer

1880 Rydberg: vonalas színkép → He felfedezése

1904 Thomson - atommodell: "mázsolás puding"

1909 Szodalskísérletek (radioaktív sugarás)

1911 Rutherford atommodell: atomi naprendszer

1913 Bohr - modell

1914 Frank-Hertz kísérlet

1924 de Broglie anyaghullám hipotézis

1927 Davisson-Germer: de Broglie bizonyítása

1926 Schrödinger egyenlet → hullamegyenlet

1927 Heisenberg-féle határozatlansági elv

FEKETE TEST SUGÁRZÁSA

Megfigyelés Kirchhoff: elnyelés (abszorpció) \Leftrightarrow kibocsátás (emisszió): összefüggés
Legyen az anyag termikus egysensűrűban a környezettel

$$\text{emisszió} \rightarrow \frac{e(\nu, T)}{\text{absz.}} = u(\nu, T)$$

D: nő

univerzális függvény (Kirchhoff döntése)

Az ún. fekete test koncepciója: $a(\nu, T) = 1$ (minden sugárzást engel)

$$\rightarrow \text{innentől e(\nu, T) = u(\nu, T)}$$

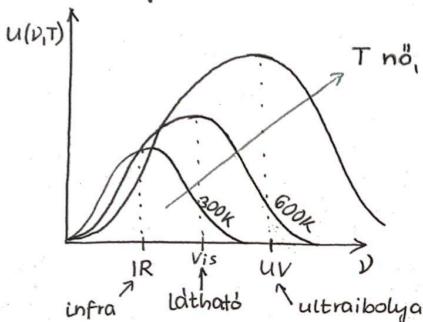
ezt keressük

Íd közelítés fekete testre:



=> érdes felület kis lyukkal \rightarrow NEM jön ki a bejutó energia, csak a lyukon
 \rightarrow dobozt lehetetjük, lyuk elő detektor, prizma $\Rightarrow u(\nu, T)$ meghatározható

\Rightarrow Eredmény:



T nő, görbe alatti terület:

$$\int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \quad \begin{matrix} \text{Stefan-Boltzmann - összefüggés} \\ \uparrow \\ \text{S-B állandó (szigma)} \end{matrix}$$

Eltoldási törvény (Wien): $\lambda_{\max} T = \text{konst}$
 $\rightarrow T \text{ nő} \Rightarrow \nu_{\max}$ felfele tolódik

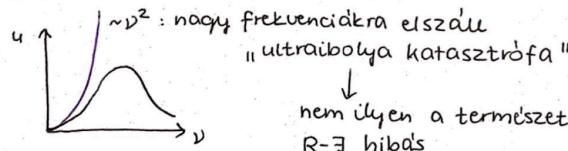
PL. infrakamra, emberi test: $\sim 300K$

Nap $T \sim 6000K$ \rightarrow intenzív a latható fény + UV komponens

üreghatározás \rightarrow légkörön Vis (visible) átmegy, IR nem (ha Föld IR-t sugározza, az csapdázódik)

Elmondási próbálkozás:

$$\text{Rayleigh-Jeans} \rightarrow u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B \nu^2 T \quad \begin{matrix} \text{klasszikus fizika} \\ \uparrow \\ \text{Maxwell-egyenl. segítségével} \end{matrix}$$



$$\text{Planck: } u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad \begin{matrix} \text{(empirikus összefüggés volt számára - jó! fittelő öf.)} \\ \text{Planck-féle sug. tr.} \end{matrix}$$

$$\text{Akk: } \int_0^{\infty} u_{\text{Pl.}}(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \quad \begin{matrix} \text{(Planck-féle strukt integrálva σT⁴-t ad)} \end{matrix}$$

és a Wien-féle ettől tr-t $u_{\text{Pl.}}(\nu, T)$ deriválása adja: $\frac{du}{d\nu} \rightarrow$ maximum helye,
 $\lambda_{\max} T = \text{const}$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3 k_B T}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad \begin{matrix} \text{(alacsony fr. határesetben Rayl.-J. öf-t adja)} \end{matrix}$$

$\uparrow h$ (Planck-öf.) kicsik \Rightarrow nem kvantumos, hanem klasszikus

\Rightarrow visszaadja a többi empirikus öf.-t

Az üregben oszcillátorok vannak. (oszcillátor = egysensűrű helyzet körül rezgő atomok)
A oszcillátor csak hν energiát adhat le vagy nyújt el (\leftarrow segédhypotézisekkel kelle PL.)

