

# KÍSÉRLETI FIZIKA 2.

ELEKTROMAGNESSÉG

# Elektromágnesség

~ Villanytan, Villamosságtan

Elektron = borostyánkö (görög)

Magnesia: hegység Kis - Ázsiában, vasérc, magneses érc előhely  
villammos folyékony: Fedlik finom villammosmotor

Félév során előkerülő témák:

- Elektrosztatika: nyugvó töltések
- Elektromos áram (egyenáram)
- Magnetosztatika: időben állandó magneses terek
- Elektrodinamika
- E.M. hullámok
- Speciális relativitáselmélet

## ELEKTROSZTATIKA

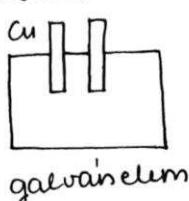
### Kísérleti tapasztalatok

1. A dörzsölés elektromos árapapot eredményez
2. Kétfele kölcsönhatás létezik: vonzás (+ -), tasztás (+ +, --)
  - + üveg bőrrel dörzsölve  $\leftarrow$  vitrus
  - ebonit szőrrrel dörzsölve  $\leftarrow$  resinusFranklin elnevezése: + pozitív és - negatív töltés
3. Dörzsölés nélküli a pozitív és negatív töltések száma megegyezik, dörzsölés: meg változtatja az egyensúlyt
4. Töltést nem tudunk osztani, csak szétválasztani  
 $\Rightarrow$  Töltésmegmaradás tövénye  $\rightarrow$  egyik legalapvetőbb megmaradási tör.
5. Töltés átvezethető
6. Töltöt testtel másik testen töltésmegosztás hozható létre  
érintkezés nélküli!
7. Több töltés erőhatása a szuperpozíció elvénél számolható (vektorosan)



Mi a dörzs elektromosság oka?

- a töltésszétválasz oka az érintkező anyagok különböző elektronvonzó képessége
- töltés érintkezésnél van dorol át
- dörzsölés szerepe: lehető legnagyobb érintkezási felület létrehozása
- "érintkezási elektromosság" a galvánumok működésének alapja (példa)



$\rightarrow$  Volta - feszültségsor

Az előbbieket demonstratív kísérletek:

- ① ebonit + macskaprém } dörzsölés => apró tárgyakat vonz, majd tarzít  
üvegbot + szavarásbőr }

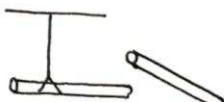
- ② Elektroszkóp: elektromos átlapot kimutatására szolgáló eszköz



→ nem mutat előjelét, csak töltésnagyságot

→ ha kisütjük, egyenesen áll be

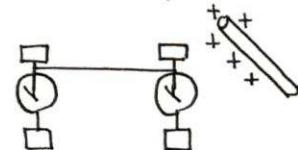
- ③ Azonos ill. ellentétes töltések közti erőhatás



ebonit + ebonit: tarzítás (azonos előjel)

ebonit + üveg: vonzás (ellenétes előjel)

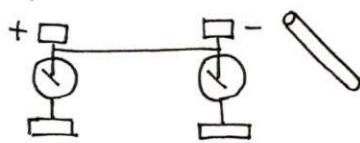
- ④ Elektromos megosztás



vezetővel összekötött

elektromos átlapot létre hozása töltés rávitele nélkül: elektromos megosztás

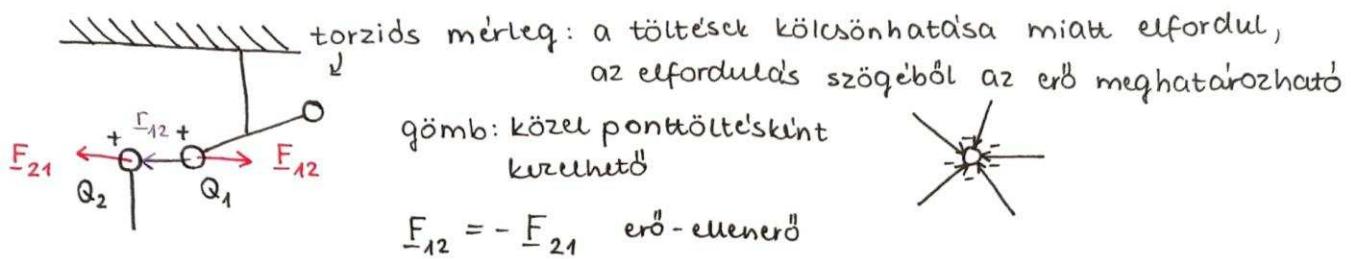
- ⑤ Megosztott töltések eggyesítése



niddal elektromos megosztást hozunk lebő a  
vezetővel összekötött 2 elektroszkópban, az egyik felé  
pozitív, másik negatív.  
A nidalet tesszük, a vezetőt eltávolítva a töltés  
megmarad rajtuk, visszatérve a vezetőt semlegesítődik

## A Coulomb - törvény

Coulomb kísérlet 1785



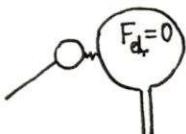
gömb: közel ponttölteléskint kezelhető



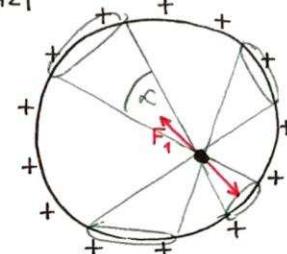
$$F_{12} = -F_{21} \text{ erő - ellenerő}$$

$$F_{21} = -F_{12} = K_e \frac{Q_1 Q_2}{|r_{12}|^2} \frac{r_{12}}{|r_{12}|}$$

Priestley 1767: tömör vezető belsejében a térrösségi 0



szükséges az  $\frac{1}{r^2}$ -es függés



HF: Bizonyítani: Ha  $F_{el} \sim \frac{1}{r^2}$   $\Rightarrow$  fém belsejében az el. tér zérus  $E = 0$

Mekkora a  $K_e$  arányossági tényező?

I. lehetőség: def.(tetsz.) töltés mértékegyiséget  $\rightarrow K_e$  mérhető

$$[Q] = 1C \leftarrow Q_{el} := 1,602 \cdot 10^{19} C \text{ elemi töltés definíciója 2019 óta}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad 2019 \text{ előtt: } 1C := 1 As \\ K_e = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

(II. lehetőség: Gauss CGS: rögzitsük  $K_e$ -t  $\rightarrow Q$  mértékegyisége meghatározható )

$$K_e := 1 \rightarrow [Q] = cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1} = 1 Fr$$

$$K_e = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \epsilon_0 = 8,855 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\Rightarrow F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|r_{12}|^2} \cdot \frac{r_{12}}{|r_{12}|} \quad \boxed{\text{Elektrosztatika alaptörvény / Coulomb - törvény}}$$

Megj.: a Coulomb-törvény nyugvó, pontszemű töltésekre igaz vákuumban.

Megj.: Gravitációhoz hasonlít, de a különbségek:

a Coulomb - erő: - vonz és tarzít is  
- sokkal erősebb:

$$1kg \quad F_g \quad F_g \times 10^{33}$$

Ha az összes elektronot levennének rólunk, az elektromos erő 33 nagyságrenddel nagyobb lenne

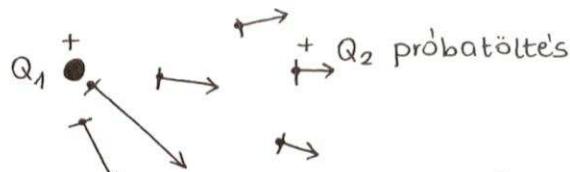
elektronok esetében

42 nagyságrenddel nagyobb:  $F_g \times 10^{42} \sim F_{el}$

## Elektromos erőter, elektromos télerősség

Egy  $Q$  töltés a térben létrehoz egy erőteret, azaz a maga könülötti térben lévő próbátöltsre elektrosztatikus erő hat. Az erőter próbátöltsel "letapogatható"

$$F = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|r_{12}|^2}}_{E: \text{elektromos télerősség}} \cdot \underbrace{\frac{r_{12}}{|r_{12}|}}_{\text{probátölts}} \cdot Q_2$$

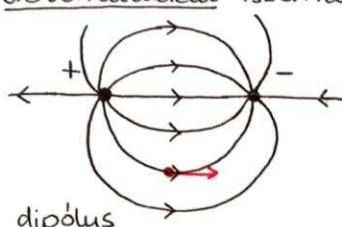
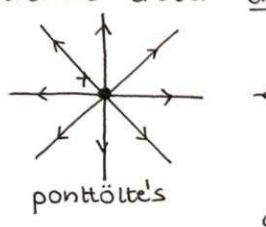


A továbbiakban a  $Q_2$  probátöltést  $q$ -val jelöljük (és  $Q_1$ -et  $Q$ -val)

Megj.: Ha  $q \ll Q$ , akkor a télerősséget nem befolyásolja a probátölts.

Ha  $q$  hasonlán nagy, mint a  $Q$  töltés, illetve kitejtett test, akkor másodlagos effektusként megjelenik a töltésmegosztás. Ekkor függ a probátöltestől a télerősség

Az elektromos erőter erővonalakkal szemléltethető:



erővonal sűrűsége  $\sim |E|$

erővonal érintője  $\parallel F$

HF: 3D erővonalak:



4x annyit lehet-e rajzolni?  
Mely n-ekre lehet rendesen elosztani?

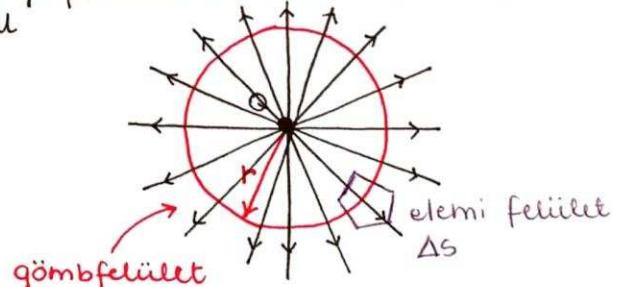
Az erővonalakat úgy vesszük fel, hogy az egységnyi felületet átmetsző erővonalak száma arányos legyen a télerősség nagyságával

$$\frac{N_{er}}{\Delta S} \sim \frac{Q}{r^2} \quad \begin{matrix} N_{er}: \text{erővonalak száma} \\ \Delta S: \text{egys. felület} \end{matrix}$$

Gömbfelültre az erővonalak száma:

$$N_{er} \sim \sum_{i=1}^K \frac{Q}{r^2} \Delta S_i \quad \begin{matrix} K \text{ db elemi felület} \\ \text{esetén} \end{matrix}$$

$$N_{er} \sim \sum_{i=1}^K \Delta S_i \frac{1}{r^2} Q = \frac{4\pi r^2}{r^2} Q = 4\pi r^2 Q \quad \begin{matrix} \text{Azaz a teljes felület erővonal száma nem} \\ \text{függ a távolságtól} \end{matrix}$$

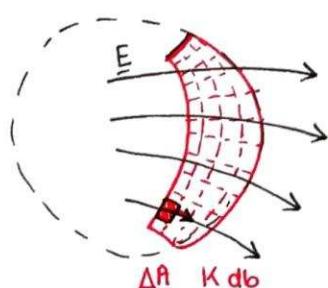
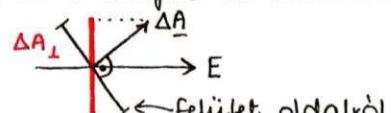


Az erővonalak minden pozitív töltésen indukálnak, és negatív töltésen végződnek.

A felületet metsző erővonalak számának előjeles összegét az elektromos fluxus adja.

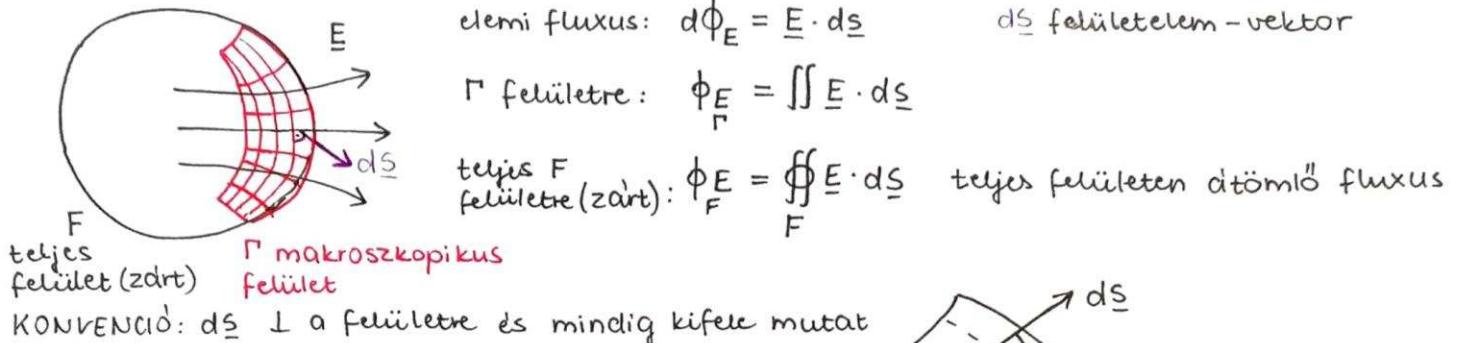
Def.:  $\Delta\Phi_E := |E| \cdot \Delta A_\perp = |E| \cdot \Delta A \cdot \cos\theta = E \cdot \Delta A$

$$\Delta\Phi_E \sim N_{er}$$



$$\Phi_E^A = \sum_{i=1}^K E \cdot \Delta A$$

$$\Phi_E^A := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^K E(x_i) \Delta A_i = \iint E \cdot dS \quad \begin{matrix} \text{2D felületi integrál} \\ \uparrow K \rightarrow \infty \\ \text{finomítva} \end{matrix}$$

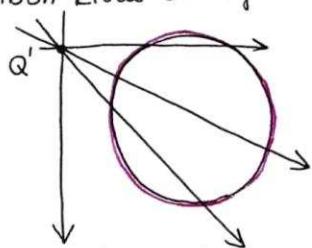


Gömbszimmetrikus eset: Mekkora a fluxus a gömbfelületre?

$$\Phi_E = \iint_{\text{gömb}} \underline{E} \cdot \underline{ds} = |E| \underbrace{\iint_{\text{gömb}} ds}_{E \parallel ds} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{4r^2\pi} 4r^2\pi = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

Azaz a fluxus nem függ a gömb méretétől, csak a töltéstől

Gömbön kívül elhelyezkedő töltés fluxusa:

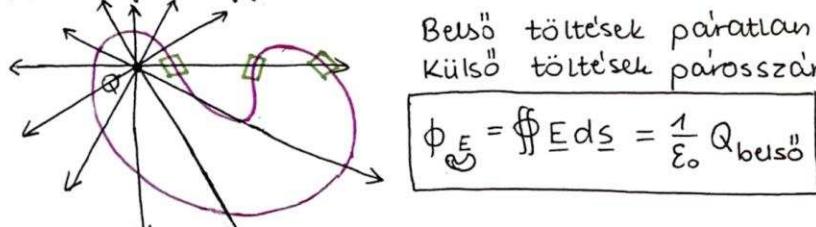


$Q'$  fluxusa a gömbfelületre 0, ha  $Q'$  a gömbön kívül van, hiszen a gömbbe bemenő erővonalak ki is mennek, azaz kétszer metszik a felületet

Több töltés esetén: szuperpozíció elve érvényesül  $\Rightarrow$  töltés összeadódik

$$\text{Gömb} \quad \Phi_E = \iint_{\text{gömb}} \sum_i \underline{E}_i \cdot \underline{ds} = \sum_i \underbrace{\iint \underline{E}_i \cdot \underline{ds}}_{\Phi_i} = \sum_i \frac{1}{\epsilon_0} Q_i$$

Tetszőleges nagy zárt felületre:



Belső töltések páratlan számúszor metszik a felületet, Külső töltések párosszámúszor.

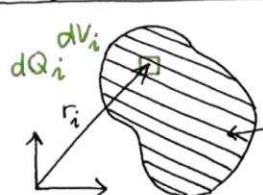
$$\Phi_E = \iint \underline{E} \cdot \underline{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{belső}}$$

Általánosan:  $\Phi_E = \iint \underline{E} \cdot \underline{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$  Gauss-törvény = elektrosztatika II alap-törvénye

- Zárt térből kijövő fluxus arányos a töltésmennyiséggel
- Az elektrosztatikus térfelből fogása a töltés

Megj.: fluxus  $\equiv$  forrásérősségi

Folytonos töltés eloszlás esetén



$$S(r_i) = \frac{dQ_i}{dV_i}$$

$$Q_{\text{teljes}} = \sum_i \frac{dQ_i}{dV_i} \cdot dV_i = \sum_i S(r_i) \cdot dV_i \xrightarrow{dV_i \rightarrow 0} \iiint S(r) dV$$

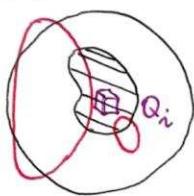
Megj.:  $dV = d^3r = dx dy dz$

terfogati integrál

$$\Rightarrow \oint_{\text{belülről}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{belső}} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_S \rho(r) d^3 r$$

$dV_i$  térfogat fluxusa:  $d\phi_i = \frac{dQ_i}{\epsilon_0} = \frac{\rho(r_i) \cdot dV_i}{\epsilon_0}$

Elektrosztatikus tér formássűrűsége ( $\text{div } \vec{E}$ ):



$$\text{teljes fluxus: } \sum_i \phi_{Ei} = \sum_i \frac{E_i \Delta s_i}{\Delta V_i} \cdot \Delta V_i = \iiint (\text{formássűrűség}) dV$$

$\underbrace{\Delta V_i \rightarrow 0}_{\text{formássűr.}}$

$$\frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(r) dV$$

**\* térfogatra igaz**  $\Rightarrow \iiint \left( \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} - \text{formássűr.} \right) dV = 0 \Rightarrow \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = \text{formássűr.} = \text{div } \vec{E}$

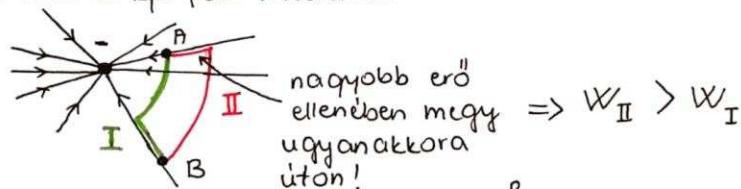
### Az elektrosztatika I. alaptörvénye

Az elektrosztatikus erőter konzervatív.

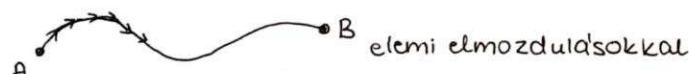
- minden erővonal a középpont felé mutat (vagy ellentétesen)
- $|F| = f(r)$  nincs szögfüggés! Az erő nem függ a szögtől

Nincs nem elég csak a kp. felé mutató?

ellenpélda:



Altalánosan:  $E$  erő munkája  $A \rightarrow B$  úton:  $W_A^B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$  vonalmenti integrál



El. teriben:  $W_{AB} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$  ( $q$  töltés  $A$ -ból  $B$ -be mozgatása alatt ekkora a munkavégzés)

Az elektrosztatikus tér konzervatív = a munkavégzés nem függ az útjáról:

$$\begin{aligned} & A \xrightarrow{\text{I}} B \quad \oint_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ & \text{II utat megfordítva: } \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{c} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \text{egy kört tettünk} \end{array} \right\} \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$\Rightarrow$  Elektrosztatika I alaptörvénye:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

Azaz zárt görbéről az elektrosztatikus erőter munkája nulla.

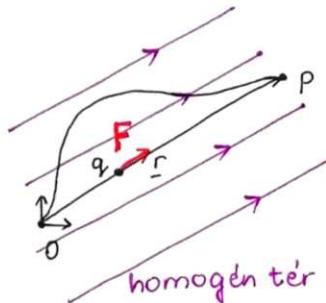
Ez azt is jelenti, hogy az el. tér önvénymentes (nincs záródó erővonalak hurok)

Megj.: Az elektrosztatikus tér forrásos és önvénymentes.

## Potenciális energia, potenciale

Potenciale def.: a potenciale értéke  $P$ -ben 0-hoz képest:

$$U^0(P) := - \int_0^P \underline{E} dr \quad [U] = \frac{N}{C} \cdot m = 1V \text{ (volt)}$$



$$W_{OP} = q \int_0^P \underline{E} dr$$

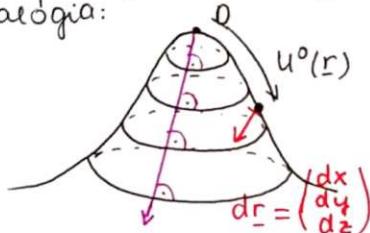
0-ból  $P$ -be tartva  $W_{OP}$  pozitív  
potenciális energia:  $E_{pot}^0 = -W_{OP} = -q \int_0^P \underline{E} dr$

$$E_{pot}^0 = q \cdot \left( - \int_0^P \underline{E} dr \right)$$

$U^0(P)$  potenciál

Megj.:  $U$  potenciale két pont között értendő, viszonyítási pontot tűg meg kell adni.  
Potenciából hogy számolhatjuk vissza  $\underline{E}$ -t?

Gravitációs analógia:



Elengedet golyó:

legnagyobb meredekség irányába indul el, a szintvonalakra merőlegesen

teljes differenciál:

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{y,z} dx + \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{x,z} dy + \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{x,y} dz$$

Ezzel párhuzamba állítható a következő kifejezés:  $U$ -t csak egy kicsi szakasra felírva:

$$dU = -\underline{E} dr = -\left( E_x dx + E_y dy + E_z dz \right)$$

Tetsz  $dx, dy, dz$ -re igaz, ezért:

$$\underline{E} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = - \operatorname{grad}(U) = -\nabla U$$

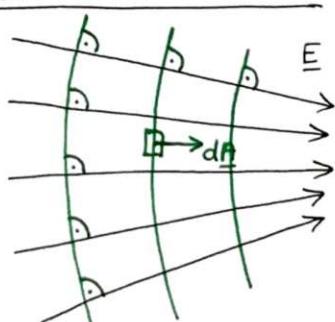
Ekipotenciális felületek:

$$U^0(P) = U^0(P') \quad \forall P \text{ és } P' \text{ pontra}$$

$$\text{potenciál: } dU = -\underline{E} ds = 0$$

azokat a pontokat keresük, amik között nulla a potenciálkülönbség

$$\Rightarrow \text{ez akkor } 0, \text{ ha } \underline{E} \perp ds$$

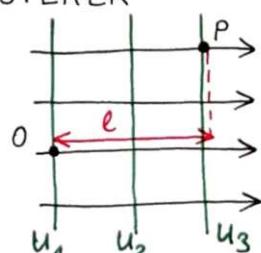


$U = \text{const}$  ekipotenciális felület: merőleges az erővonalakra  
 $dA$  felületvektor  $\parallel \underline{E}$

SPECIA'LIS ERÖTEREK

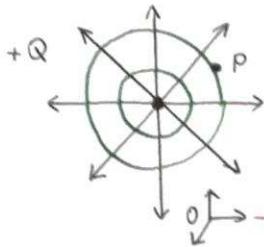
Homogen ter

$$\underline{E} = \text{const.}$$



$$\text{potenciál: } U^0(P) = -E \cdot l$$

### Ponttöltes tere



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{r}{|r|}$$

$$U^\circ(P) = - \int_0^P E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Ha 0 ref. pontot a végtelenbe viszük:  $r_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{r_0} \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow U^\circ(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{r}$

### Töltesek kölcsönhatási energiája

Két töltes kölcsönhatási energia: Azaz mekkora energia szabadul fel, ha  $Q_1$  teréből elvisszük  $Q_2$ -t a végtelenbe?

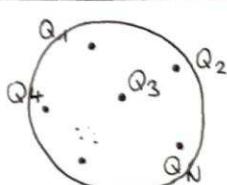
$$\begin{array}{c} Q_1 \quad Q_2 \\ \longleftrightarrow \end{array} \quad \text{Legyen } Q_1 \text{ a forma's, } Q_2 \text{ a próbátöltes}$$

$$U_1^\infty(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r}$$

$$E_{\text{pot}} = Q_2 \cdot U_1^\infty(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

Megj.: fordított szerepekkel is ugyanezt az eredményt kapjuk

### Több (Ndb) töltes kölcsönhatási energiája



A többi tereből  $Q_{N-1}$ -t elvisszük a  $\infty$ -be:

$$E_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{Q_i}{|r_i - r_{N-1}|^2} \frac{r_{N-1}}{|r_i|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Majd  $Q_{N-2}$ -t is elvisszük  $E_{N-2} = \dots$

A tölteseket bármilyen sorrendben elvihetjük, mert ugyanazt kapnánk.

$\Rightarrow$  A töltesrendszer kölcsönhatási energiája:

$$E_{\text{kh}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i U_i, \text{ ahol } U_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j(\neq i)} \frac{Q_j}{|r_i - r_j|} \text{ a többi potenciálya}$$

Megj.: Az  $\frac{1}{2}$  szorzó azért van, mert a szummval a töltespár kölcsönhatási energiája kétszor jelenik meg.

$$E_{\text{kh}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i U_i = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \right) \quad r_{ij} = |r_i - r_j|$$

Azaz elméletben: ha ismert az összes töltes, akkor megmondhatjuk az elektrosztatikus ter irányát, nagyságát t' pontban

Gyakorlatban: nem működik, mert:
 

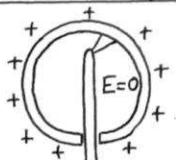
- töltesek nem nyugszanak  $\Rightarrow$  elektrosztatika
- töltesek száma túl nagy (vezetők, szigetelők)

### Elektrosztatika anyagban

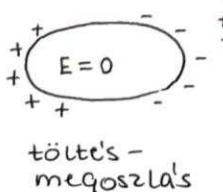
Az anyagok kit fő csoportja: vezetők (fémek), szigetelők (dielektrikumok)

Töltes elhelyezkedése vezetőn: A rövidít töltesek a külső felületen vannak

Beliül  $E = 0 \Leftrightarrow$  A vezető ekvipotenciális (felület)

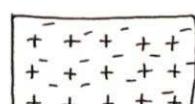


Van de Graaf generátor



töltes-megoszlás

Megj.: belül is vannak töltesek, ott egyenletesen oszlanak el.  
 A plusz töltesek oszlanak meg a töltésmegoszláskor



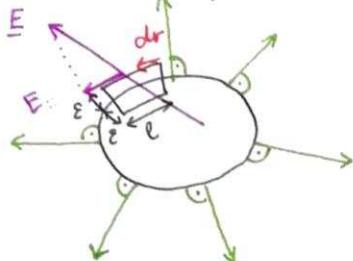
fémkerék.

Megj.: töltésmegoszláskor az átrendeződés  $fs (10^{-15} s)$  alatt megy végbe  
Hirtelen  $E$  lököt kapnak E:

csak mikroszkopikus átrendeződések vannak

Maximum fénysebességgel haladhatnak, de általában ennél jóval lassabban

Vezető ekvipotenciális felület



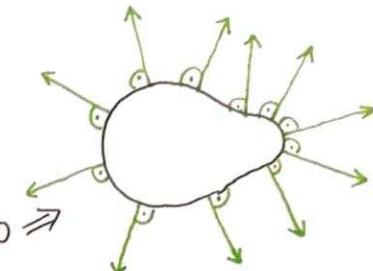
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 = E_T^{\text{kint}} \cdot l - E_T^{\text{bent}} \cdot l = 0$$

$\square \epsilon \rightarrow 0$

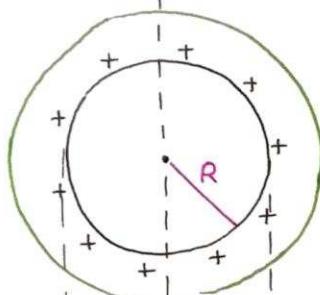
$$E_T^{\text{kint}} = E_T^{\text{bent}}$$

Azaz az elektrosztat. térfeld transzverzális komponense folytonosan megy át bármely határon.

Fémek esetében ez a komponens:  $E_T = 0 \Rightarrow$



### TÖLTÖTT GÖMB VEZETŐ TERE

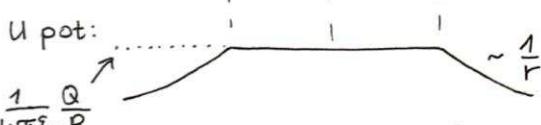


Megj.: nem lehet ugrás a potenciálúnak (végén végzetlen ugrás),

mert akkor végzetlen nagy el. térré lenne ott szükség

$$U^0(P) = - \int_0^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$\uparrow$  integrandusnak  $\infty$ -nek kellene lennie



Térerősség:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & \text{ha } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{ha } r > R \end{cases}$$

Potenciál:  $U^\infty(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad \text{ha } r > R$

$$U^\infty(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{C}$$

### KAPACITÁS

$$C = \frac{Q}{U} ; \quad C = \frac{Q}{U} ; \quad [C] = 1F = \frac{1C}{1V}$$

C: mennyi töltést lehetünk fel, hogy 1V-val változzon a potenciál

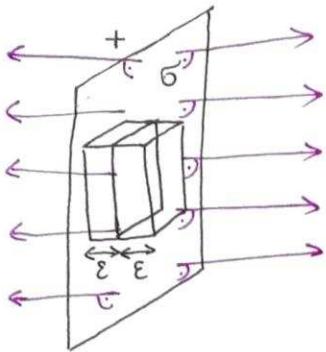
Föld:  $C_{\text{Föld}} = 4\pi\epsilon_0 R = 0,7 \text{ mF}$

két koncentrikus gömb potenciálja?

$$\Delta U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$C = ?$

## SÍKKONDENZÁTOR



Két vezető síklap:  
végzetlen sík!  
 $E = 0$

vezető sík

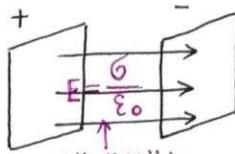
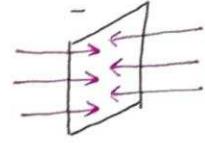
$\sigma$ : felületi töltéssűrűség ( $C/m^2$ )

$$\text{Gauss-tv: } \oint E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0}$$

végzetlen sík: homogén tér  $\Rightarrow E \perp dS$

$$2A \cdot E = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow E^+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E^- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

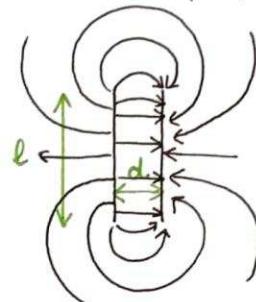


$$E = 0$$

A két sík tererőssége szuperponálódik  $\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  közepen

Gyakorlatban: véges méretű felület  
szort tér jön létre

ha  $l \gg d$ , akkor  
jól közelítéssel az ideális eset teljesül



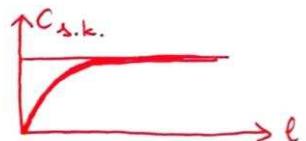
Kondenzátor kapacitása

$$\Delta U = - \int E \cdot dr = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

$$C_{\text{síkkond}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Megj.: ez az összefüggés csak nagy felületű, kis távolságú fogyverzetek esetén igaz.

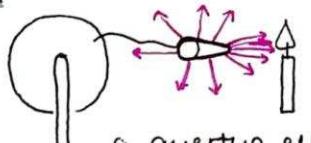
HF: Ha a síkkondenzátor véges, és a szort terek is számítanak, akkor milyen a kapacitás?  
(analitikus módszer)



## CSÚCSHATÁS



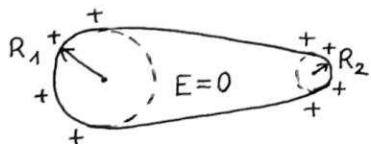
elkerül forogni  
a kerék



a gyertya elfújódik

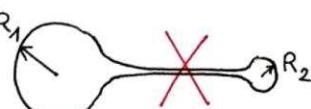
OK: A csúcsos részeken sokkal erősebb a tér, ez jobban polarizálja a kisebb részecskéket (negatív, pozitív részek eltderülnek egymástól), majd ezeket magához vonzza érintkezéskor a pozitív csúcs elvonza az elektronokat.  
Majd a pozitív töltésűre való részecskéket elriasztja magától.  
 $\Rightarrow$  elektromos szél

A csúcs hatás leírása:



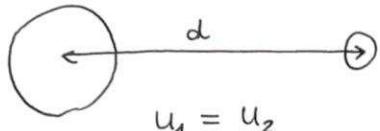
még jobban széthúzva őket  
még vékony vezető összeköti őket

EKVIPOTENCIÁLISAK



Majd elszakítjuk a vékony fonalat, a szakadás pillanatában is elvípotenciálisak lesznek.

Megj.: Az elektromos megosztást elhangoljuk



$$U_1 = U_2$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\text{felületi töltessűrűség} \rightarrow \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\frac{\sigma_1 R_1}{R_1} = \frac{\sigma_2 R_2}{R_2}$$

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

$$R_1 E_1 = R_2 E_2 = \text{const}$$

$$E_1 \sim \frac{1}{R_1}$$

Megj.:  $d$  véges!

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{d} \right)$$

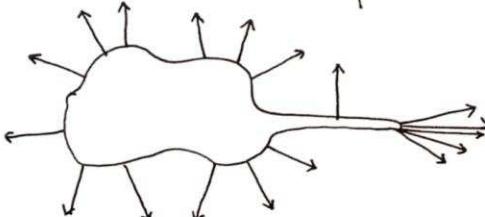
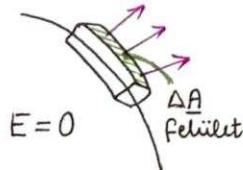
$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{d} \right)$$

ha  $d \gg R_1, R_2 \Rightarrow$  elhangolható

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss})$$

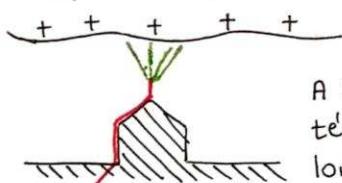
$$E \cdot \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\Delta A}{|\Delta A|}$$



Azaz ha  $R$  gömbületi sugar kicsi, akkor  $E$  nagy.

Példa: villámhántó

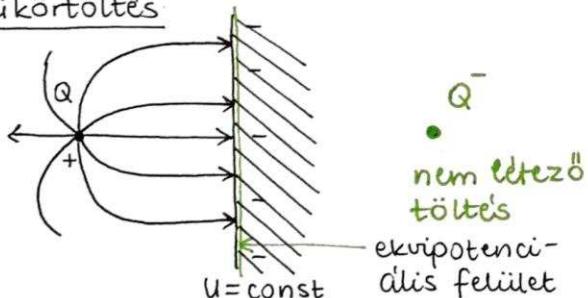


Benjamin Franklin

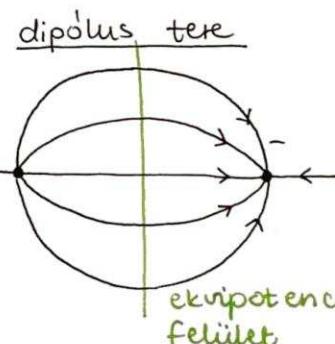
A kisülés ott indul el, ahol a legnagyobb a térerősség.

Ionizálódik a levegő  $\rightarrow$  felfele gyorsulnak, tovább ionizálnak  $\Rightarrow$  ioncsatoma

Tükörtöltés

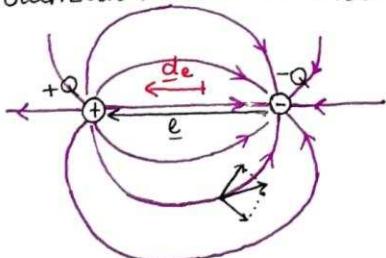


analog



### ELEKTROMOS DIPÓLUS

Két töltés: össztöltése nulla, de van eredő dipolmomentuma  
Polarizált molekulát modeller  $\rightarrow$  szigetelék leírása



$\underline{l}$  vektor:  $\Theta$ -tól a  $\oplus$  felé mutat

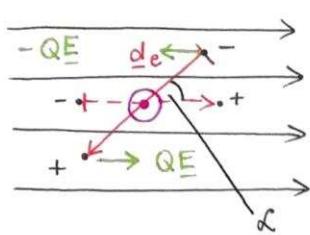
elektromos dipolmomentum:  $\underline{d}_e := Q \underline{l}$

El. tere a szuperpozícióval számítható: feltétel:  $r \gg l$  ("távolter")

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(d_e \epsilon) r}{r^5} - \frac{d_e}{r^3} \right)$$

HF Mennyire egzakt az el. dip. tere kapott fenti képlet közelre?

## Elektromos dipolus homogen térben



H: sikból kifelé mutat

Homogen erőtér:  $d_e$  - t beforgatja a tér irányába addig forog, amíg a kit erő hatásvonala meg nem egyezik

Dipolusra ható forgatónyomatek:

$$|M| = 2F \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \alpha = E \cdot Q \cdot L \cdot \sin \alpha \Rightarrow M = d_e \cdot E$$

+2 erőnek van járuléka

$d\alpha$  szöggel való elfordulás alatt milyen munkavégzés történik?

erőtér munkája:  $dW = -M \cdot d\alpha = -d_e \cdot E \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$

potenciális energia:  $dE_{pot} = -dW = d_e \cdot E \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$

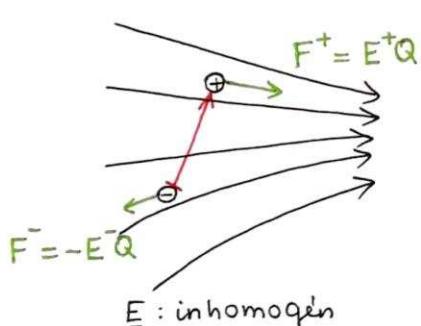
Teljes helyzeti energia (potenciális e.)  $E_{pot} = \int_0^f d_e \cdot E \sin \alpha' d\alpha' = -d_e \cdot E \cos \alpha + d_e \cdot E \cos \alpha_0 =$

$\alpha_0$  rögzíthető:  $\alpha_0 := \frac{\pi}{2}$

$$E_{pot} = -d_e \cdot E$$

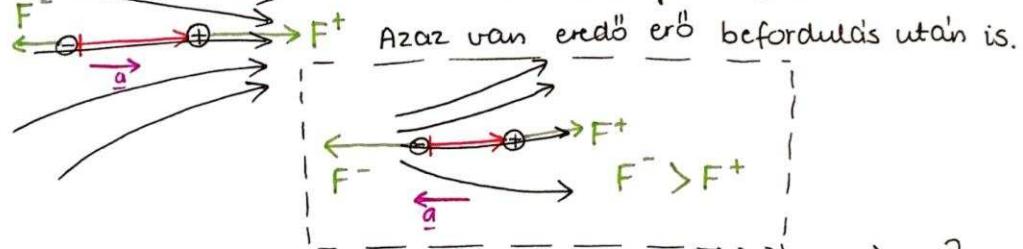
Megj.: negatív potenciális energia jelentése: energiát kell befektetni, h. a nulla szintre hozzá  $\rightarrow$  potenciál minimuma: stabil állapot

## Elektromos dipolus inhomogen térben



itt is hat rögzítésre → beáll terérvisszág ir.-ba

$F^+ > F^- \Rightarrow$  a dipolus elindul a nagyobb terérvisszág irányába



Dipolusra ható erő:  $F = F^+ + F^- = Q \left\{ E(x+\Delta x) - E(x) \right\} = Q \left\{ E(x) + \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_x \Delta x - E(x) \right\}$

$$F = \underbrace{Q \Delta x}_{|d_e|} \underbrace{\frac{\partial E}{\partial x}}_x \Big|_x = d_e \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_x$$

$$\text{sorfejtés: } E(x+\Delta x) \approx E(x) + \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x$$

3D:  $\underline{F} = \text{grad} (\underline{d}_e \cdot \underline{E})$  CSAK KONZERVATÍV TEREKRE

HF: nem konzervatív erőtérre  $\underline{F} = ?$

# ANYAGOK ELEKTROMOS TULAJDONSÁGAI, SZIGETELŐK

## apoláros anyagok, molekulák

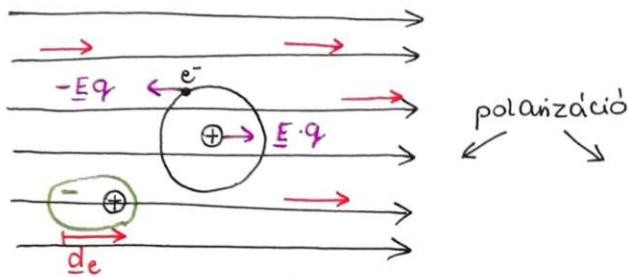
$E = 0$



$$d_e = 0$$

nincs dipólmomentumuk

$E \neq 0$



molekulák polarizálódnak  
⇒ indukált elektromos dipólus

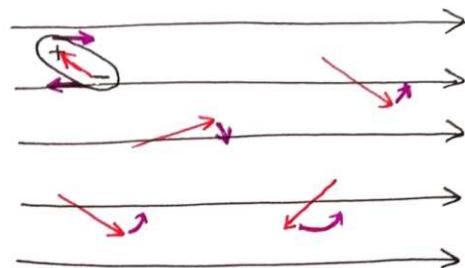
Megj.: visszaállító erő:  
elektrosztat. erő (távolság e-k között)  
hömömozgás

## polaros anyagok, molekulák

$E = 0$



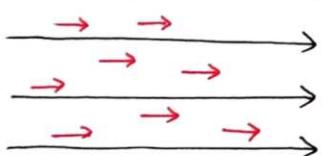
van elektromos dipólmomentumuk  
 $E = 0$  esetén  $d_e$ -k véletlenszerűen állnak,  
össz. dipólmom:  $\sum d_e \approx 0$



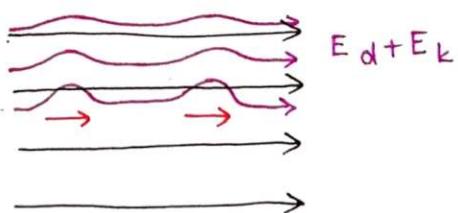
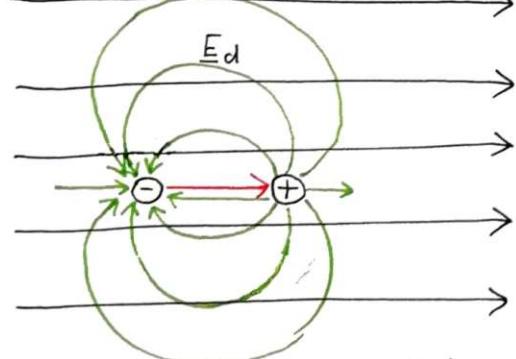
kisit elfordulnak, de nem állnak be  
teljesen a térfelügyébe  
Rendezettség ellenére a hömömozgás,  
dipól-dipól kölcsönhatás

Megj.: Minél erősebb a térfelügye, annál rendezetlenebbek a dipólusok

MODELL: létezik átlagos dipólmomentum:  $d_e \parallel E$   
növekvő  $E \rightarrow$  nő  $d_e$  ( $|d_e| \sim E$ ;  $d_e$  az arányosság nem állítható, de nem  
növelhető a végteleniségi)



$E_k$  A dipólus tere csökkenti a külső teret.