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}, \nu: \text{az oszcillátor frekvenciája}$$

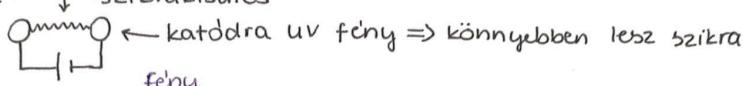
Mintel nagyobb a frekvencia, annál nagyobb a tömeg az atomnak

\rightarrow nagyobb energia \rightarrow emiatt csökken $u(\nu, T)$ ν növelésével

\otimes Bose-Einstein statisztika - bozon statisztika alakjált adja

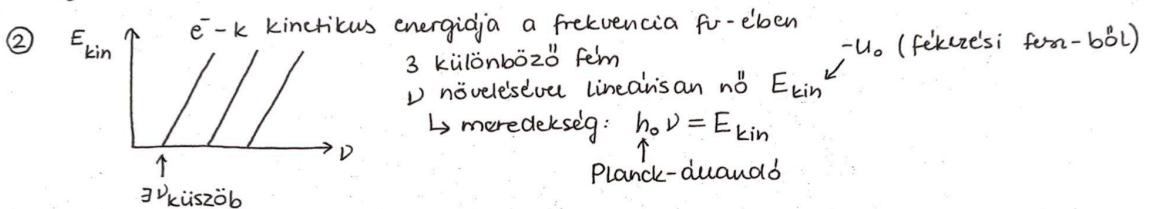
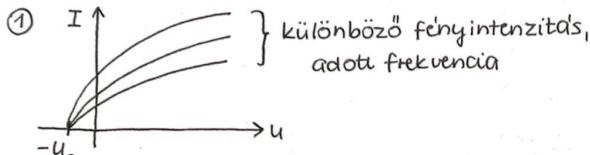
FOTOEFFECTUS (fény-anyag k.h.)

Felfedezése: Hertz: szíkrakisütés



Katodszugárcső: katód + - anód
Fény hatásra e- k lépnek ki

illetve lehet ellentétesen kapcsolni,
kitépő e- k a vonzás miatt visszafordulnak,
⇒ ún. lefekezési feszültség mérhető,
kitépő e- k mozg. energiája



Megfigyelés

fotoeffectus ν -tól függ

van lezárási fesz., csak ν -tól függ, intenzitástól nem

áram (e^- dbszám) ~ intenz.

⇒ klasszikus fizika elmelet NEM jó!

Einstein:

- vegyiük a Planck-hipotézist komolyan ⇒
 - elektromagn. sug. $h\nu$ energiakvantumokban terjed ⇒ fotonok
 - egy foton egy e^- -t tud kiütni
- $$E_{foton} = h\nu \rightarrow E_{kin} = h\nu - W$$
- kitepései munka

PL UV: ν nagy
IR: ν kicsi

El. mág. sug.: egyszerre lehet hullám és részecske természetű

Fény impulzusa:

$$E(p) : \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad \text{ha } m_0 > 0$$

energia $E = h \cdot \nu$

nyugalmi tömeg

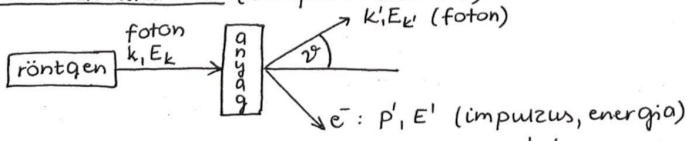
fényre: $m_0 = 0 \rightarrow E_{fény}(p) = p \cdot c = h \cdot \nu$

bevetetve: $p = \frac{\hbar \cdot 2\pi}{\lambda}$ innen: $p = \frac{\hbar \cdot 2\pi}{\lambda} = \hbar \cdot k$

$k: \text{hullámszám } k = \frac{2\pi}{\lambda}$

fénysebessége
 $c = \lambda \cdot \nu$

Impulzus kimutatása: (Compton-kísérlet)

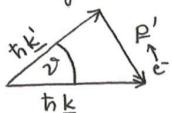


$e^- : p', E'$ (impulzus, energia)

nyugalmi e^- szórás → nyugalmatlan a részecske gerjesztése - nek felé meg

(röntgen:
aránylag nagy
(megfelelő) impulzusú
sugarázást ad)

imp. megmaradás:



$$h\underline{k} = h\underline{k}' + p'$$

$$\cos \text{tétel: } p'^2 = h^2 k^2 + h^2 k'^2 - 2 h^2 k k' \cos \vartheta$$

energiamegmaradás: kezdetben nyugvó e^-

$$m_0 c^2 + E_k = E'_k + \sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2} \quad \text{relativisztikus}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
e⁻ foton kezdeti
nyugalmi energ.

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p'^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p'^2}{2 m_0^2 c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{p'^2}{2 m_0} \quad \leftarrow \text{klasszikust visszakaptuk}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ átrendezve: } E_k - E'_{k'} = \frac{p'^2}{2 m_0} = \frac{h^2}{2 m_0} (k^2 + k'^2 - 2 k k' \cos \vartheta)$$

\downarrow
 $\begin{array}{c} \text{energia-} \\ \text{megmar.} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{cos tétel} \\ \text{imp. megmar.} \end{array}$

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{h^2}{2 m_0} \left[\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda'} \right)^2 - 2 \frac{(2\pi)^2}{\lambda \cdot \lambda'} \cos \vartheta \right]$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{h}{2 m_0 c} \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2 \cos \vartheta}{\lambda \cdot \lambda'} \right] \quad / \cdot \lambda \cdot \lambda'$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{2 m_0 c} \left[\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} - 2 \cos \vartheta \right]$$

$$\text{legyen } \frac{\lambda}{\lambda'} \approx \frac{\lambda'}{\lambda} \approx 1$$

Precizebb:

$$\lambda' = \lambda + \Delta \lambda$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda + \Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda + \Delta \lambda} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + 1 - \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 2$$

első renben sorjáts

→ Kicsit letekkel jól egyezik!

$$\lambda_{\text{compton}} = \frac{h}{m_0 c} \approx 10^{-11} \text{ m} \quad \text{származtatott fizikai mennyiségek}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \text{ö.} \quad \uparrow \quad \boxed{\lambda_{\text{fénny}} = \frac{h}{P_{\text{fénny}}}} \quad \text{hullám-e s részecsketermelészet is}$$

↳ olyan, mintha az e^- fénysebességgel haladna,

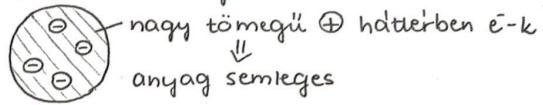
e^- impulzusa a nevező

↳ $\Rightarrow e^-$ hasonlóan viselkedik, mint a fénny!

ATOMMODELLEK

Thomson: 1896 e⁻ felfedezése (katódsug. kísérletek)

- $\frac{e}{m}$ kísérlet, katódsugárzás → e⁻ töltésének és tömegének hárnyadása: fajlagos töltés
 - e⁻ töltése: Millikan kísérlet → e⁻ negatív töltött, kis tömegű részecske
- Thomson-féle atommodell: (mázsolás pudincs)



Rutherford 1896: Becquerel: radioaktivitás:

γ : nagy energiadús fotonok

β : e⁻, gyors → kb. mindenben átmegy, nem nagyobb hat kölcsön az anyagokkal

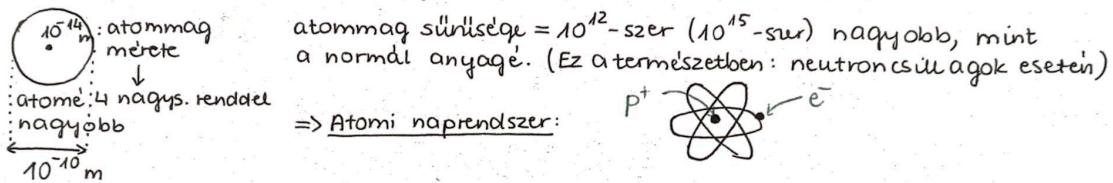
α : He²⁺ (atommagok) → nagy energiadús sugárzás

megfigyelés:

He²⁺ nagyrészt elhaladnak, DE néhány elterül, visszaverődik (az aranyfolídör)

Rutherford: „olyan, mintha egy tüzeſſe gi lövedék egy papírlapról visszaverődne”

Rutherford: 1911 atommodell: tömeg nagyon kis téren (atommagban) koncentrálódik



Bohr-féle atommodell CÉL: kísérleteket magyarázzon

Előzmények: kísérlet: ún. vonalas színkép 1880 Rydberg

↳ H atomra összefüggések a kibocsátott fény hullámhosszában

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_1, n_2 \text{ poz. egész, } n_1 \neq n_2 \quad (\text{EMPIRIKUS Ö.F.})$$

↑ Rydberg-dúando pl. $n_1=1 \quad n_2=2$ Lyman sorozat (UV)

$n_1=2 \quad n_2=3$ Balmer — " — (Vis) ← látható fény

$n_1=3 \quad n_2=4$ Paschen — " — (IR)

Atomai naprendszer problémái:

- keringő e⁻ gyorsulva mozog → sugározna kellene folytonos spektrummal
- e⁻: belezuhanna az atommagba (Energia veszik a sugárzással)

Bohr-modell: ad-hoc hipotézis:

előírják, mert éppen kell

- gyorsulva nem sugároz elektron az atomban
- amikor két duapot között megy át: → sugárzást bocsát ki (emisszió) → — " — nyel el (abszorpció)

- csak meghatározott pályák lehetségesek

ún. kvantálási feltétel $L = n\hbar$ \hbar egész számú többszöröse lehet
↑
impulzus-momentum (Planck-elm. dimenziója = imp. mom. dimenziója)

H atom Bohr-modellje - számolás

körpályán mozgó e⁻ mozgási egyenlete:

$$① m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

nincs Θ előjel, mert vonzó potenciál

impulzusra vonatkozik. Kvantum-feltétel:

$$② L = m_0 v r = n \cdot \frac{\hbar}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, \dots \text{ poz. egész}$$

Coulomb-féle erőtörvény:
 $\pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$



2 egyenlet, 2 ismeretlen: v, r

$$\text{①} \rightarrow r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_0 v^2}$$

$$\text{②} \rightarrow v = \frac{n\hbar}{m_0 r} = \frac{\hbar \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{e^2}{m_0 v^2}}{\hbar \cdot e^2} \Rightarrow v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{n\hbar} \sim \frac{1}{n}$$

r-t beírva

Új fizikai adandó: finomszerkizeti adandó:

↳ jó, ha dimenziótlan

$$[\kappa] = \frac{A^2 S^2 V m \cdot s}{A \cdot S \cdot V \cdot A \cdot S \cdot m} = 1 \quad [e] = A_S, \quad [\epsilon_0] = \frac{A_S}{V_m}, \quad [\hbar] = J \cdot s = V \cdot A \cdot s, \quad [c] = \frac{m}{s}$$

Ezzel: $v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{c}{n} = \kappa \cdot \frac{c}{n}$ ⇒ fénysebesség tört része

Ezt az ① egyenletbe visszatérülve hogy r-t megkapjuk:

$$r_n = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}}_{\propto} \frac{1}{m_0} \frac{\hbar c}{\kappa^2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\hbar}{m_0 c} \cdot n^2 \xrightarrow{\text{bővítetlen}} \text{Bohr-sugar: } a_B = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\hbar}{m_0 c} \quad [a_B] = m$$

$\frac{\hbar c}{\hbar c} - \text{vel}$

$$a_B \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} \approx 0,5 \text{ Å}$$

$\uparrow \text{u.o.}$
 $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$

Energia Bohr-modellben:

$$E_n = \frac{1}{2} m_0 v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{c^2}{n^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{\hbar c \cdot \kappa \cdot m_0 c}{n^2} = \frac{1}{2} c^2 \left[\frac{m_0 c^2}{n^2} - 2 \frac{m_0 c^2}{n^2} \right] =$$