Módosulnak-e az adaptöröknek a meghatározott térfelügye ( $E_k + E_d$ ) miatt?

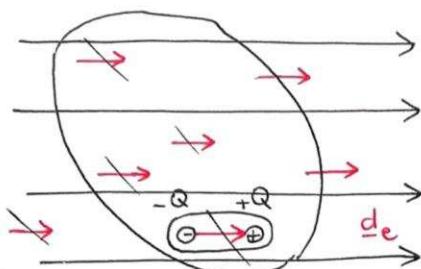
I  $\oint E d\tau = 0$  mindenkit ter konzervatív:  $E_k$  és  $E_d$  is  
 $E_d$ -t is töltések hozzájárulnak létre, így ugyanolyan jellegű.

II  $\oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q_{szabad}}{\epsilon_0} + \frac{Q_{kötött}}{\epsilon_0}$  (=  $\frac{Q_{sz}}{\epsilon_0} + \frac{Q_p}{\epsilon_0}$ ) polarizációs töltések  
 $E_k$ -t létrehozó molekulákban kötött töltések,  
töltések, csak megosztani tudjuk őket

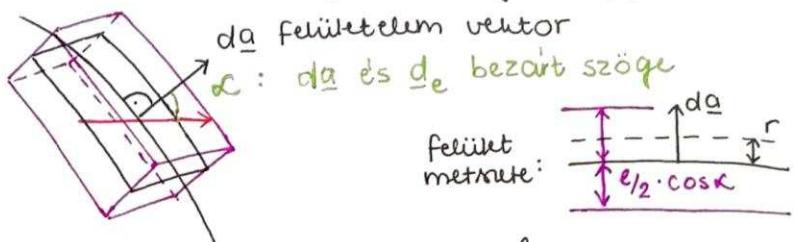
Megj.: ha a zárt felületbe az egész szigetelő belépik, akkor  $Q_p = 0$ , hiszen a  
szigetelő anyag kívülről semleges. Ha a zárt felület elmeteti az anyagot,  
és így a dipólusokat, akkor  $Q_p \neq 0$ .

Számoljuk ki a kötött / polarizációs / töltéseket!

zárt görbe:  $\Gamma$  (felület)



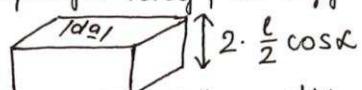
$\Gamma$ -n kívül esők nem számítanak  
belül töltések (+Q, -Q) kioltják egymást



felület metrikája:  $dV = l \cdot r \cdot da$

$l$ : dipólus hossza  $\rightarrow$  a dipólus amikor metszi a felületet, ha  $|r| < \frac{l}{2} \cos \alpha$ , ahol  $r$  a felület felettí részeg szélessége.

$\Rightarrow$  felületező  $da$  felett e's alatt  $\frac{l}{2} \cos \alpha$  vastagságú részeg, ez egy térfogatot határoz meg:  $dV = |da| \cdot l \cdot \cos \alpha$



$dV$  térfogaton belüli (elmtsuti) dipólusok száma:  $dN = n dV$

$n$ : atomok térfogati sűrűsége  $[n] = \frac{db}{m^3}$

$$dN = n \cdot dV = n \cdot l \cdot da \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Polarizációs töltések: } dQ_p = -Q \cdot dN = -n \cdot Q \cdot l \cdot da \cdot \cos \alpha = -n \cdot d_e \cdot da$$

Most a felületen belül lévő töltés negatív, mert  $da$  kifelé mutat.

Ha  $\alpha$  hegyesszög:  $\ominus$  van bent, ha  $\alpha$  tompaszög:  $\oplus$  van bent.

$$\text{Összes pol. töltés: } Q_p = \oint_{\Gamma} -n \cdot d_e \cdot da = - \oint_{\Gamma} P \cdot da$$

ahol  $P = n \cdot d_e$  elektromos dipólmomentum-sűrűség (polarizációs vektor)

Igy a Gauss-törvény:

$$\oint_{\Gamma} E \cdot da = \frac{Q_{sz}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\Gamma} P \cdot da$$

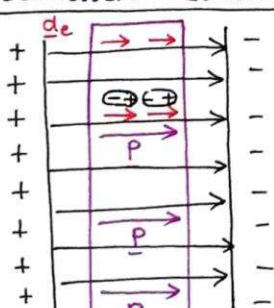
$$\oint_{\Gamma} (\epsilon_0 E + P) \cdot da = Q_{sz} \quad \text{Gauss-törvény}$$

→ makroszkopikus anyagokra is használható

$$D = \epsilon_0 E + P \quad \text{dielektrikus eltolásvektor} \quad [D] = \frac{C^2}{Nm^2} \frac{N}{C} = \frac{C}{m^2} = \frac{As}{m^2}$$

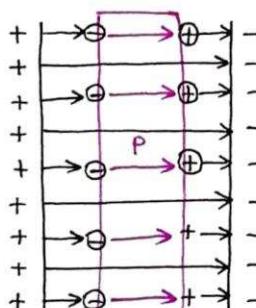
$$\oint_{\Gamma} D \cdot da = Q_{sz}$$

Szemléltetés: kondenzátor



$P$  polarizációs vektor

$D$  viszont nem változik, hanem  $D = \epsilon_0 E + P$



Olyan, mintha a polarizációs töltés a szigetelő szélén lenne felhalmozva (valójában belül is van)

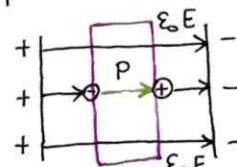
Az elektromos tér a polarizációs töltésekben véget ér

az elektromos tér lecsökken!

a feszültség is lecsökken

$$\Delta U = \int_{+}^{+} E \cdot dr$$

c kapacitás meghatározása



## I. Homogén, izotróp, lineáris dielektrikum

dielektrikum = szigetelő; lineáris:  $|D| \sim |E|$ ; izotróp: irányfüggetlen  $D \parallel E$   
homogén: helyfüggeltek a fiz. tulajdonságok

$P \sim E$  lineáris esetben

$$\underline{P} := \epsilon_0 \chi \cdot \underline{E} \quad \chi: \text{dielektromos szuszceptibilitás} \rightarrow \chi \geq 0, \text{ vákuum: } \chi = 0$$

$\epsilon_0$ : vákuum permittivitása

$$\text{Dielektr. eltolás v.: } \underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \epsilon_0 (\underline{E} + \chi \underline{E}) = \epsilon_0 (1 + \chi) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E} = \epsilon \underline{E}$$

$\epsilon_r$ : adott anyagra vonatkozó relatív permittivitás  $\epsilon_r > 1$

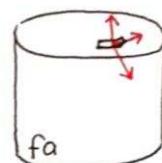
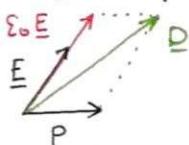
$\epsilon$ : abszolút permittivitás

$$\text{Gauss-törvény: } \oint \underline{D} d\underline{a} = Q_{sz} \rightarrow \oint \epsilon \underline{E} d\underline{a} = Q_{sz}$$

## II. Homogén, anizotróp, lineáris dielektrikum

$$\underline{P} = \epsilon_0 \underline{\chi} \underline{E}, \text{ ahol } \underline{\chi}: \text{tenzor, matrix (szuszceptibilitás-tenzor)}$$

- $\underline{P}$  és  $\underline{E}$  iránya nem egyezik meg:



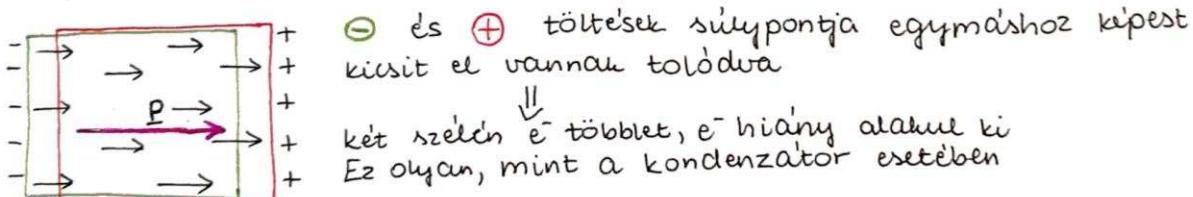
- $\underline{\chi}$ : 3 sajátétek, 3 sajátvektor  $\rightarrow$  utóbbi megadja a kristálytanilag kitüntetett irányokat

## III. Homogén, (an)izotróp nem-lineáris dielektrikum

A legtöbb anyag:
 

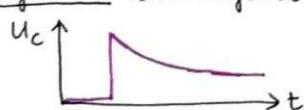
- nagyon kis kiterítésre lineáris
- nagyon nagy kiterítésre (extrem körmények között) nem-lineáris
- $\underline{P} \propto \underline{E}$  elég nagy  $\underline{E}$ -re  $\nabla$  anyagnál

Megmaradó polarizáció (remanens):  $P \neq 0$  az  $E=0$  esetben is

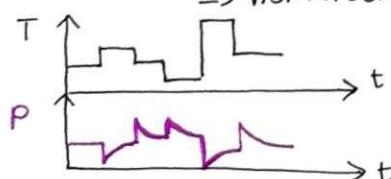


Megj.: remanens anyag (vákuumban) maga köniel elektromos teret hoz létre  
 Az anyagon belül  $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = 0$  azaz  $\underline{P}$  a saját tere kioltják egymást  
 (vákuum)

Lévegőben: semlegesítődik (kisül): az anyag két szélérre pozitív és negatív ionok kerülnek, amik semlegesítik a teret



Alkalmazás: ha  $T \uparrow \Rightarrow P \downarrow$  a hömörseklet változásra érzékeny a polarizáció  
 $\Rightarrow$  hömörsekletet méretezhető jól használható.

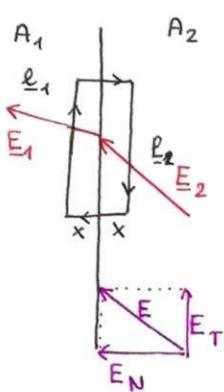


Az ilyen anyagokat piro-elektronos anyagoknak nevezik.

Pl. infravörös mozgásérzékelők  
 Átfordítható polarizáció: ferro-elektronos anyag

Piezo-elektronos anyagok: nyomás függvényében változik a polarizáció  
 pl. kvarcra

## Elektromos tér két anyag határán



$$\oint \underline{E} d\underline{r} = 0$$

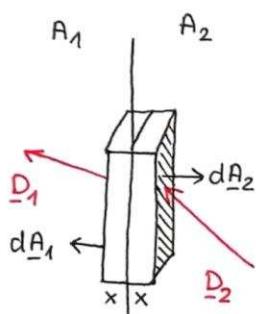
Ha  $x \rightarrow 0$ , akkor a rövidebb oldalon minden elvégzett integrálok értéke is nullahez tart.

$$\Rightarrow \oint \underline{E} d\underline{r} = E_1 l_1 + E_2 l_2 = l_1 (E_1 - E_2) = l_1 E_1 - l_1 E_2 = 0$$

$$l_1 = -l_2$$

A skálásorozás:  $l_1 E_1 = l_1 E_{1T}$   $\Rightarrow \cancel{l_1} E_{1T} - \cancel{l_1} E_{2T} = 0$

$$\Rightarrow [E_{1T} = E_{2T}]$$
 Peremfeltétel: transzverzális komponens folytonosan megy át a határon



$$\oint \underline{D} d\underline{s} = Q_{sz}$$

Ha  $x \rightarrow 0$ , akkor csak a két legnagyobb felületre vonatkozó tagok maradnak:

$$\Rightarrow \oint \underline{D} d\underline{s} = D_1 d\underline{A}_1 + D_2 d\underline{A}_2 = D_1 d\underline{A} - D_2 d\underline{A} = Q_{sz}$$

$$d\underline{A} = d\underline{A}_1 = -d\underline{A}_2$$

felületi szabad töltés

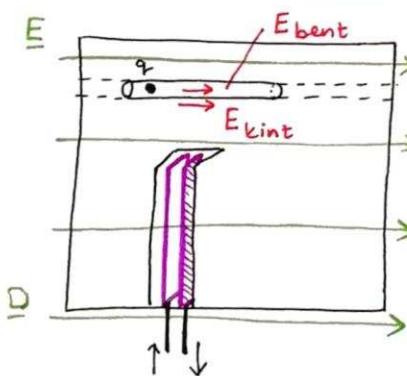
A skálásorozás:  $D_1 \cdot d\underline{A}_1 = d\underline{A}_1 \cdot D_{1N}$   $\Rightarrow D_{1N} d\underline{A} - D_{2N} d\underline{A} = Q_{sz}$

$$\Rightarrow [D_{1N} - D_{2N} = \frac{Q_{sz}}{d\underline{A}} = \sigma_{sz}]$$

Fém és dielektrikum határán:

fém	$\underline{E} = 0$	$\underline{D}$
	$\rightarrow E_N$	csak normális komponens
	$\rightarrow D$	felületen lévő töltésekkel származik

### E és D mérése anyagban



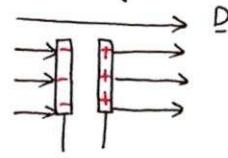
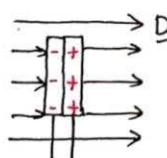
E mérése:

$$E_{kint} = E_{bent}$$

q töltésre ható erőből E meghatározható

D mérése:

- vékony résszel két fémlemezet rakunk, először összeérünkük őket.
- ekkor töltésmegosztás lesz rajtuk



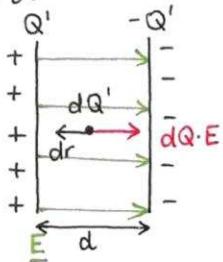
- bent szétválasztjuk őket, majd kihúzzuk őket, így a töltés megmarad a lemezeken.
- Az egyszerű alkalmazzuk a Gauss-törvényt

$$\oint \underline{D} d\underline{s} = Q_{sz} \rightarrow D \cdot A = Q_{sz}$$

rendezéssel D megkapható

## Az elektromos tér energiaja

Az elektrosztatikus helyzeti energia meghatározásához tekintsük a síkkondenzátorról:



- Célunk meghatározni a feltöltés során végrezett munkát.  
Ugyabár  $dQ$  töltés átvitelekor:
- arra  $dQ \cdot E$  erő hat az elmozdulással ( $dr$ ) ellentétes irányban
  - így az ehhez szükséges munka:  $dW = E \cdot dr \cdot dQ'$

Teljes  $d$  távolságon végrezett munka:

$$\Delta W = \int_{-}^{+} dW = \int_{-}^{+} E \cdot dr \cdot dQ' = - E \cdot d \cdot dQ'$$

$-E \cdot d$ , mert  $E, dr$  párhuzamosak, ellenére irányba mutatnak

$E_{pot} = ?$  A kondenzátoron tárolt potenciális energia

$$\Delta E_{pot} = -\Delta W = E \cdot d \cdot dQ' = \frac{d}{\epsilon A} \cdot Q' \cdot dQ'$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q'}{\epsilon A}$$

0-tól  $Q$ -ig feltölteskor:  $E_{pot} = \int_0^Q \frac{d}{\epsilon A} Q' dQ' = \frac{1}{2} \frac{d}{\epsilon A} \cdot Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$   
ahol  $\frac{\epsilon A}{d} = C$  kapacitás

Ha  $Q$  helyébe visszatérjük a  $Q = \epsilon \cdot A \cdot E$  kifejezést:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \frac{d}{\epsilon A} \cdot \epsilon^2 A^2 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon d A E^2 = \frac{1}{2} \epsilon V E^2$$

$$V = dA \text{ kond. térfogata}$$

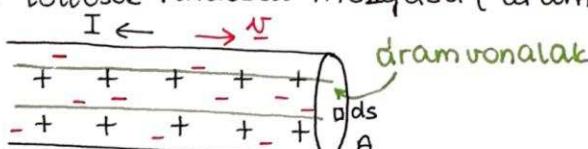
$\Rightarrow$  energia térfogati sűrűsége:

$$w_e = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} E \cdot D$$

Az általánosított összefüggés:  $w_e = \frac{1}{2} \epsilon D$

## AZ ELEKTROMOS ÁRAM

Áram: töltések rendezett mozgása (áramlása)



- Fajtái:
- kondiktív (vezetési) áram: a drótban, benne a töltéshordozók mozognak
  - konvektív áram: mozog a közeg, vele együtt az összes töltés is.  
pl. van de Graaf generator szalagja

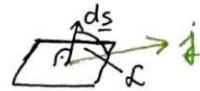
Áramerősségek: a vezető teljes keresztmetszetén egységnyi idő alatt kifolyó töltés

átlagos:  $I_{atl} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

pillanatnyi:  $I_{pün} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$

$$[I] = 1 \frac{C}{s} = 1 A \text{ (amper)}$$

$$dI = ds \cdot j \cdot \cos \varphi = ds \cdot j$$



ahol  $j$ : áramszűrűség: az áramlási irányára merőleges egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladó töltés

$$j \parallel \underline{v} \quad |j| = \frac{dI}{ds}$$

$$I_A = \iint_A j \cdot d\underline{s} = \frac{dQ_A}{dt}$$

áram iránya: ④ töltéshordozók áramlási iránya ( $\Rightarrow e^-$  - körülbelül ellenirány)

Zárt  $\Gamma$  felületre:



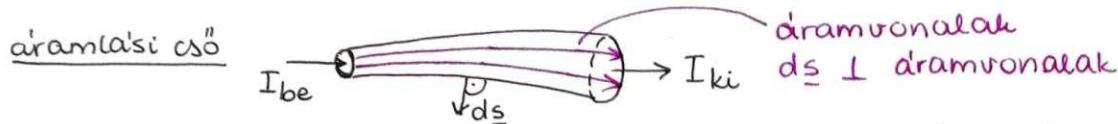
$$\frac{dQ_{\text{bent}}}{dt} = - \oint j \cdot ds$$

$\leftarrow \Gamma$  által bezárt töltések időbeli változása

$j \cdot ds$  pozitív, ha az áram kifelé folyik  
ha az áram kifelé folyik, akkor a belső töltések fogynak

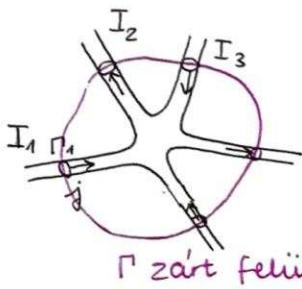
töltésnyelő töltésfehalmozó

Az egyenlet kifejezi a töltésmegmaradást is. A töltésmegmaradás az anyagmegmaradási egyenlet (kontinuitási egyenl.) speciális esete.



stacionárius áramlás

Ha nincs töltésfehalmozódás ( $\frac{dQ}{dt} = 0$ ) és  $j$  állandó, akkor az áramlás stacionárius (időfüggetlen)  $\rightarrow$  egyenáram  
Ekkor  $I_{\text{be}} + I_{\text{ki}} = Q$



$$\oint j \cdot ds = I_1$$

$$-\oint j \cdot ds = \sum_i I_i = \frac{dQ_{\text{bent}}}{dt} = Q$$

stacionárius áramlásra!

$$\Rightarrow \sum_i I_i = 0$$

Kirchhoff I. törvénye, csomóponti törvény

Azaz zárt felületre egy csomópontba be és kifolyó áramok előjelű összege nulla.  
Váltóáram esetén?

nem igaz a törvény ilyen alakban, hozzá kell tenni a fehalmozódó töltést.