\uparrow
n. kuantum-
számú pályán
mozgó e- re

$\underbrace{\text{potenciális}}_{\text{m proton} \gg m_0}$
energia

\downarrow
 $\frac{\hbar c}{\hbar c}$
bővítés

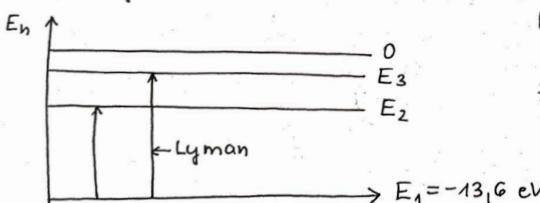
$$= -\frac{1}{2} \kappa^2 \frac{m_0 c^2}{n^2} < 0 \quad (\text{nem kell redukált tömeg})$$

↳ kötött duapot, stabil e- a proton körül (nem bomlik el a Hidrogén)

$$E_n \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{és} \quad E_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} m_0 c^2 \kappa^2 \quad \leftarrow \text{látszik, h. energiadimenziójú}$$

$m_0 c^2 \approx 500 000 \text{ eV}$ (e- -ra) $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ H-atom alapduapot energiadaja

⇒ Rydberg-féle összefüggés értelmezése

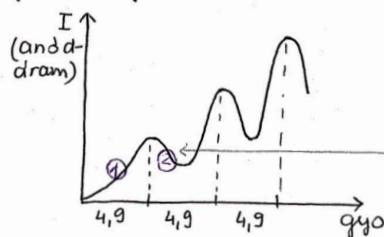
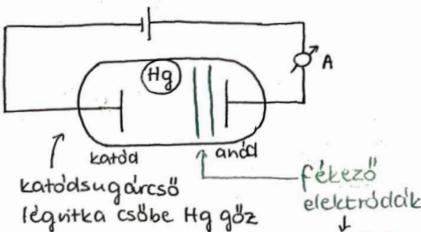


kibocsátás, elnyele's: $n=1$ -ről $n=2,3$ -ra ugrás az e-

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \xrightarrow{\text{U.O.}} E_n = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \kappa^2 m_0 c^2$$

FRANK-HERTZ KÍSÉRLET

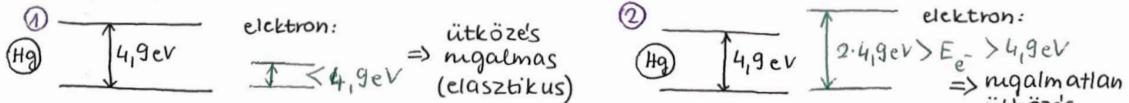
Eddig: anyag-fény k.h., atomi pályák, fény kibocsátása, elnyelése



gyorsító fesz-t (poten-
ciált) változtatjuk

nugalmatlan ütk. során
a fekete elektroddal miatt
az anódra kerülésből jut el

Optikailag megfigyelhető: 4,9 eV mögül a Hg legalsó optikai átmenetének → UV tartomány



Lényegi eredmény: nem csak fényel gerjeszthetők az átmenetek!

hanem mechanikai kölcsönhatásban is, a kvantált energiaszintek valóban ott vannak, nem valahogy a fény-anyag kölcsönhatás furcsasága

DE BROGLIE ANYAGHULLÁM - HIPOTÉZIS

fotonra tudjuk: $\lambda = \frac{h}{P} \rightarrow P = \frac{h}{\lambda}$

$\left[\frac{h}{P} \right] = \underbrace{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}}_{[\hbar]} \cdot \underbrace{s}_{1/\text{[P]}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = m$

↳ összeköti a hullám - és részecskejelenségeket.

↳ IGAZ MINDEN RÉSZECSCSKE'RÉ! (de Broglie e- ra mondta ki)

= RÉSZECSCSKE - HULLÁM DUALITÁS

PL elektron gyorsítunk U feszültséggel: $eU = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2me \cdot U}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2me \cdot U}} \rightarrow e^- nyála'b hullámhosszát U-val változtathatjuk$$

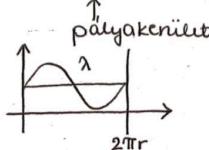
⇒ elektronmikroszkóp

de Broglie alapján a Bohr-féle kvantálás általában:

Bohr: $L = n \cdot \hbar$ de Broglie

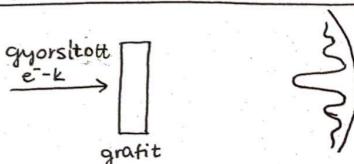
$$L = p \cdot r = \frac{h}{\lambda} \cdot r$$

$$n \cdot \lambda = 2\pi r$$



Az e- dobj viselkedik, mintha állóhullámot adna a H-atomban, ennek a hullámhossza meghatározott azaz a kerülettel összefügg

DAVISSON - GERMER KÍSÉRLET (Thomson - Davisson - Germer kísérlet)



Koncentrikus körököt látunk, csúcsok távolsága függ a gyorsító feszültségtől $\lambda \sim \frac{1}{U}$

de Broglie anyaghullám hipotézis kísérleti bizonyítéka, e- hullámteremtést mutatja

1920: Program, amit megfogalmaztak:

"Tekintsük az e- t hullámnak, látunk fel olyan hullámegyenlétet, ami visszaadja a kiseleti adatakat. A hullámfüggvény jelentősét ne firtassuk."

(Ennek mentén jutunk a Schrödinger-egyenlétéhez)

Feynmann: Schrödinger-egyenletekről

"Honnán jött ez ki? Seholnan nem vezethető le, csak Schrödinger fejéből."

Hilbert: Egy diff. egy.-nek kvantált megoldásai icsznek addott peremfeltételek mellett.

SCHRÖDINGER - EGYENLET

Elektron anyaghullám: $\Psi(x, t) = A \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ 1D síkhullám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ hullámszám} \rightarrow 1D\text{-ben előjele adja az irányt} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$3D: \Psi(r, t) = A \cdot e^{i(kr - \omega t)}$$

$$p = \hbar \cdot k \text{ és } E (= \hbar \cdot \nu) = \hbar \omega$$

↑ de Broglie ↑ fotonokra

$$\text{A klasszikus kifejezés: } E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$E = \hbar \omega$ fotonokra tudjuk, Legyen igaz e-re is!

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \cdot \Psi \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \cdot \Psi \quad \text{időfüggő Schrödinger-egyenlet}$$

$$E-kérdésök: E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \cdot \Psi$$

← Ψ van benne, így a két egyenletet egyenlővé tehetjük

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \leftarrow \text{időfüggő Schrödinger-egyenlet általában igazi, motivált levezetés}$$

$$3D: i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi \quad \Delta: \text{Laplace}$$

Vegyük össze a szokásos hullámegyenlettel, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Psi$

Különbségek: megijelenik a tömeg, \hbar , és 1. időderivált van

$k \cdot r$: addott időben a területen mely pontokra lesz a fazis ugyanakkora

Stacionárius eset:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(E) \Psi = E \Psi$$

↑ ↓
pot. energia kinetikus energia

Stacionárius Schrödinger - egyenlet

↳ csak az energiára írjuk fel, az első rendű időfüggő tagok nullaik.

Kezdetben Ψ jelentése nem világos

1927: Born: $|\Psi|^2$: a részecske megtalálási valószínűsége. Ez mérhető.

Ψ : valószínűségi amplitudó, nem mérhető közvetlenül, lehet komplex is.

Hilbert \rightarrow diff. egy. + feltétel

$$\int_{\text{teljes térfelület}} |\Psi|^2 d\tau^3 = 1 \quad \text{normálíusi feltétel}$$

valahol van a részecske

HEISENBERG-FÉLE HATA'RÓZATLANSÁGI ELV "motívált levezetés"

az hullámtermeszt következménye

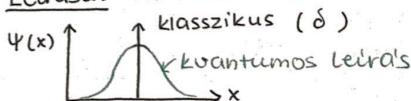
Síkhullám: $A \cdot e^{i(kx - \omega t)}$

↳ impulzusa: $p = \hbar \cdot k$ (jól ismert)

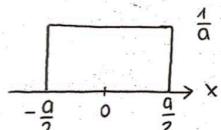
↳ a térfelületen végigjárva kiterjedt, helye nem ismert

DE! Mégis \exists legalább kis térfelületen lokalizált e^- .