Ohm-törvény

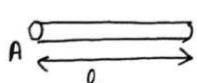
Vezetőszakasz B pontjában lévő potenciál A-hoz képest:  $U_B^A$

Közöttük lévő potenciálkülönbség:  $U$

$$I \sim U \rightarrow I = \frac{1}{R} U \quad \text{vagy} \quad U = R \cdot I$$

Ohm-törvény

R: elektromos ellenállás

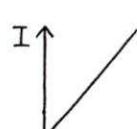


A keresztmetszetű, l hosszú vezetőre:  $R = \sigma(T) \frac{l}{A}$ ,

ahol  $\sigma(T)$ : fajlagos ellenállás

függ: a vezető anyagától, a hőmérséklettől

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \dots)$$



lineáris  
függés

$$[U] = V, [R] = \frac{V}{A} = 1 \Omega$$



Az Ohm-törvény fenti alakjába behelyettesíthetjük a következőket:

$$U = E \cdot l, \quad I = j \cdot A, \quad R = \sigma(T) \frac{l}{A}$$

$$\Rightarrow U = R \cdot I$$

$$E \cdot j = \sigma \cdot \frac{l}{A} \cdot j \cdot A \rightarrow E = \sigma \cdot j \quad \text{vagy} \quad j = \frac{1}{\sigma} E \quad (\text{vektori alakban})$$

$$\sigma := \frac{1}{\rho} \text{ fajlagos vezetőképesség} \Rightarrow j = \sigma E \quad \text{differenciális Ohm-törvény}$$

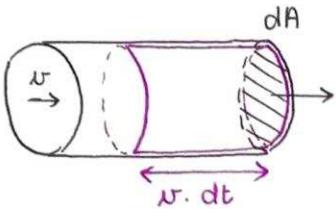
Megj.: az Ohm-törvény csak  $R = \text{áll.}$ ,  $\sigma = \text{áll.}$  esetén érvényes

Megj.: ha az anyag anizotróp:  $\underline{\sigma}$  vezetőképesség tensor  $\Rightarrow j = \underline{\sigma} E$   
akkor  $j$  és  $E$  nem egymánya

(mindig)

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega \cdot m}$$

## Az elektromos áram molekuláris értelmezése



$v$  sebességgel haladó részecske által megtett út:  $v \cdot dt$

$dA$  alatt  $dA$ -n átmenő,  $v$  seb. -el haladó részecskék  $dV$  térfogatban vannak:  $dV = v \cdot dt \cdot dA$

$dV$ ben lévő részecskék száma:  $dN = dV \cdot n = v \cdot dt \cdot dA \cdot n$

ahol  $n$ : a részecskék számsűrűsége  $[n] = db/m^3$

$dN$  részecske töltése:  $dQ = dN \cdot q = v \cdot dt \cdot dA \cdot n \cdot q$

Az áramerősség:  $I = \frac{dQ}{dt} = v \cdot dA \cdot n \cdot q$

Az áramsűrűség:  $j = \frac{dI}{dA} = v \cdot n \cdot q$

Hasonlítsuk össze az Ohm-törvénytel:  $j = v \cdot n \cdot q = \sigma E \Rightarrow v \sim E$

Azaz a részecskék átlagos sebessége a területtel arányos.

### Viszkózus modell:

A részecskékre hat valamilyen félkörö erő pl. nekiüköznek a  $\oplus$  rácsonak.

A területtel kifejezett erő:  $F = qE$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = \frac{q}{m} E \rightarrow v(t) = \frac{qE}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right)$$

$$\text{stacionárius áramlásnál: } a = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow qE = kv \rightarrow v = \frac{q}{k} E$$

$$\text{Legyen } \frac{q}{k} =: \mu : \text{mozgáskonstans} \quad v = \mu E$$

Azaz lineáris félkörö esetén  $v \sim E$

$$\left. \begin{aligned} F &= -k \cdot v \\ \sum F &= qE - k \cdot v = ma = m \frac{dv}{dt} \end{aligned} \right\}$$

$$j = qn v = qn \mu E \Rightarrow \sigma = qn \mu$$

### Hőfejlődés árammal átjárt vezetőben

A vezetőben a töltéshordozók állandó  $v$  sebességgel mozognak

el. ter  $E$ : munkát végez

$\Rightarrow$  A munka a belső energiat növeli, Joule-hő formájában.

Megj.: a munkát  $E_T$  végezi (ez  $\parallel$  a  $v$  sebességgel)

El. erőter munkája:  $W = \Delta Q \cdot U = UI \Delta t$

Hosszabb t idő alatt:  $W = UIT$  Joule-törvény

Hőve alakult teljesítmény:  $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = U \cdot I$

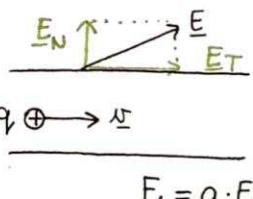
A molekuláris modell alapján:

egy töltéshordozó esetén az erőter teljesítménye:  $P_1 = F \cdot v = q \cdot E \cdot v$

összteljesítmény:  $P = n \cdot V \cdot P_1 = n \cdot q \cdot v \cdot E \underbrace{Al}_{V} = jEA \underbrace{l}_{V} = I \cdot U$

munka:  $W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$

$$P = n \cdot V \cdot P_1 = nqvE \cdot V = nq \mu E^2 V = \sigma \cdot E^2 V$$



$$\frac{q \theta \rightarrow E}{F_1 = q \cdot E_T}$$

# A'RAM VEZETÉSI MECHANIZMUSOK

## I Vezetés szilárd anyagokban

Vezetőképesség (molekuláris modellből):

$q$ : töltés

$n$ : területi átlósűrűség

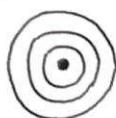
$\mu$ : mozgékonysság

$$\sigma = q \cdot n \cdot \mu$$

különböző anyagokban eltérőek  $\Rightarrow \sigma$  nagyon változó

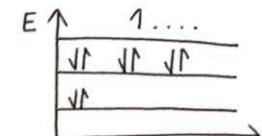
Savalmélet: elektronok viselkedését írja le szilárd kristályos anyagokban

Atom: elektronok energiaszinteken helyezkednek el.



Ezek a szintek a Pauli-elv szerint töltődnek fel:

egy kvantumállapotban nem lehet több azonos fermion



Kovalens kötés alakul ki:

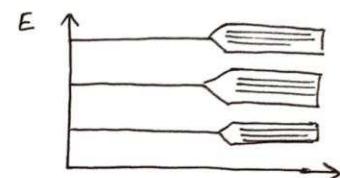
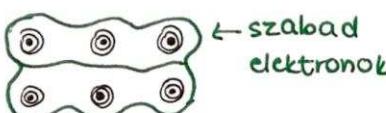
1 db atom



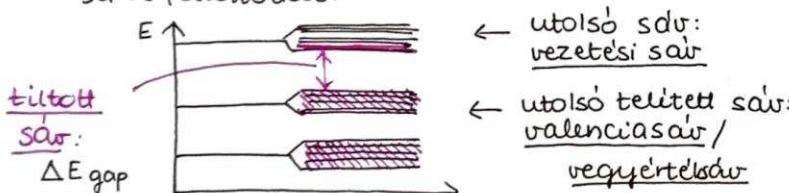
2 db atom



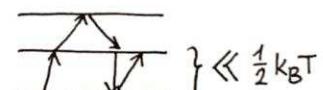
$10^{23}$  db



Sok részecske esetén az energiaszintek felhasadnak, energiaszárak alakulnak ki. Az elektronok csak a megengedett energiaszárakban lehetnek. Közöttük tiltott sávok alakulnak ki, az ezekhez tartozó energiával az elektronok nem rendelkezhetnek. Sávok feltöltödése:



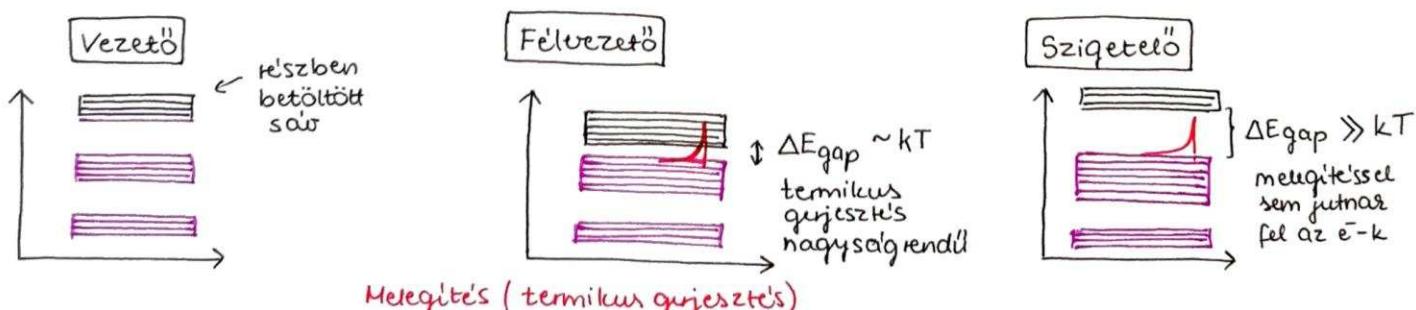
sávon belül:



El. térfelületen az elektronokat igyekszik mozgásba hozni.

Részben betöltött sávban az  $e^-$ -k energiadaja nőhet  $\rightarrow$  mozogni kudenek  $\rightarrow$  vezetés

Betöltött szd: nincs magasabb energiadíjú szabad  $e^-$  állapot  $\rightarrow$  nincs vezetés



Vezetőképesség hőmérsékletfüggése:

$$\hookrightarrow \text{fémekre: } \left\{ \begin{array}{l} q \text{ állandó} \\ n \text{ állandó} \\ \mu \text{ csökken} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma \downarrow \quad \sigma \approx 10^7 - 10^8 (\Omega m)^{-1}$$

$$\hookrightarrow \text{félvezetőkre: } T \uparrow = \left\{ \begin{array}{l} q = \text{állandó} \\ \mu \downarrow \text{csökken} \\ n \uparrow \text{nö} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma \uparrow \quad \sigma \sim 10^{-7} - 10^5 (\Omega m)^{-1}$$

(n nagyobb mértékben nö, mint  $\mu$  csökken)

$$\hookrightarrow \text{szigetelőkere: } T \uparrow \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q \text{ állandó} \\ n \uparrow \text{ nö} \\ \mu \downarrow \text{ csök.} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma \uparrow \quad \sigma \sim 10^{-17} - 10^{-7} (\Omega m)^{-1}$$

Megj.:  $T$  emelésekor  $\mu$  csökkenésének oka:

hömözgás miatt az atomok rezgnál, rendezetlenítve a kristályrács, ebben az elektronok mozgása jobban akadályozott

Félvezetők szennyezése: elterő vegyértekkű szennyező atom  $\Rightarrow$  töltéshordozók koncentrációját jelentősen megnöveli

Ionos kristályok:

vezetés az ionok mozgása által

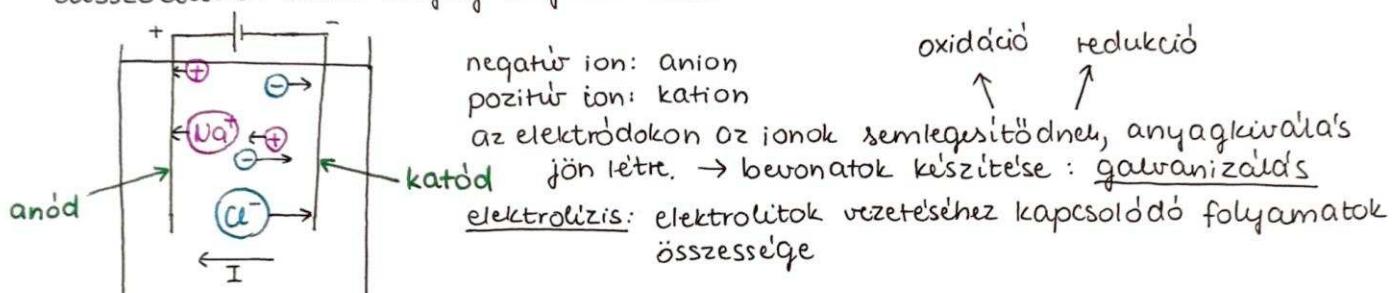
Tiszta anyagban a hömözgás üres helyeket hoz létre  $\rightarrow$  ionok mozoghatnak

## II Vezetés folyadékban

vezetés: ionok által

elektrolitok: ionos folyadékok

disszociáció: ionos anyag ionjaira esik



gyenge elektrolitokban érvényes az Ohm-törvény  $\Rightarrow \sigma = q n \mu$  használható

$$\sigma = \sum_i^N n_i q_i \mu_i \quad N: \text{különböző ionok száma}$$

$$\text{Példák: } \sigma_{H_2O} = \sigma_{\text{desztillált viz}} \sim 10^{-6} (\Omega m)^{-1}$$

$$\sigma_{\text{tenger- viz}} = 5 \cdot (\Omega m)^{-1}$$

$$\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 76 (\Omega m)^{-1}$$



ionokból vagy dipolusokból álló burok  $\rightarrow$  folyadékban súrlódva mozog viszkozitástól függ!

$$T \uparrow \Rightarrow \text{viszkozitás} \downarrow \Rightarrow \mu \uparrow, \sigma \uparrow$$

## III Vezetés gázokban

Töltehordozó-vezetés: • nem önalakú vezetés  
• öndisüzítő vezetés

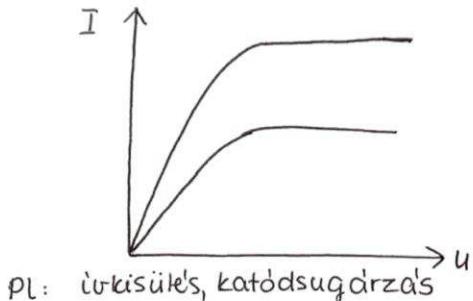
### 1. ÖNALAKÚ VEZETÉS

- kis számú töltehordozó minden keletkezik a gázban.
- feszültség növelésével ezek felgyorsulnak, semleges molekulákkal ütközve ionizálják azokat: ütközési ionizáció
- föképp elektronok: kiütendő  $e^-$ -vel arányos tömeg  $\rightarrow$  hatékony energiadáda
- töltehord. száma lassinászenen nő  
alacsony nyomás  $\rightarrow$   $\uparrow$  szabad úthossz  $\rightarrow$   $\uparrow$  energia  $\rightarrow$   $\uparrow$  ionizáló képesség

- elektronok gerjesztése  $\rightarrow$  fényjelenségek, gázkisülés
- kapcsoldó kísérletek: Ködfénykisülés, lúkisülés

## 2. NEM ÖNALLO VEZETÉS

Töltéshordozókat hoz létre: hő, sugarás, külső energiaformával  
rekombináció: ionok -  $e^-$  - k újraegyesülése



- kezdeti lineáris szakasz:  $n \approx$  állandó, Ohm-törvény teljesül
- $U \uparrow$ : egyre több  $e^-$  jut az elektrodoakra, rekombináció nélkülie
- állandósult érték: telítési áram

### ELEKTROMOS ÁRAMKÖRÖK ÉS HÁLÓZATOK

Közeliés: stacionárius (időben állandó) áramok: az áram az áramkör bármely helyén időben nem változik

Megj.: váltóáramra nem igaz Kirchhoff I (ld. később), a csomópontban felhalmozódó töltést hozzá kell tenni

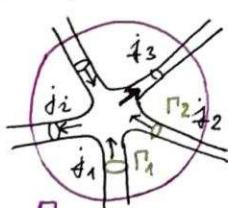
Vizsgálandó kérdések: 1. elágazásoknál hogyan oszlik meg az áram az ágak között?  
2. érvényes-e az elektrosztatika I. törvénye?  
Mi ennek a következménye

### Töltesmegmaradás, Kirchhoff I. törvénye

Tapasztalat: vezetőben elektromos töltés nem leletkerik/tűnik el, hanem megmarad.  
Stacionárius áramoknál: elektromos terierősségek is állandónak kell lennie.

$\Rightarrow$  töltés nem halmozódhat fel, mert akkor változó erőter jönne létre.

Csomópont:



$$\Gamma_1 \text{ görbüre: } \oint j_1 ds = I_1$$

$$\text{A teljes } \Gamma \text{ görbüre: } -\oint j ds = \sum_i I_i = \frac{dQ_{\text{bent}}}{dt}$$

$$\text{Stacionárius áramokra: } -\oint j ds = \sum_i I_i = 0$$

$\Rightarrow$  Kirchhoff I, csomóponti törvény: zárt felületre egy csomópontba befolyó és onnan kifolyó áramok előjelű összege nulla.

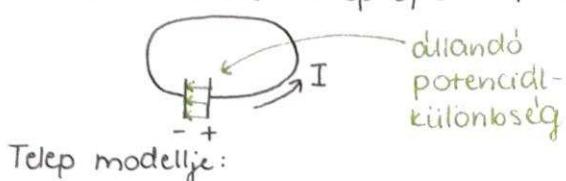
Megj.: Ez a kontinuitási  $\downarrow$  egyenlet spec. esete stac. áramokra.

$$\text{S2 áramló anyagra: } \frac{d\Omega_v}{dt} = - \oint j_{v2} dA + F_{v2}$$

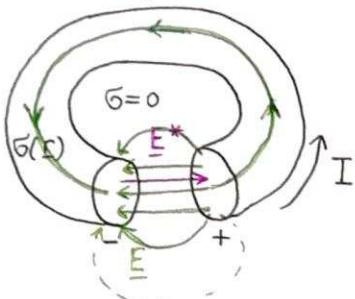
ahol  $j_{v2}$ : áramszűrő

$F_{v2}$ : formáserősség

Állandó áramhoz telepre / áramföldre van szükség: biztosítja a töltések körforgását



Telep modellje:



$E$ : telepen kialakult elektromos erőter.

A körforgáshoz ezzel szemben kell mozgatni a töltéseket

$E^*$ : ezt végző, idegen eredetű erőter

galván elem: kémiai munka

Van de Graaf: kémiai + mechanikai

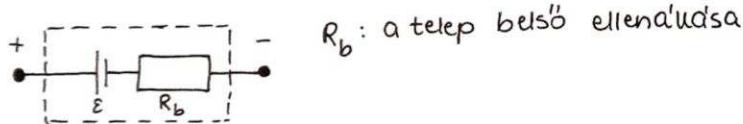
napelem: fizikai (foton-energia)

generátor / dinamó: elektromágneses indukció

$$E^* \text{ idegen ter munkaja: } w^* = \int q_r E^* dr = q \cdot \int E^* dr = q \epsilon$$

$$\text{Elektromotoros erő: } \epsilon = \int E^* dr \quad \text{telepre jellemző mennyiségeq} \quad [\epsilon] = 1V$$

$$\text{Generatorfeszültség: } U^* = -\epsilon = - \int E^* dr$$



$R_b$ : a telep belső ellenállása

$$\Rightarrow \text{Ohm-törvény a vezetékben: } j(l) = G(l) \cdot E(l)$$

$$\text{telepen: } j(l) = G(l) \cdot (E + E^*) \longrightarrow E = \frac{j}{G} - E^*$$

Az elektrosztatika I. alaptörvénye érvényes állandó áramú áramköröknel:

$$\oint E dr = 0$$

Tekintsünk egy L zárt görbét (áramhurkot) telepekkel és ellenállásokkal.

Erre érvényes az elektrosztat. I törvénye:

$$\oint E dr = \int_L \frac{1}{G} j dr - \underbrace{\oint E^* dr}_\epsilon = 0 \rightarrow \sum_k \left( \int_{L_k} \frac{1}{G_k} j_k dr \right) + \sum_m \left( \int_L \frac{1}{G_m} j_m dr \right) - \sum_m \epsilon_m = 0$$

ahol k: fogyasztó / ellenállások

m: telepek

$$\text{Mivel } \int_L \frac{1}{G} j dr = \int_L j \cdot \frac{1}{G} dr = \frac{|j|}{G} \cdot L = \frac{I}{G \cdot A} \cdot L = S \cdot \frac{L}{A} I = RI, \text{ így átirva a kifejezést:}$$

$$\sum_k R_k I_k + \sum_m R_m I_m - \sum_m \epsilon_m = 0 \quad \text{Kirchhoff II törvénye}$$

Vagy generátorfeszültségekkel:

$$\sum_k R_k I_k + \sum_m R_m I_m + \sum_m U_m^* = 0$$

Hegyeljegyzések:

- tetszőleges zárt hurokra, tetszőleges körüljárási iránynal használható

- az az áram pozitív, ami a körüljárási irányval egyirányú

- $U^*$  akkor pozitív, ha a körüljárás során a telepen a  $\oplus$  pólusból a  $\ominus$ -ba haladunk

Kapocsfeszültség: A telep sarkai között mérhető feszültség

## Energiaviszonyok elektromos áramkörben

A töltések mozgatásra fordított energia ( $E^*$  által) hővé alakul a töltések mozgása során.

$$\text{Kirchhoff II: } \Sigma = IR + IR_b \xrightarrow{\cdot I \Delta t} \Sigma I \Delta t = I^2 R \Delta t + I^2 R_b \Delta t$$

$$\text{Wössz} = W_{\text{haszn}} + W_{\text{veszt.}} \quad / : \Delta t$$

$$P_{\text{össz}} = P_{\text{haszn}} + P_{\text{veszt.}}$$

*idegen hatás teljesítménye*      *fogyasztóra eső hasznos teljesítmény*      *telepen hővé alakuló, elveszett teljesítmény*

energiahasznosítás hatásfoka:  $\eta = \frac{P_{\text{haszn}}}{P_{\text{össz}}} = \frac{R}{R + R_b}$

hasznos teljesítmény:  $P_{\text{haszn}} = I^2 R = \frac{E^2}{(R + R_b)^2} R$

Maximális, ha  $R = R_b$ , ekkor  $\eta = 1/2$

Hogyan köthető össze a teljesítmény?  $P_{\text{össz}} = P_{\text{haszn}} + P_{\text{veszt.}}$

## MAGNETOSZTATIKA

A mágneses testek maguk körül erőteret hoznak létre: mágneses erőter

Az ebben mozgó  $q$  töltésre erő hat:  $F_m$

$$F_m = q \cdot v \times B$$

Tapasztalatok:  $F_m \perp v$

látik elegendően egyneműszerű

$$F_m \sim v q \cdot \sin \theta$$

Az arányossági tényező:  $B$

Azaz  $B = B \cdot e$  mágneses indukcióvektor.  $[B] = \frac{N}{Am} = 1 \text{ T}$

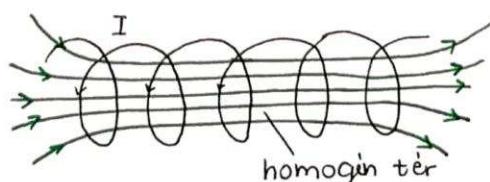
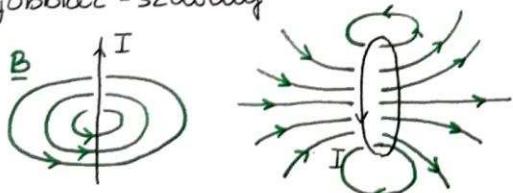
Ezzel: Lorentz - erő

Mágneses ter szemléltetése indukcióvonalakkal:

indukcióvonal: ennek érintője  $B$  irányába mutat

Megj.: az elektromos erővonalakkal mindenben ezek nem a töltések ható erő irányába mutatnak

zárt hurokok, az öt létrehozó áramot zárja körbe jobboldali - szabály

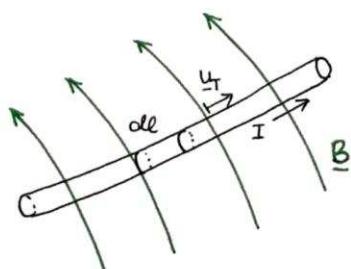


A áramvezetőre ható erő mágneses térben:

$B$  adott

egy töltésre ható erő:  $F_m = q \cdot v \times B$

Keressük a vezetőben mozgó töltésekre ható erők eredőjét!

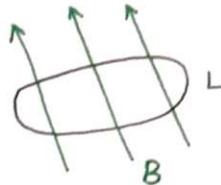


de hosszú tűfogat elemben a töltés hordozók száma:  $\Delta N = n \cdot \Delta V = n \cdot A \cdot \Delta l$   
ahol  $n$ : tűfogati darabsűrűség.

de vezetőszakaszra ható erő:  $\underline{F} = \Delta N \cdot \underline{F}_1 = n \cdot A \cdot \Delta l \cdot \underline{F}_1 = q \cdot n \cdot A \cdot \underline{U_T} \times \underline{B} \text{ dl}$

véges vezetőre:  $\underline{F} = \int_1^L q \cdot A \cdot \underline{U_T} \times \underline{B} \text{ dl} = \int_1^L I \cdot \underline{U_T} \times \underline{B} \text{ dl}$

$\underline{n} = N \cdot \underline{U_T}, I = q \cdot n \cdot A \cdot U$



homogen törben b hosszú vezetőre  $\underline{F} = I \cdot l \cdot \underline{U_T} \times \underline{B}$

áramhurokra:  $\underline{F} = I \oint \underline{U_T} \times \underline{B} \text{ dl}$

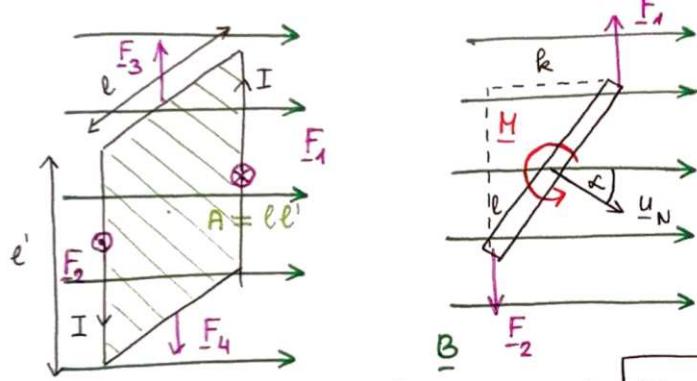
$\hookrightarrow$  homogen törben:  $\underline{F} = I \oint_L \underline{U_T} \times \underline{B} \text{ dl} = I \left( \oint_L \underline{U_T} \text{ dl} \right) \times \underline{B} = 0$

Azaz ez erők eredője zérus.

Azonban lehet olyan forgatónyomatek, ahol  $F_e = 0$

### Áramhurokra ható forgatónyomatek

Tf.  $\underline{B}$  homogen  $\rightarrow$  eredő erő zérus. Az egyes szakaszokra ható erők:



- $\underline{F}_3 = -\underline{F}_4$ , egy egyenesbe esnek  
 $\Rightarrow$  nincs forgatónyomatekkel
- $\underline{F}_1 = -\underline{F}_2, |\underline{F}_1| = |\underline{F}_2| = F = Il' B,$   
nem esnek egy egyenesbe

↓  
forgatónyomatek:  $M = Fl = Fl \sin \alpha = Il' B l \sin \alpha = IA \cdot B \sin \alpha$

$\underline{B}$   $\underline{U_N}$ : felület normálvektora  $\rightarrow M = IA \cdot \underline{U_N} \times \underline{B}$   
egyenessüly  $\Leftrightarrow \alpha = 0$  azaz  $M = 0$ , ekkor  $\underline{U_N}$  párhuzamos  $\underline{B}$ -vel

Hegy.: egyenáramú elektromos motor: áram irányának megfelelő változtatásával forgómozgás jön létre.

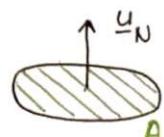
### Mágneses dipólus

mágneses dipólus: áramhurok

Emlékeztető: elektromos dipólusra ható forgatónyomatek:  $\underline{M}_e = \underline{d}_e \times \underline{E}$

áramhurokra ható forgatónyomatek:  $\underline{M}_m = IA \cdot \underline{U_N} \times \underline{B}$

$\Rightarrow \underline{d}_m = IA \cdot \underline{U_N}$  mágneses dipólmomentum, ezzel  $\underline{M}_m = \underline{d}_m \times \underline{B}$



### Mágneses dipólus energiaja:

A mágneses tér munkáit végez a dipólus elforgatásakor:

$dW_{ter} = \underline{M} \cdot d\underline{\varphi} = -M \cdot d\varphi$

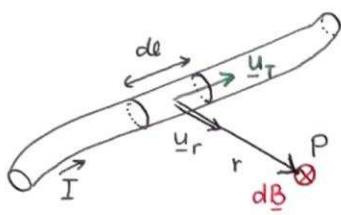
Ekkor a dipólus helyzeti energiát nyer:  $E_h^m = -\underline{d}_m \cdot \underline{B}$

Hasonlóan az elektromos dipólus esetéhez, ahol  $E_h^e = -\underline{d}_e \cdot \underline{E}$

Hegy.:  $E_h^m = 0$ , ha  $\underline{d}_m \perp \underline{B}$

$\Rightarrow$  egyneműben  $E_h^m < 0$

## Elektromos áram mágneses erőtere, Biot-Savart-törvény



új hosszú áramjárta vezető szakasz tere P-ben:

$$dB \sim \frac{Idl}{r^2} \sin\theta$$

vektoros alakban:  $dB \parallel u_T \times u_r \Rightarrow dB \sim I \frac{u_T \times u_r}{r^2} dl$

Kiintegrálva:  $B(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{u_T \times u_r}{r^2} dl$

L zárt hurokra  
Biot-Savart-törvény

Ahol az arányossági tényező:  $\frac{\mu_0}{4\pi}$ ,  $\mu_0$ :

Mivel  $r = r \cdot u_r \Rightarrow$  másik alak:  $B(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_L \frac{u_T \times r}{r^3} dl$

Alkalmazások:

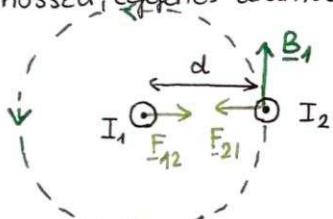
1. Közvető ter: a középpontban:  $B(P) = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} I 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$



2. Hosszú egynemű vezetőtől R távolságban:  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

## Aramvezetők kölcsönhatása

hosszú, egynemű áramvezetők: (hossz: l)



$I_2$ -re ható erő:  $F_{21} = I_2 l \cdot u_{T2} \times B_1$ ,  $u_{T2}$ :  $I_2$  irányába

$I_1$  tere töle d távolságban:  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2d\pi}$

$$\Rightarrow F_{21} = I_2 l B_1 = I_2 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2d\pi} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

$F_{12}$  hasonlóan:  $F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$

egységnyi hosszra jutó erő:  $f_{kh} = F_{kh} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$

Megjegyzés: Ha  $I_1$  és  $I_2$  azonos előjellel: vonzás, ha ellentétesek: tassítás lép fel.

2019 óta: elemi töltés definíciója:  $q_e = 1,611 \cdot 10^{-19} C$

Ebből az áram SI egysége:  $A = \frac{C}{s}$  amper = [I], C: Coulomb

## A sztatikus mágneses tér alaptörvényei

### Magnetosztatika II alaptörvénye - magnetosztatika Gauss-törvénye

Eml.: elektrosztatika II alaptörvénye: az elektrosztatikus tér erővonalai töltésekkel kezdődnek és végsődnek, az erőter forrásos.

indukciófluxus:  $\phi_B = \int_A B dA$

Tapasztalat: az indukcióvonalak zárt hurokok

$\Rightarrow$  zárt felületre:  $\oint_A B dA = 0$  magnetosztatika második alaptörvénye

Azaz: a mágneses erőter forrásmentes. Nincs mágneses monopólus.

Differenciális alak:  $\text{div } B = 0$  A forrásnélküli térfelület pontjában nulla.

### Magnetosztatika I alaptörvénye - gerjesztési törvény

El. sztat. alapján  $\oint_B dr$  örvényerőssége -re vonatkozik

Önmagukba záródó indukcióvonalak  $\Rightarrow \oint_B dr \neq 0$

Tapasztalat:  $\oint_B dr \sim I$ , ahol I a zárt hurok által körbevett áramok eredője.

Aram elője: jobbkéz-szabály szerint a görbe körüljárás irányának megfelelően.

Arányossági törvény: ismert elrendezés tere alapján

$$\oint_L \underline{B} dr = \mu_0 I$$

$L$ : I vezető körül  $r$  sugári körönön

$$\oint_L \underline{B} dr = \int_L \underline{B} dr = B \oint dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

$B = \text{const}$

$\Rightarrow \oint_L \underline{B} dr = \mu_0 I$ , ahol  $I = \sum_k I_k$ . Tovább:  $\oint_L \underline{B} dr = \mu_0 \int_A j dA$

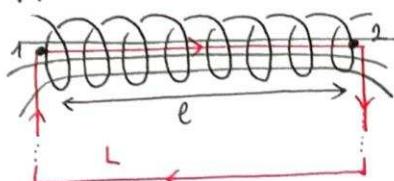
dramszűrűség

Differenciális alak:  $\oint_L \underline{B} dr = \int_A \text{rot } \underline{B} dA \rightarrow \text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$  gerjesztési törvény

Azaz a magnetostatikus tér önréndsűrűsége a tér  $A$  pontjában megegyezik az áramszűrűséggel.

Alkalmazás:

1. Egyenes tekercs (szolenoid) mágneses tere



$$\oint_L \underline{B} dr \approx \int_1^2 B dr = Bl$$

gyűjtő törvény:  $\oint_L \underline{B} dr = \mu_0 \sum_k I_k$   $\Rightarrow B \approx \frac{\mu_0 NI}{L}$

az áram  $N$ -szerese az  $L$  által kijelölt felületet.

$n = \frac{N}{L}$  menetsűrűséggel:  $B = \mu_0 n I$

### MAGNESSES TER ANYAGOKBAN

Anyagokat alkotó atomokban az elektronok atomi áramokat hoznak létre a mozgásuk során. Kétfele mozgás:

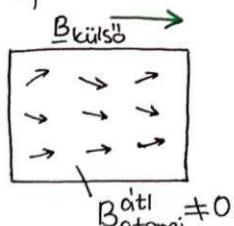
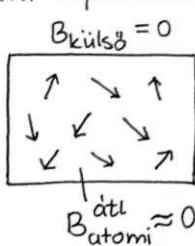
- atommag körötti, pályamozgás → atomi kördáramok, melyek mágneses dipól momentumot eredményeznek
- elektronok saját belső impulzusmomentuma is van → spin mágneses dipól momentum

Ezek az atomi  $d_m$ -ek rendeződhetnek mágneses térben, ez a magnesezés.

Rendezett dipolusok tere az anyagban elterő mágneses teret ad, mint a külső tér.

### Paramágneses anyagok

- atomi dipolimomentumok  $\neq 0$ , de rendellenesen  $\Rightarrow \underline{B} \approx 0$



Ha mágneses térré tesszük, akkor a dipolusok a külső tér irányába igyekeznek beálni.  $d_m \parallel B_{\text{külső}}$

- rendezett dipolusok tere erősíti a külső teret  $\Rightarrow B_{\text{eredő}} > B_{\text{vakuum}}$
- hosszú vékony paramagn. anyag a térré parallel áll be.

### Diamágneses anyagok

- atomi eredő dipolimomentum zérus
- $B_{\text{külső}} \neq 0$  esetén: indukált mdgn. dipolmom. keletkezik
- ezek a külső térré ellentétesen igyekezzenek beálni  $\Rightarrow B_{\text{eredő}} < B_{\text{vakuum}}$
- hosszú, vékony réteg a külső térré merőlegesen (diametrikusan) áll be.
- pl. bizmut, higany, réz, vizes, nitrogén, hidrogén

$B = \mu_r B_{\text{vakuum}}$ , ahol  $\mu_r$ : relatív permeabilitás (anyagra jellemző)

linearis anyagokra

$\mu_r > 0$ : paramágneses anyag

$\mu_r < 0$ : diamágneses anyag

## Magnetosztatika alaptörvényei anyagban

### Mágneses Gauss-törvény

mikroszkopikus áramok: ugyanolyan töltések ( $e^-$ ) mozgása, mint makroszkopikusnál;  
 ↳ keltett térfogatban is zárt hárkok

$$\Rightarrow \oint_{\text{A}} \underline{B} d\underline{A} = 0 \quad \text{változatlan}$$

### Görjesztési törvény

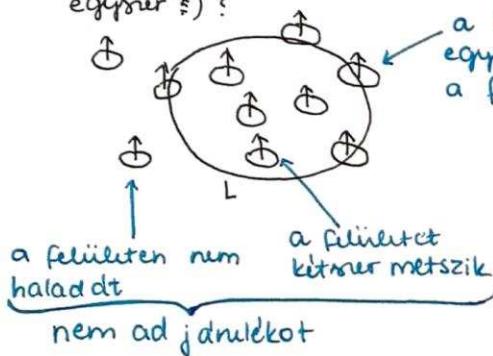
mikr. áramokkal:  $\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 (I + I_{\text{mikro}})$

atomi áramok  $\rightarrow d_{mi}$ , Egész testre:  $d_m^{\text{teljes}} = \sum_i d_{mi}$

Mágnesezettség vektor (mágneses dipólmomentumok térfogati összessége):

$$\underline{M} = \frac{\Delta d_m^{\text{teljes}}}{\Delta V}$$

A gerjesztési törvényben az L zárt görbe által határolt felületet (egyszer) metsző áramok szerepelnek. Az atomi áramok közül melyek adnak járműeket (melyek metszik csak egyszer?)?



a háralon leívők  
egyszer metszik  
a felületet } Mennyi?

L görbe által szakasza mentén azon ködráamok adnak járműeket, melyek a  $dV = d\underline{l} \cdot A_m \cdot |\cos \theta|$  térfogatban vannak.

$$\hookrightarrow \ell: u_T (\ell \text{ érintője}) \text{ és } \ell \text{ által bezárt szög}$$

$$\hookrightarrow d_m = I_m A_m \cdot u_N$$

$$\frac{H}{\underline{M}} dr = \frac{d\underline{l}}{dV} \cdot \underline{A}_m \cdot \underline{I} = \frac{d\underline{l}}{dV} \cdot \underline{M} = \underline{M} \cdot dr$$

Ezzel a teljes mikroszkopikus áram:  $I_{\text{mikro}} = \oint_L \underline{M} dr$

Megj.: A mágnesezettség vektor nem önénumenter teret alkot.

$I_{\text{mikro}}$ -t visszaiírva a gerjesztési törvénybe:

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \underline{M} dr \rightarrow \oint_L (\underline{B} - \mu_0 \underline{M}) dr = \mu_0 I \quad \text{azaz} \quad \oint_L \left( \frac{\underline{B}}{\mu_0} - \underline{M} \right) dr = I$$

Ahol  $\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$  mágneses térfogatosság vektor

differenciális alakban:  $\text{rot } \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\underline{B}}{dt}$

$$\oint \underline{H} dr = I$$

## Mágneses erőter homogén, izotróp, lineáris anyagban

Ismert összefüggés:  $\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$

lineáris anyagokra:  $\underline{H} \sim \underline{H} \Rightarrow \underline{M} = \chi_m \underline{H}$ , ahol  $\chi_m$ : mágneses szuszceptibilitás

$\rightarrow \chi_m > 0$  paramágneses anyag

$\rightarrow \chi_m < 0$  diamágneses anyag

$$\Rightarrow \underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0 \underline{H} + \mu_0 \chi_m \underline{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H} = \mu \underline{H},$$

ahol  $\mu_r = 1 + \chi_m$  anyag relatív permeabilitása

$\mu = \mu_0 \mu_r$  abszolút permeabilitás

$\rightarrow \mu_r > 1$  paramág.