Leírása: ÚJ HULLÁMCSOMAG-GAL



Példa:

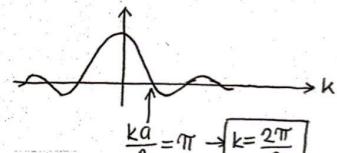


$$\text{rect}_a(x) = \Psi(x)$$

Milyen síkhullámokból keverhető ki?

Fourier-trafóval tudom előállítani.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_a(x) \cdot e^{ikx} dx = \frac{\sin \frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}} \left(= \text{sinc}\left(\frac{ka}{2}\right)\right) \quad \frac{\sin \frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}}$$



A részecske helybizonysága: $\Delta x \approx a$

Impulzus bizonysága: $\Delta k \approx \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$$

Pontos alak: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ Heisenberg-féle határozatlan-sági reláció

első zérushellyel
közelíttem a kiterjedést
(gyorsan lecseng)

(Ha hullám: p lenne ismert)
(Ha részecske: x lenne ismert)

Bohr-Einstein vita (1920-30)

Einstein: kvantum nem teljes, rejtekt valtozók

1964: Bell \rightarrow Bohrnak van igaza, nincsnek rejtekt valtozók

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hookrightarrow \int \text{rect}(t) e^{i\omega t} dt \rightarrow \tilde{F}(\omega) \quad \Delta t \cdot \Delta \omega \approx 1$$

↳ hullám: ∞ ideig $\exists \rightarrow E$ pontosan ismert

A PERIODUSOS RENDSZER

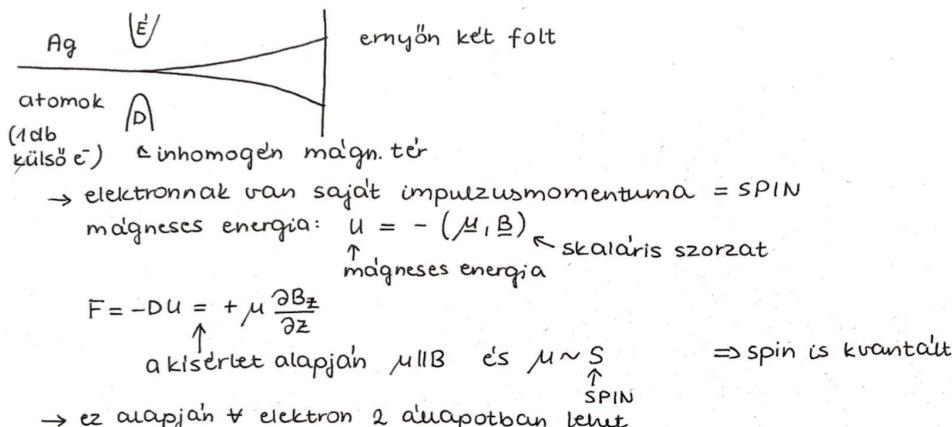
Sch.-egy. H-ra: $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(r) \Psi = E \Psi$ $U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

\hookrightarrow Hamilton-operátor sajátértékek egyenlete $H\Psi = E\Psi$

megoldása: $\Psi = \underbrace{\Psi_{r,\vartheta,\varphi}}_{\text{gömbi koor.}} = \underbrace{R_n(r)}_{\text{fölkvantumszám}} \cdot \underbrace{\Psi_\ell^m(\vartheta,\varphi)}_{\text{magneses kvantumszám}}$ gömbfüggvények

$n = 1, 2, \dots$ fölkvantumszám
 $m = -l \dots l$ magneses kvantumszám
 $l = 0, 1, \dots, n-1$ mellékquantumszám

STERN-GERLACH KÍSÉRLET



- Periodusos rendszer
- Ha $n=1 \Rightarrow l=0, m=0$ és $S=\pm \frac{1}{2} \rightarrow 2$ db e^- töltetheti be az $n=1$ hajat
 - Ha $n=2 \Rightarrow l=0$ esetben 2 db e^- és $l=1 \rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=0 \\ m=1 \end{cases} \} 6$ db
 - $n=3 \Rightarrow l=0$ (S); $l=1$ (P); $l=2$ (D)
- A periodusos rendszer leírható a H Schrödinger-egyenletevel + néhány irregularitás
- Pauli-elv: Egy atomban egy adott kvantumszámmal jellemezhető állapotban minden csak egy e^- található.