$\rightarrow \mu_r < 1$  diamág.

Vákuumban:  $\chi_m = 0, \mu_r = 1$

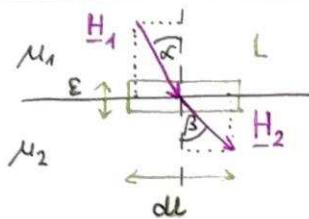
homogen, izotrop, lineáris anyagban a gerjesztési törvény:

$$\oint \underline{H} d\underline{r} = \oint \frac{\underline{B}}{\mu_0 \mu_r} d\underline{r} = I \rightarrow \oint \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 \mu_r I$$

Megj.: anyagbeli esetben  $\mu_0 \Leftrightarrow \mu_0 \mu_r$  csere

Megj.:  $\underline{H}$  nem függ a közegtől,  $\underline{D}$ -vel analóg módon.

Törés két különböző közeg határain:



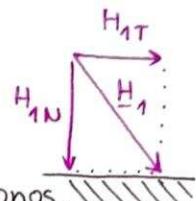
L zárt görbüre:

$$\oint \underline{H} d\underline{r} = -H_{2T} d\underline{l} + H_{1T} d\underline{l} = I = 0$$

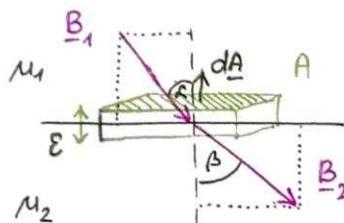
$\uparrow$   
 $\varepsilon \rightarrow 0$

makroszkopikus áramok  
nincsenek

$$\Rightarrow H_{1T} = H_{2T}$$



Azaz a mágneses térfelüsseg tangenciális komponense folytonos.



"A" zárt felületre:

$$\oint \underline{B} d\underline{A} = -B_{1N} dA + B_{2N} dA = 0 \Rightarrow B_{1N} = B_{2N}$$

$\uparrow$   
 $\varepsilon \rightarrow 0$

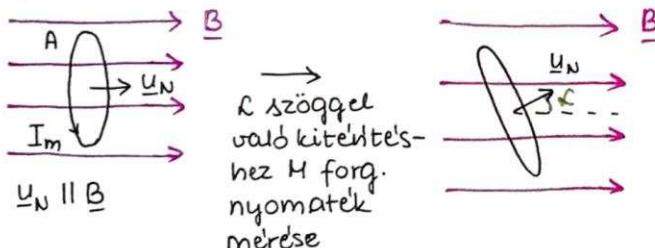
Azaz a magn. indukcióvektor normális komponense folytonos az anyaghataron.

törési törvény:  $\tan \alpha = \frac{B_{1T}}{B_{1N}}, \tan \beta = \frac{B_{2T}}{B_{2N}}$

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{B_{1T} B_{2N}}{B_{2T} B_{1N}} = \frac{B_{1T}}{B_{2T}} = \frac{\mu_1 H_{1T}}{\mu_2 H_{2T}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

B és H mérési utasítása

- B: „felületű”,  $I_m$  áramú dróthurokokra ható forgatónyomaték méréseivel

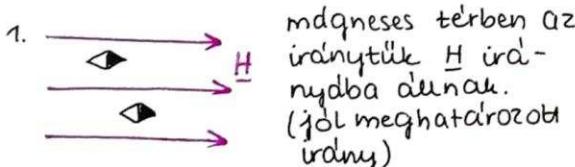


A kiteljesítéshez szükséges H forgatónyomaték:  $M = d_m \times \underline{B} = A I_m u_N \times \underline{B}$

Ennek méréseivel B kiszámítható:

$$B = \frac{M}{A I_m \sin \theta}$$

- H: kompenzaciós módszer



2.

$$\underline{H} = -\underline{H}_{\text{tekercs}}$$

### Anizotróp anyagok

általános eset:  $M = f(\underline{H}) + M^S$  spontán mágnesezettség

Kis terhekkel H és M között lineáris kapcsolat; anizotróp eset:

$$M_x = \chi_{mxz} H_x + \chi_{mxy} H_y + \chi_{mxz} H_z$$

$$M_y = \chi_{myx} H_x + \chi_{myy} H_y + \chi_{myz} H_z$$

$$M_z = \chi_{mzx} H_x + \chi_{mzy} H_y + \chi_{mzz} H_z$$

$\chi_{mij}$ : szuszceptibilitás tensor

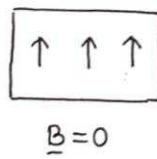
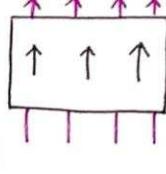
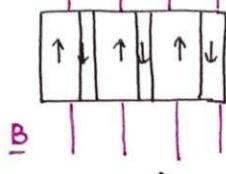
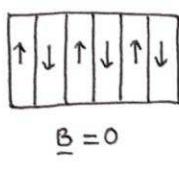
## Ferromágneses anyagok

ferromágneses anyagok: különbőr hálókeli, spontán mágnesezettséggel rendelkeznek

↓  
spin mágneses dipólmomentumok eredője  $\neq 0$ ,  
ezek egy irányba rendeződnek (stabilabb)

ferromág. állapot: csak Curie-pont alatt (felette hőmozgás miatt paramágneses)

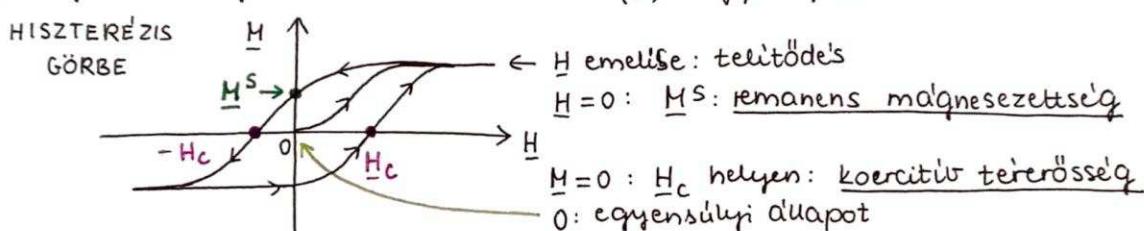
Anyagban a mágnesezettréq nem mindenhol eggyirányú, ellentétes M-ű doménök (tartományok) jönnek létre  $\Rightarrow$  kifele & mágneses tulajdonság



külső mágneses térben a doménök  
eggyirányúvá válnak

tér megszűnése után alacsony  
hőmérsékleten megmarad a rendezettség

M mágneszettsége változása a külső tér (H) függvényében:



Szuszceptibilitás: •  $\frac{dM}{dH} = \chi_m$   $H$ -val definált  $\chi_m$  nem egértekké, nem értelmezhető

- $\chi_{m0} = \left(\frac{dM}{dH}\right)_{H=0}$  kezdeti relatív szuszceptibilitás  
 $\hookrightarrow \chi_{m0}$  nagy lehet  $\Rightarrow B$  anyag  $\gg B$  vákuum pl. vasmag használata

## A mágnesességi klasszikus atomi értelmezése

klasszikus értelmezés:  $e^-$  körpálya  $\rightarrow$  atomi körfáramok

$$\text{töltött részecske perdülete: } N = r \cdot m \cdot \omega \cdot u_N$$

$$\text{mágneses dipólmomentuma: } d_m = I_q A u_N = I_q r^2 \pi u_N$$

$$\text{dram: } I_q = \frac{q}{T} = q \frac{\omega}{2\pi} = \frac{q}{2\pi} \frac{\omega}{r}$$

$$\Rightarrow d_m = I_q r^2 \pi u_N = \frac{q}{2\pi} \frac{\omega}{r} \cdot r^2 \pi u_N = \frac{q}{2m} r m \omega u_N = \frac{q}{2m} N$$

Azaz a mágneses dipolmomentum arányos a perdülettel! Arányossági tényező:

$$q = \frac{q}{2m} \quad \text{giromágneses egysíthető}$$

## Paramágnesességi

$\hookrightarrow$  elektronok atommagok közötti mozgásából smagyarázható

mágnesses dipolus:  $B$  irányába forgatónyomaték hat rá  
 $\Rightarrow$  külső teret erősít

$\hookrightarrow$  hőmozgás akadályozza a rendeződeést  $\rightarrow T \uparrow \chi_m \downarrow$

$\hookrightarrow q = -e \rightarrow d_m = -\frac{e}{2m} N \rightarrow g_{\text{elekt}} = -\frac{e}{2m}$  elektron pályamenti mozgásdra vonatkozik

$\hookrightarrow$  elsőrendű mágneses momentum elnyomja az indukált mág. momentum hatását

$$\text{forgatónyomaték: } \underline{M} = \underline{d_m} \times \underline{B}$$

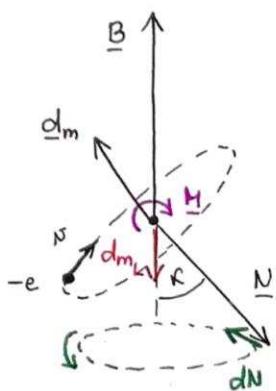
Az elektron perdülettel is rendelkezik, súlyos pörgettyűként precesszál

$$\text{Larmor-precesszió: } d\underline{N} = \underline{M} dt$$

Larmor-körfrekvencia:

$$\omega_{pr} = \frac{\underline{M}}{Ns \sin \theta} = \frac{d_m B \sin \theta}{N \cdot s \sin \theta} = \frac{e}{2m} N \frac{B}{N} = \frac{eB}{2m} = \omega_L$$

$$\underline{M} = \underline{\omega}_{pr} \times \underline{N}$$

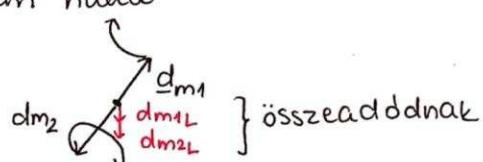


### Diamagnesség

Az elektron precessziós mozgásához tartozik egy  $\underline{B}$ -vel ellentétes irányú dipólmomentum:  
Ez:  $d\underline{m}_L$  → ennek rendszeresítése gyengíti  $\underline{B}$ -t  $\Rightarrow$  diamagnesség oka

Mindig jelen van ez a hatás, de a paramagnesség mellett elhanyagolható.

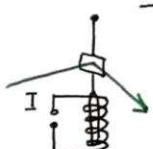
Kivétel:  $\sum d\underline{m} = 0$  össz mágneses momentum nulla  
az elektronok párosítva vannak:



### Ferromagnesség

A ferromagnességet nem az e- pályamenti mozgásából származó  $d\underline{m}_1, d\underline{m}_L$  okozza.

Kísérlet: Einstein-de Haas:



tekercsben felfüggesztett vasnél (ferromagn. anyag)

Aram irányának változtatásánál mértek a tükről elfordulását

Elv: mágneszettség átfordításával a mág. dipólusok perdülete is átfordul  $\rightarrow$  perdületmegmaradás miatt a vasnálnak el kell fordulnia

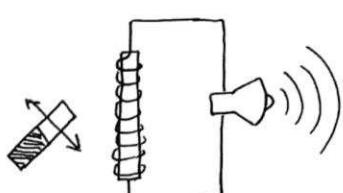
Kímért giromagneses eggyütt hatás:  $q = -\frac{e}{m}$   $\Rightarrow$  nem a pályamenti mozgáshoz kapcsolódik

Klasszikus modellben:

spin: saját tengely körül forgáshoz tartozó perdület

A spinhez is kapcsolódik mágneses dipólmomentum

$\hookrightarrow$  Barkhausen-effektus:



vasmag közelében mágneset mozgatunk  $\rightarrow$  sercegő hang a hangszóróban

OK: doménék ugrásszenűen átfordulnak

$\Rightarrow$  mágneses indukció változik a tekercsben  $\rightarrow$  feszültséglököteteket halljuk

# AZ ELEKTROMAGNESES INDUKCIÓ

## Mozgási indukció

Alakuló mágneses térben mozgó zárt hurokban (vezetőben) elektromotoros erő indukálódik, indukált áram jön létre.

### Mozgó vezető mágneses térben:

Lorentz-erő:  $F_L = q \underline{v} \times \underline{B}$  mozgó töltésekre

Ez a vezetőben töltésmegosztást okoz.

$\Rightarrow$  elektrosztatikus erőtér jön létre  $\rightarrow$  potenciálkülönbség a 2 vége között

Stacionárius állapot:  $E_{el} + E_{mag} = 0 = qE + q\underline{v} \times \underline{B} \rightarrow E = -\underline{v} \times \underline{B}$

ha  $E$  homogén, akkor a potenciálkülönbség:  $U = El = vBl$

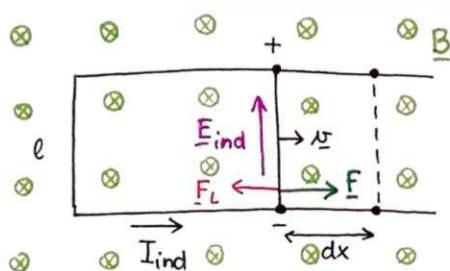
Ez az elektromos feszültség a mágneses erőtér által kifejtett erő miatt jön létre.

Tehát nem elektrosztatikus jellegű. Korábban ene vezettük be a fiktív elektromos teretősséget:  $E^*$

Itt  $E^* = E_{ind} = -E = \underline{v} \times \underline{B}$

indukált elektromotoros erő:  $E_{ind} = \int E_{ind} dr = - \int E dr$

### Mozgási indukció zárt vezetőhurokban:



$$E_{ind} = \underline{v} \times \underline{B}$$

$$E_{ind} = \oint E_{ind} dr = \int E_{ind} dr = Blv = I_{ind} \cdot R$$

$$\text{vagy: } E_{ind} = Blv = Bl \frac{dx}{dt} = B \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$$

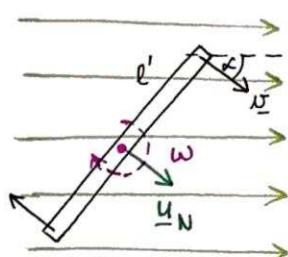
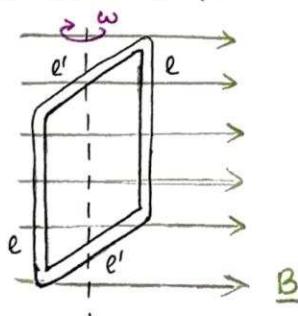
ahol  $\phi$ : az áramhurokra vett fluxus

$$\text{Előjel helyesen: } E_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$$

kör elektromos  
ellenállása

Lenz-törvény elvénysü: Az indukált feszültség olyan indukált áramot indít, ami a mágneses indukciónak ellenkezik, így a fluxust csökkenti, azaz az öt létrehozó hatalt csökkenteni igyekszik.

Alkalmazás: forgó keret mágneses térben: váltó áramú generátor



Az indukált feszültség:

$$E_{ind} = \oint E_{ind} dr = 2 \cdot E_{ind} \cdot l = 2vlBl \sin(\omega t) =$$

$$E_{ind} = \underline{v} \times \underline{B}; \underline{l} = \omega \cdot \underline{t}$$

$$= 2 \cdot \frac{l'}{2} \omega Bl \sin(\omega t) = BA \sin(\omega t) \omega = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\omega = r \cdot \omega = \frac{l'}{2} \omega$$

Azaz színeszsen változó feszültség és áram jön létre a keretben

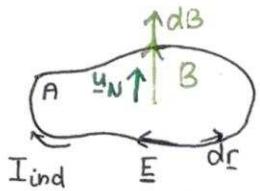
## Nyugalmi indukció, Faraday-törvény

Rögzített vezetőhurokban feszültség, áram indukálódik, ha a mágneses tér a vezető köül változik. Ez a nyugalmi indukció.

Valójában a vezetőhurok által közreárt fluxus időbeli változása kell:  $|E_{ind}| \sim |\frac{d\phi}{dt}|$



## Az előjelek vizsgálata:



$$\frac{U_N}{dr}$$

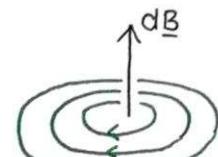


$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \underline{B} d\underline{A}$$

$$\Rightarrow \text{Faraday-féle indukciótörvény: } \oint_L \underline{E} dr = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \underline{B} d\underline{A}$$

Megj.: ez az elektromos tér önéhelyes!  $\underline{E} = \underline{E}_{\text{ind}} + \underline{E}_{\text{elsztat}}$

indukált tér  
önéhelyes  
nem konzervatív



$$E_{\text{ind}} = E_{\text{R indukált}}$$

BALKEZ-SZABAŁY

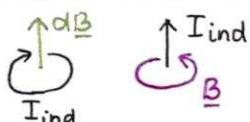
A Faraday-féle indukciótörvény az elektrosztatika I. alaptörvényét váltja fel változó terekre.

Differenciális alakja:

$$\oint_L \underline{E} dr = \int_A \text{rot} \underline{E} d\underline{A} = -\frac{d}{dt} \left( \int_A \underline{B} d\underline{A} \right) \Rightarrow \int_A \left( \text{rot} \underline{E} + \frac{d\underline{B}}{dt} \right) d\underline{A} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{rot} \underline{E} = -\frac{d\underline{B}}{dt}$$

## Önényaíramok

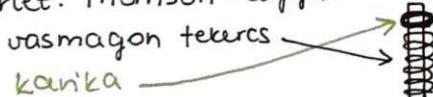


} Az indukált áram egy vezetőben olyan **B** teret hoz létre, ami  $d\underline{B}$ -vel ellentétes, azaz az indukált áramot létrehozó változást csökkenteni igyekszik: Lenz-törvény.

Kiterjedt vezetőkben emiatt jönnek létre önényaíramok:

$E_{\text{ind}}$  zárt erővonalai mentén lépnek fel, hiszen a vezetőben ezek mentén mozognak az elektronok.

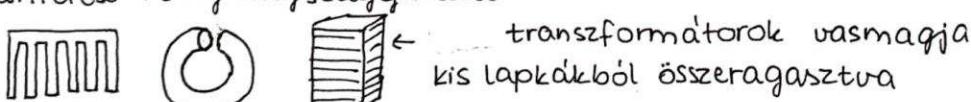
Kísérlet: Thomson-dígyű:



A tekercsben áramot folytatva olyan önényaíram indukálódik az inhomogen mágneses térben, hogy a kanika lerepül a vasmagról.

Önényaíram: energiadát vesz ki a mágneses térből  $\rightarrow$  veszteségek

Megszüntetése: közeg megszaggatása



## Kölcsönös indukció, önindukció



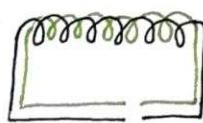
kölcsönös indukció: két hurok esetén az egyik változó árama mágneses teret indukál a másik helyén, így a másikban is áram indukálódik, és ugyanígy fordítva.

A másodikban indukált feszültség:  $\mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt}$ , ahol  $\phi_2 = M_{21} I_1$

$$\phi_1 = M_{12} I_2, \quad M_{21} = M_{12} = M \quad \text{kölcsönös indukciós együttható}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= -M \frac{dI_1}{dt} \\ \mathcal{E}_1 &= -M \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

Példa:



két szolenoид egymásba tekercselve:

$$(1) \text{ tekercs tere (2)-ben: } B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

$$B_1 \text{ feleUSA: } \phi_2 = N_2 A B_1 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} I_1 \rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}$$

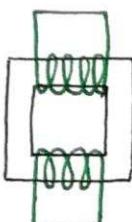
önindukció: a hurok saját változó mágneses terében van, így ekkor benne elektromotoros erő indukálódik

$$\Phi = L \cdot I \rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

ahol  $L$  az önindukciós együttható

$$\text{tekercsre: } B = \frac{\mu_0 N I}{l} \rightarrow \text{teljes fluxus: } \Phi = N \cdot \frac{\mu_0 N A}{l} I \Rightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

### A Transzformátor



transzformátor: adott amplitúdójú váltakozó feszültségből eltérő amplitúdójú feszültséget eredményez

Tf. veszteségmentes, ideális:

$$\text{Egy menetre a fluxus: } \Phi \rightarrow \text{a két tekercs fluxusa: } \Phi_1 = N_1 \Phi; \Phi_2 = N_2 \Phi$$

$$\Phi = \frac{\mu N_1 I_1 A}{l} + \frac{\mu N_2 I_2 A}{l}$$

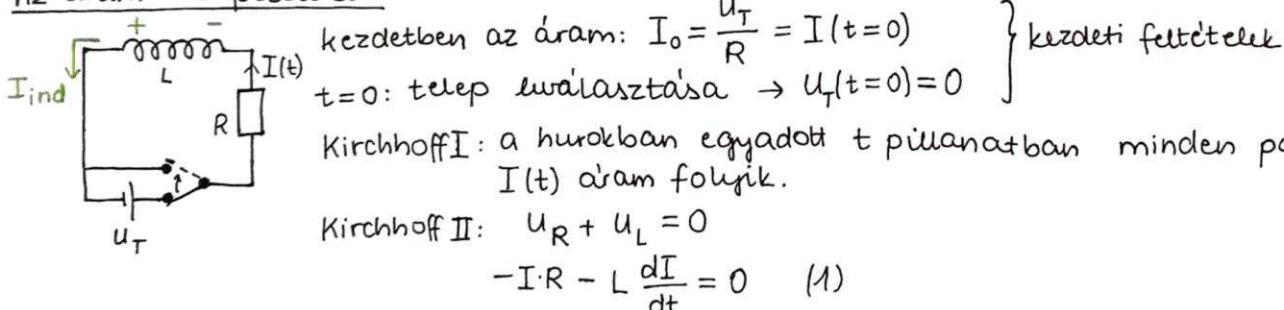
Az indukált feszültségeket közötti kapcsolat a Kirchhoff II törvény segítségével:

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \Rightarrow \left| \frac{U_1}{U_2} \right| = \frac{N_1}{N_2} \text{ amplitúdók aránya a megfelelő menetszám-ellentétes fazisú feszültségek}$$

### Tranziens jelenségek

Lenz-törvény megnyilvánulása: induktivitás esetén a körben változó áramot (akkor annak változását) az induktivitás csökkenteni igyekszik. → tranziens (dtmeneti) jelenségek

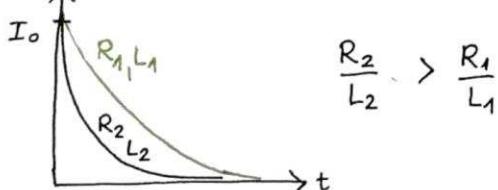
#### Az áram kikapcsolása



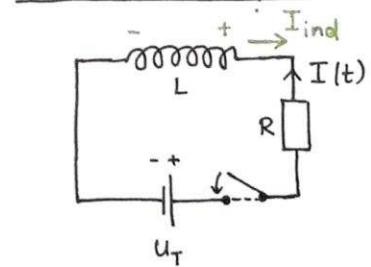
$u_L = -L \frac{dI}{dt}$ : az induktivitás az áram csökkenéseellen hat,  $I_{ind}$ -et indít. Azaz telepeltetve növelik  $\Rightarrow u_L > 0$ . Mivel  $\frac{dI}{dt} < 0$  (csökken)  $\Rightarrow u_L = -L \frac{dI}{dt} > 0$

Az (1) diffegyenlet megoldása:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$       ezzel együtt lesz pozitív. Azaz az áram exponenciálisan csökken.

Csökkenés kezdeti meredeksége:  $\left( \frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{R}{L} I_0$



## Az áram bekapcsolása



$$I(0) = 0$$

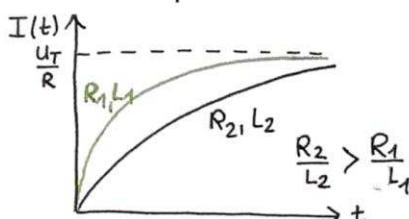
$$\text{Kirchhoff-II: } U_R + U_L + U_T = 0$$

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + U_T = 0$$

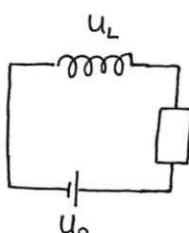
$$\text{Megoldás: } I(t) = \frac{U_T}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \rightarrow \text{egy adott értékhez tart}$$

Azaz bekapcsolás után nem azonnal eléri el a maximális áramot ( $U_T/R$ ), mert az induktivitás akadályozza  $I(t)$  növekedését: ellentétes irányú  $I_{\text{ind}}$ -et indít.

Fel kell építeni a mágneses teret, ami a tekercsben van.



### A mágneses erőter energiája



$$\text{Kirchhoff II: } -IR - L \frac{dI}{dt} + U_o = 0$$

$$dt \text{ alatt végzett munka előbb: } -I^2 R dt - LI \frac{dI}{dt} dt + U_o I dt = 0$$

↑  
joule-hő

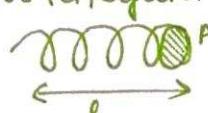
↑  
áramforrás  
munkája

mágneses erőter energiaváltozása:  $dE_{\text{magn}} = LI \frac{dI}{dt} dt$

$$\text{kiintegrála: } E_{\text{magn}} = \int_0^E dE_{\text{magn}} = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2, I \text{ árammal adjált tekercsbeli energia}$$

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}, B = \frac{\mu NI}{l} \rightarrow I = \frac{Bl}{\mu N} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} A \cdot l = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V \quad \text{tekercs térfogata}$$

energia térfogati sűrűsége:  $w_{\text{magn}} = \frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} A^2$



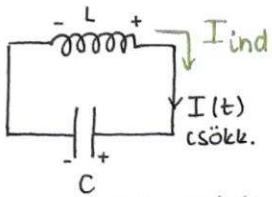
↳ homogén, izotróp, lineáris anyagban:  $B = \mu H$  e's  $B \parallel H$ , ezut:

$$w_{\text{magn}} = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} H B$$

A'lalcinosan is igaz összefüggés:  $w_{\text{magn}} = \frac{1}{2} HB$

## ELEKTROMAGNESES REZGÉSEK

Ideális elektromos rezgőkör - Harmonikus rezgés



C kapacitású kondenzátor

L induktivitású tekercs

Az áramerősség periodikusan változik  $\rightarrow$  rezgőkör  
ideális rezgőkör: nincs benne ellenállás

Kirchhoff I: adott pillanatban a kör minden pontján ugyanaz az áram folyik  
Kirchhoff II: adott pillanatban a feszültségek összege 0 a hurokban

$$U_L(t) + U_C(t) = 0$$

ábraján jelölt esetben ilyenek az előjelök:  $-L \frac{dI(t)}{dt} - \frac{Q_C(t)}{C} = 0$

$I(t)$  csökken  $\rightarrow I_{\text{ind}}$   $I(t)$ -vel egyaránt, a tekercs teleplánt  $U_L > 0$

$$U_C < 0$$

$$\text{Mivel } I(t) = \frac{d^2 Q_C(t)}{dt^2} \rightarrow L \frac{d^2 Q_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} Q_C(t) = 0 \rightarrow Q_C(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ahol  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$  rezgőkör sajátfrekvenciája

A kondenzátoron lévő töltésből az áramerősségek:  $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Tehát valóban harmonikus rezgés

jön letre.

A feszültségek:

a kondenzátoron:  $U_C(t) = \frac{1}{C} Q_C(t) = \frac{Q_0}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow$  töltéssel azonos fázisban,  
a tekercsen:

$U_L(t) = -U_C(t) = -\frac{Q_0}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow$  töltéssel ellentétes fázisban  
rezeg.

$$\text{Mivel } I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

az áramerősségek változása  $\frac{\pi}{2}$  fázissal siet a kondenzátoron eső feszültségekhez  
képest.

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

### Energiaviszonyok

energia-mérlegegyenlet:  $U_L I dt + U_C I dt = 0$

tekercsbeli mágneses tér energiája:  $dE_{magn} = U_L I dt = L \frac{dI}{dt} I dt = LI dI \rightarrow E = \frac{1}{2} LI^2$

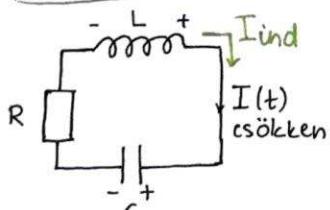
rezgőkör energia:  $E(t) = E_{el}(t) + E_{magn}(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 =$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L I_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Azaz  $E(t) = E = \text{állandó}$ , azaz az összenergia megmarad.

$$I_0 = \frac{Q_0}{LC} = Q_0 \cdot \omega_0$$

csillapodó rezgés elektromos rezgőkörben



R ellenállást tartalmaz  $\rightarrow$  energia-dissipáció

$\Rightarrow$  a rezgés csillapodik, egy idő után megszűnik

Kirchhoff II:  $U_L + U_C + U_R = 0$

$$-L \frac{dI(t)}{dt} - \frac{Q_C(t)}{C} - IR = 0 \rightarrow \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = 0$$

Új változók bevezetése:  $2\beta = \frac{R}{L}$  és  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$   $\Rightarrow$

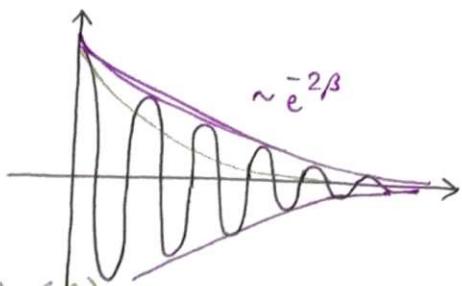
$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0$$

Ennek megoldása:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$

Ahol a frekvencia:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  azaz a csillapítás eltolja a frekvenciát

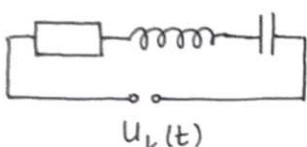
Az energia az ellenállásban disszipálódik.  
földi tényező:

$$\hat{Q} = \frac{E}{|\Delta E_{\text{rad}}|} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\Lambda} \quad \rightarrow \quad \hat{Q} \approx \frac{L\omega_0}{R}$$



erős csillapítás ( $\omega_0 < \beta$ )  
gyenge csillapítás ( $\omega_0 > \beta$ )

### Kényszerrezgés



kényszer:  $U_k(t) = U_0 \sin(\omega_k t)$  harmonikus gerjesztés

Ezzel a Kirchhoff II alapján felírt egyenlet:

$$\frac{d^2 Q_C(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dQ_C(t)}{dt} + \omega_0^2 Q_C(t) = \frac{U_0}{L} \sin(\omega_k t)$$

ahol  $2\beta = \frac{R}{L}$  és  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

A megoldás:  $Q_C(t) = Q_0 \sin(\omega_k t - \varphi)$

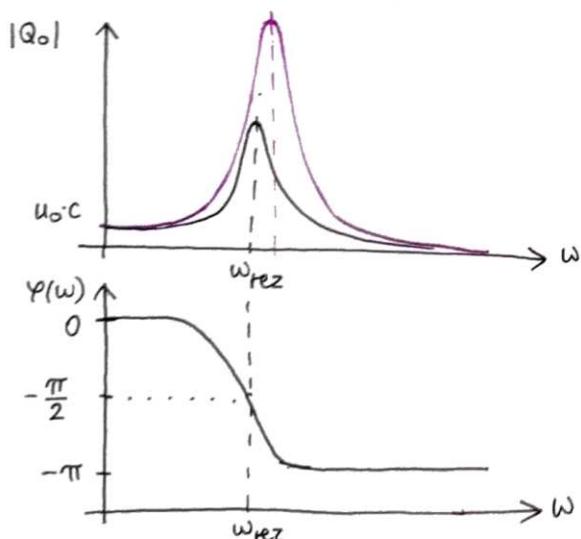
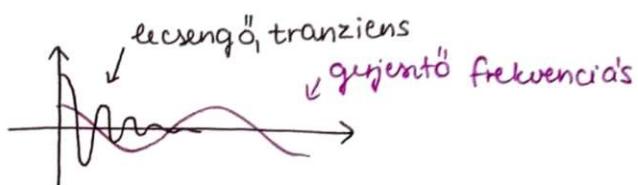
↳ 2 megoldás:  $y_h + y_p$

$$Q_C(t) = \text{Re} \left\{ Q_0(\omega) \cdot e^{i\omega t} \right\}$$

homogén mo.  
tranziens tagIH partikuláris  
mo

$$Q_0(\omega) = \frac{U_0/L}{\omega^2 + 2\beta\omega - \omega_0^2} \rightarrow |Q_0(\omega_k)| = \frac{U_0/L}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_k^2}} \quad \text{amplitúdó}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \{Q_0(\omega)\}}{\operatorname{Re} \{Q_0(\omega)\}} = \frac{2\beta\omega_k}{\omega_0^2 - \omega_k^2} \quad \text{fdzis}$$



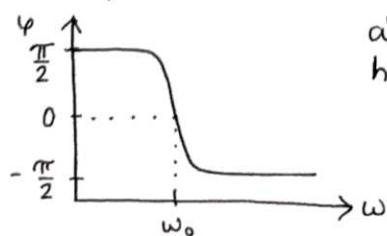
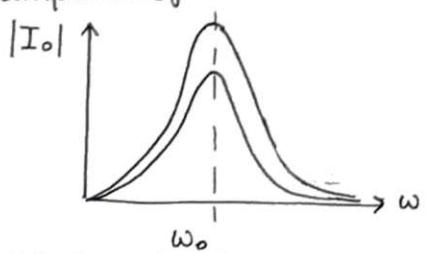
A rezgés amplitúdójának maximuma a rezonanciafrekvenciánál van:

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\text{A rámenetességi: } I(t) = \underbrace{Q_0 \omega_k}_{I_0} \cos(\omega_k t - \varphi)$$

$$|I_0(\omega_k)| = |Q_0(\omega_k)| \cdot \omega_k = \frac{(U_0/L) \cdot \omega_k}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_k^2}} = \\ = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega_k L - \frac{1}{\omega_k C})^2}}$$

amplitúdója: mechanika sebesség amplitúdó  $\omega$ -függésével analóg:



áram faziskeisére  $U_k(t) = U_0 \sin(\omega_k t) -$   
bez képest:

$\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$ , ahol  $\varphi$  a fent említett fazis

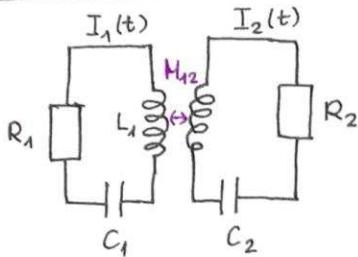
Felületek-szélesség: rezonancia elősséget jellemzi.

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\beta = \frac{R}{L}$$

↑  
kis csillapításnál

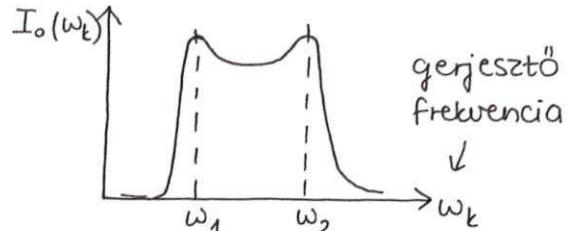
Alkalmazás: rádiózással a megfelelő frekvencia kiválasztásához

## Csatolt rezgés



$M_{12}$ : kölcsönös indukciós együttható  
csatolás: induktivitások kölcsönös indukciója  
induktív csatolás

mechanikai analógiával alapján itt is rezgés → a két frekvencia a csatolási frekvenciák

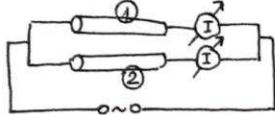


## Kényszerített csatolt rezgés:

- harmonikus gerjesztés az egypéki körben
- két rezonanciafrekvencia

## SKIN-EFFEKTUS

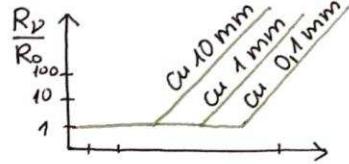
Gondolatkísérlet: Helyik nödnak nagyobb az ellenállása?



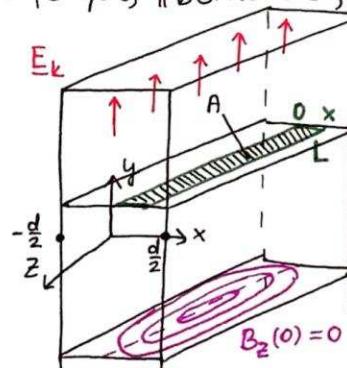
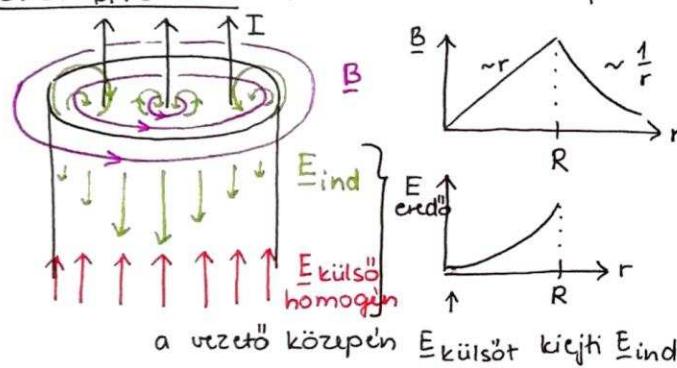
- ① tömör részről  
② üreges részről  
azonos átmérővel

$$\Rightarrow R_1 < R_2 \text{ egypáram} \\ R_1 \approx R_2 \text{ váltóáram}$$

tömör  
A nöd ellenállása nő → függvényben



Skin-effektus: az áram csak a felületen folyik, "börhatás", áramkiszorulás



A lapos vezetőre:

$$\oint_B dr = \mu I = \mu \iint_A \sigma E dA \rightarrow (B_z(x) - B_z(0)) \frac{\partial}{\partial x} = \mu \sigma \int_0^x E_y(x) dx \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial B_z(x)}{\partial x} = \mu \sigma E_y(x) \quad (1)$$

illetve:

$$\oint E_{\text{ind}} dr = - \frac{\partial}{\partial t} \iint B dA \rightarrow (E_y(0) - E_y(x)) \frac{\partial}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x B dx' \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial E_y(x)}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t} = i \omega B \quad (2)$$

Piszen  $E_k$  harmonikus:  $E_k = E_0 \cdot e^{i \omega t} \rightarrow B = B_0(x) e^{i \omega t}$

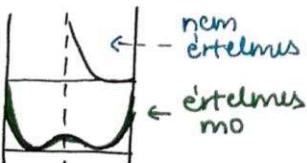
$$(2)-t \frac{\partial}{\partial x} - \text{ra}: \frac{\partial^2 E_y(x)}{\partial x^2} = i \omega \frac{\partial B}{\partial x} \xrightarrow{(1)} i \omega \mu \sigma E_y(x) \quad \text{differenciálva } E_y(x) = E_{\text{külső}} + E_{\text{ind}}$$

próbafür:  $E = A \cdot e^{i \omega x} \rightarrow \text{beleírásba: } A \lambda^2 e^{i \omega x} = i \omega \mu \sigma A \cdot e^{i \omega x} \rightarrow \lambda^2 = i \omega \mu \sigma$

$$\rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\omega \mu \sigma} \cdot \sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu \sigma}$$

Legyen  $\delta := \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$  behatolási mélység  $\Rightarrow E = A \cdot e^{\frac{x}{\delta}} e^{\frac{i \omega x}{\delta}} + B \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-\frac{i \omega x}{\delta}}$

$E$  profilja meggyezik az áram profiljával  $f = \sigma E$  miatt fizikai megoldás



$\delta$  jelentése: ahol az áram  $\frac{1}{e}$ -ad részére esik

Mivel nagyobb a frekvencia,  $\delta$  annál kisebb:

$$50 \text{ Hz } \delta \sim 8 \text{ mm}$$

$$10 \text{ kHz } \delta \sim 20 \mu\text{m}$$

$$10 \text{ GHz } \delta \sim 0,6 \mu\text{m}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

# MAXWELL- EGYENLETEK

Változó elektromos tér, eltoldsi áram, Ampère-Maxwell-törvény

kondenzátorral tartalmazó áramkör:



Hány ter van a kondenzátorlemezek között? Két felvett görbéről:

- 1:  $B_1 = 0$  az Ampère-féle gerjesztési törvény szerint, mert nem folyik át áram
- 2: vezetéken keresztül menő zárt görbe, áram miatt  $B_2 \neq 0$

DE: Tapasztalat: a lemezek között is kialakul mágneses tér  
Lemezeken változik a töltés  $\rightarrow$  változó elektromos tér van jelen  
A mágneses teret külön „eltoldsi áram bevezetése”:

$$\text{vezetőben folyó áram: } I_{\text{vez}} = \frac{dQ_{\text{vez}}}{dt} = \frac{dQ_c}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} \quad A = \epsilon \frac{dE}{dt} \quad A = I_{\text{elt}} \quad \underline{\text{eltoldsi áram}}$$

$Q_c: \text{kondenzátor töltése}$        $Q_c = \epsilon A$        $\text{kondenzátor:}$   
 $E = \frac{\Phi}{\epsilon}$

Ez a formalisan bevezetett „áram” nem töltésmozgással kapcsolatos, az  $E$  elektromos tér változásából ered.

Altalánosan: változó elektromos tér mágneses teret eredményez

$$\downarrow \quad \text{Mivel } d\Phi_E = A \cdot dE \text{ és } D = \epsilon E: \quad I_{\text{elt}} = \frac{d}{dt} \int_A D dA = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

Gerjesztési törvénybe az eltoldsi áramot írva:  $\oint_L B dr = \mu_0 \frac{d\Phi_D}{dt}$  (előjel helyes)

Altalánosan:  $\oint_L B dr = \mu_0 I_{\text{vez}} + \mu_0 \frac{d\Phi_D}{dt} + \mu_0 \oint_M H dr$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
makroszkopikus áramok       $I_{\text{elt}}$       mikroszkop. áramok



$\underline{H}$  bevezetésével:  $\oint_L H dr = I_{\text{vez}} + \frac{d\Phi_D}{dt}$  Ampère-Maxwell-törvény (integrális alak)

$$\text{Mivel } \oint_L H dr = \int_A \underline{j}_{\text{vez}} d\underline{A} + \frac{d}{dt} \int_A D d\underline{A} = \int_A \underline{j}_{\text{vez}} d\underline{A} + \int_A \left( \frac{dD}{dt} \right) d\underline{A} = \int_A \underline{j}_{\text{vez}} + \underline{j}_{\text{elt}} d\underline{A}$$

$\int_A \underline{rot} \underline{H} d\underline{A} \Rightarrow \underline{rot} \underline{H} = \underline{j}_{\text{vez}} + \frac{dD}{dt}$

minden  $A$ -ra teljesül,  
így az integrandusok megegyeznek

(differenciális alak)

Megj.:  $D = \epsilon_0 E + P \Rightarrow \underline{j}_{\text{elt}} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} + \frac{dP}{dt}$

$\underbrace{\quad}_{\text{vakuumban}}$        $\underbrace{\quad}_{\text{polarizációs áram}}$

## Maxwell - törvények - összefoglalás

### I Faraday - fele indukciótörvény

$$\oint_L \underline{E} d\underline{r} = - \frac{d\phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_A \underline{B} d\underline{A} \quad (\text{integrális}) ; \quad \text{rot } \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (\text{differenciális})$$

$\underline{B}$  fluxusának időbeli változása nemkonzervatív elektromos teret indukál.  
ha  $\underline{B}$  állandó:  $\oint_L \underline{E} d\underline{r} = 0$  elektrosztatika I alaptörvénye

### II Gauss-törvény

$$\oint_A \underline{E} d\underline{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q - \frac{1}{\epsilon_0} \oint_A \underline{P} d\underline{A} \quad \text{vagy} \quad \oint_A \underline{D} d\underline{A} = Q \quad (\text{integrális}) ; \quad \text{div } \underline{D} = \rho \quad (\text{diff.})$$

Azaz a töltések által kelteti elektromos tér forrásos.

Megj.: az elektromágneses indukció által indukált el. tér forrásmentes, örvényes, hiszen ott a töltés zehet (nem töltés kelti)

### III Ampère - Maxwell - törvény

$$\oint_L \underline{B} d\underline{r} = \mu_0 I + \mu_0 \oint_L \underline{M} d\underline{r} + \mu_0 \frac{d}{dt} \int_A (\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) d\underline{A} \quad \text{vagy} \quad \oint_L \underline{H} d\underline{r} = I + \frac{d}{dt} \int_A \underline{D} d\underline{A} \quad (\text{int.})$$

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad (\text{differenciális})$$

A mágneses indukció vonalak zárt hurokok. A törvény része hogy változó elektromos tér mágneses teret hoz létre. A mágneses tér örvényes (zárt induk. vonalak)

### IV Mágneses Gauss-törvény

$$\oint_A \underline{B} d\underline{A} = 0 \quad (\text{integrális}) ; \quad \text{div } \underline{B} = 0 \quad (\text{differenciális})$$

A mágneses erőter örvényes és forrásmentes.

Megj.: terményiségek közötti összefüggések:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$$

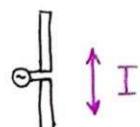
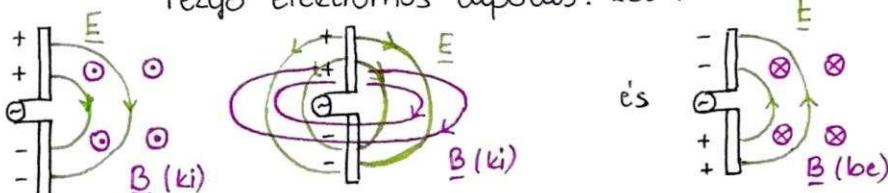
$$\text{differenciális Ohm-törvény: } \underline{j} = \sigma \underline{E}$$

## ELEKTROMÁGNESSES HULLÁMOK

Változó mágneses tér elektromos teret indukál, változó elektromos tér mágneses erőteret (ld. eltoldsi áram) hoz létre.

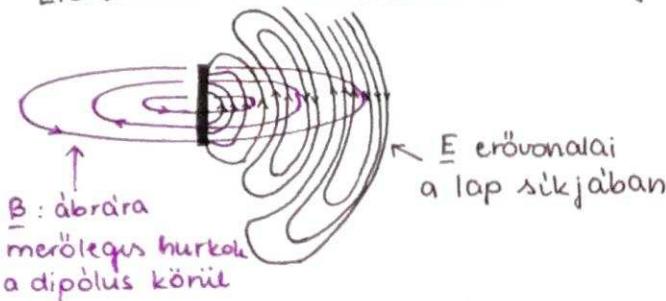
⇒ elektromágneses hullám, sugárza's jön létre  
szabad EM hullám előállítása: Hertz-dipólus

egyenes idővezetőben a tengelye mentén áram oszcillál  
rezgő elektromos dipólus: két fázisa

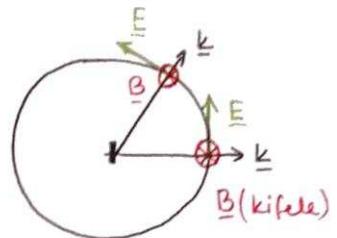


A létrejövő sugárza's a dipoltól távol is elszelhető, transzverzális hullám.

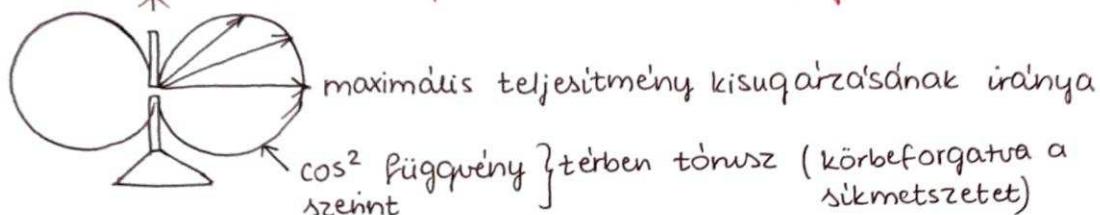
A rezgis miatti időben „leszakad” az elektromágneses tér a dipólusról.  
Elektromos tér erővonalai és a mágneses tér irányonalai: egymásba dgyazódnak



Irány - viszonyok:  $\underline{k}$ : hullámszám - vektor: terjedési irány  
 $\Rightarrow \underline{E} \perp \underline{B} \perp \underline{k}$ ;  $\underline{E} \times \underline{B}$  szorzat  $\underline{k}$  irányába mutat



Energiasűrűség az irány függvényében:  
 $\star \leftarrow$  antennával párhuzamosan nem sugároz



### Elektromágneses hullámegyenlet

A levezetést a differenciális Maxwell - egyenletekkel, vektoranalizissel végezzük.

$$\text{Emlékeztető: } \text{rot } \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \underline{D} = \rho \quad \text{div } \underline{B} = 0$$

$$\text{Vegyük } \underline{E} \text{ kétszeres rotacióját: } \text{rot } \text{rot } \underline{E} = - \text{rot} \left( \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right) = - \text{rot} \left( \frac{\partial \mu \underline{H}}{\partial t} \right) = - \mu \text{rot} \left( \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \right) = \textcircled{*}$$

I. Maxwell      lineáris       $\mu$  időben,  
anyag                anyag                téren konstans

$$\textcircled{*} = -\mu \frac{\partial^2 \underline{D}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \underline{j}}{\partial t} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

III. Maxwell       $\epsilon$  időben konstans, lineáris

Ismert összefüggés:  $\text{rot } \text{rot } \underline{E} = \text{grad } \text{div } \underline{E} - \Delta \underline{E}$

$$\Rightarrow \text{grad } \text{div } \underline{E} - \Delta \underline{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}, \text{ azaz}$$

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \text{grad } \text{div } \underline{E} + \mu \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}} \quad \text{3D hullámegyenlet}$$

Megj.:  $\frac{\partial \underline{t}}{\partial t}$ : áram időderiváltja  $\equiv$  gyorsuló töltés  $\rightarrow$  ez az EM tér formája

### I. Vákuumban v. homogen, lineáris, izotróp dielektrikumban

- nincs  $\omega$  körfrekvencián (EM hullám frekvenciáján) szabad áram  $j=0$

$$\rightarrow \mu \frac{\partial \underline{t}}{\partial t} = 0$$

- $\text{div } \underline{E} = \text{div} \left( \frac{\underline{D}}{\epsilon} \right) = \frac{1}{\epsilon} \text{div } \underline{D} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0$   
ha  $\epsilon$  téren is const      ha nincs  $\omega$ -n szabad töltés:  $\rho=0$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \underline{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{3D hullámegyenlet}$$

Megj.: a terjedési sebessége:  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

a fenti hullámegyenlet megoldása:

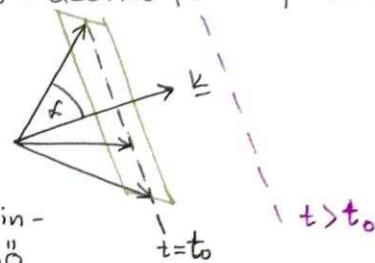
$$\text{próbafür: } \underline{E} = E_0 \cdot \cos(\underbrace{k\underline{r} - \omega t}_{\text{fázis}}) \quad \text{sikhullám}$$

A sikhullám hullámfrontjai síkok (hullámfront = azonos fázisú pontok helye a térségben)

$$k\underline{r} - \omega t = \varphi_0 \quad (\text{sík}) \rightarrow k\underline{r} = \underbrace{\omega t_0 + \varphi_0}_{\text{konstans}}$$

végtelen sík (absztrakció), mely  $\perp \underline{k}$ -ra

Adott  $t > t_0$ -ban:  $k\underline{r} = \omega t + \varphi_0 \leftarrow$  a fázis minden  $t$  pillanatban konstans, de időben nő



$$\begin{aligned} \Delta \underline{E} &= -k^2 \underline{E} \\ \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \underline{E} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} -k^2 \underline{E} + \mu \epsilon \omega^2 \underline{E} &= 0 \Leftrightarrow -k^2 + \mu \epsilon \omega^2 = 0 \\ \underline{E} &\neq 0 \end{aligned} \right.$$

$$v_f \text{ fázissebessége: } v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{c} \quad \text{törekvés mutató} \approx 1 \Rightarrow v_f < c$$

Megj.: a gömbhullám a forrástól elég messze sikhullámként kezelhető.  
Milyen  $\underline{B}$  alakja? Mi az összefüggés  $\underline{E}$  és  $\underline{B}$  között?

próbafür-ek (dlt.):  $\underline{E} = E_0 \cdot \cos(k\underline{r} - \omega t)$  és  $\underline{B} = B_0 \cdot \cos(k\underline{r} - \omega t + \varphi)$   
azaz eltérhet a fázisuk

$$\text{Faraday: } \text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \rightarrow \text{rot } \underline{E} = \nabla \times \underline{E} = \left( \frac{\partial_y E_z - \partial_z E_y}{\partial_z E_x - \partial_x E_z} \right) = -\left( \frac{k_y E_{0z} - k_z E_{0y}}{k_z E_{0x} - k_x E_{0z}} \right) \sin(k\underline{r} - \omega t) = -k \times \underline{E}_0 \sin(k\underline{r} - \omega t)$$

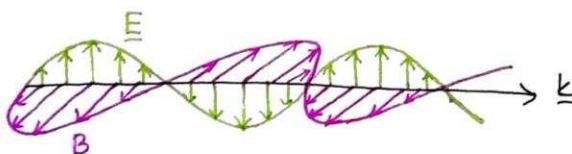
$$\rightarrow -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -(\omega B_0 \sin(k\underline{r} - \omega t + \varphi))$$

$$\Rightarrow k \times \underline{E}_0 \sin(k\underline{r} - \omega t) = \omega B_0 \sin(k\underline{r} - \omega t + \varphi)$$

amplitúdóknak, tér és időfüggéseknek meg kell egyezniük ahhoz, hogy az egyenlet teljesüljön.

Ezért  $\varphi = 0$  és  $B = \frac{k \times E}{\omega}$  pontban, t időpillanatban

Azaz  $\underline{E}$  és  $\underline{B}$  szinkronban változik, merőlegesek egymásra.



Megj.: bennük tárolódó energia lüköt, nem egymásba alakul

## II Hullámterjedés vezető közegeiben

$$\Delta \underline{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\text{grad div } \underline{E}}_{\text{homogén, lineáris}} + \mu \frac{\partial \underline{J}}{\partial t} \quad \underbrace{\text{ha nincs } \omega \text{ frekvenciai sín, akkor zérus}}$$

Vezető közegeiben: Ohm-törvény  $\underline{J} = \sigma \underline{E} \Rightarrow \Delta \underline{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$   
próbafüggvény:  $\underline{E} = E_0 \cdot \exp\{i(k\underline{r} - \omega t)\}$

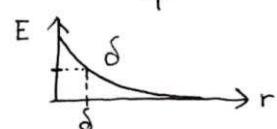
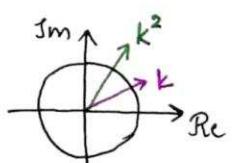
$$\text{beleígyeztetve: } -k^2 \underline{E} + \mu \epsilon \omega^2 \underline{E} = i \omega \mu \sigma \underline{E} \quad \rightarrow k^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \omega \mu \sigma$$

$$\text{azaz } \underline{k} = k_{re} + i k_{im} \in \mathbb{C}$$

Ezzel:  $\underline{E} = E_0 \cdot e^{-i \omega t} e^{-i k_{re} \underline{r}} \cdot \underbrace{e^{-k_{im} \underline{r}}}_{\text{exponenciális lecsengés}}$  közege fejezi a hullámot

$$k_{im} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\epsilon}}; \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu}} \text{ behatolási mélység} \Rightarrow \text{SKIN-EFFEKTUS}$$

$\Rightarrow$  EM hullámok átmenekülhetők pl. fémdoboz, koaxiális kábel



### III Hullámterjedeles inhomogen közegben

$$\operatorname{div} \underline{E} = \operatorname{div} \left( \frac{\underline{D}}{\varepsilon} \right) = \frac{\operatorname{div} \underline{D} \cdot \varepsilon(\underline{r}) - \underline{D} \operatorname{grad}(\varepsilon(\underline{r}))}{\varepsilon^2} = \frac{-\underline{D} \operatorname{grad}(\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

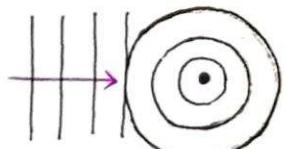
most  $\varepsilon(\underline{r})$  helyfüggés!

$\operatorname{div} \underline{D} = \underline{S} = 0$  ha nincs  
w-n rezgő szabad töltés

$$\Rightarrow \Delta \underline{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} \left( \frac{\underline{D} \cdot \operatorname{grad}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)$$

fordastagként viselkedik

Példák:



↳ vizszeppen szóródik az EM hullám.  
kék fényt jobban szórja → kék az ég

↳ vörös naplemente; köd; szivárvány

### EM hullám energiaja és impulzusa

Az EM hullám energiát és impulzust szállít.

↳ forrástól távol elektromágneses erőtér jön létre  
↳ EM hullám felületre erőt fejt ki

elektromágneses térfogati energiasűrűsége:

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \varepsilon v^2 B^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{\mu} B^2 = \varepsilon E^2 = \varepsilon E v B$$

$E = vB$        $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$       hasonlóan belátható

Mivel a terjedési irány  $\underline{E} \times \underline{B}$  irányú, terjedési irányú egységektor:  $\frac{\underline{E} \times \underline{B}}{EB}$

Az energiadáram-sűrűség:  $j_{\text{energ}} = W \cdot \underline{v} = \varepsilon E v B v \cdot \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{EB} = \varepsilon v^2 \underline{E} \times \underline{B} =$

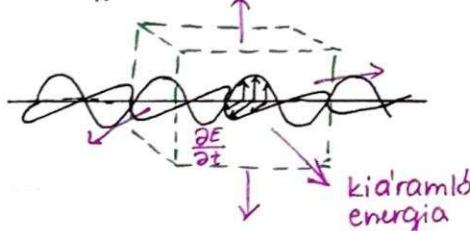
$$= \frac{1}{\mu} \underline{E} \times \underline{B} = \underline{E} \times \underline{H} \equiv \underline{S} \leftarrow \text{Poynting-vektor}$$

Azaz az EM hullám energiadáram-sűrűségét a Poynting-vektor adja meg.

Adott felületen átáramló teljesítmény:

$$\frac{dE_{\text{EM}}}{dt} = \int_S dA = \int_A \underline{E} \times \underline{H} dA, \quad \text{ahol } E_{\text{EM}} \text{ az elektromágneses térfogati energiája}$$

Megj.:



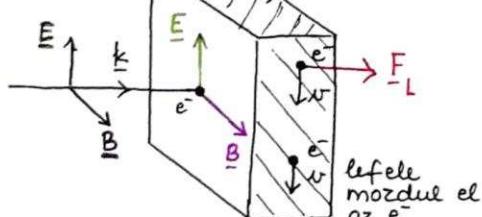
$$\frac{\partial}{\partial t} (W_d + W_{\text{mdgn}}) = -\operatorname{div} \underline{S} - j \underline{E}$$

nem zárt rendszerek!

$W$ : 2  $\omega$ -val oszcillál, teriben és időben változik

EM hullám egy felületre érkezve erőt fejt ki.

job vezető ( $\sigma$  vezetőképességgel): elnyeli az EM hullámokat



A vezetőbeli elektron  $\underline{E}$  hatására  $v$  sebességgel kezd el mozogni. A  $v$  sebességgel  $\underline{B}$  -re  $\underline{B}$  által Lorentz - erő hat:  $F_L = q v \underline{B}$  →  $F_L$  irányába andó

Most elektronra:  $q = e$ : elektron töltése

Tf. teljesül az Ohm-törvény:  $j = \sigma E$

↳ azaz az  $e^-$ -k fázisban maradnak  $E$ -vel, az áram elhanyagolható fázis-kezeléssel rezeg  $E$ -hez (EM hullámhoz) képest

↳ ennek feltétele:  $\omega \ll \omega_{\text{plazma}}$

$\omega_{\text{plazma}}$  könül / felett a fém megszűnik vezető lenni, az  $e^-$ -k nagyon lemaradnak, nem tudják követni  $E$  változását. „fémek UV átlátszósága”

JH  $\sigma = \frac{e^2 n}{k}$ , ahol  $e$  az  $e^-$  töltése,  $n$  a sűrűsége és  $k$  a közegellenállás (mozgékonyiségi:  $\mu = \frac{e}{k}$ )

És  $j = e n \omega$ .

$$\text{így } j = \sigma E \Leftrightarrow e n \omega = \frac{e^2 n}{k} E \rightarrow \omega = \frac{e}{k} E_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Ezt behelyettesítjük a Lorentz-erő képletebe:

$$F_L = e \cdot \omega \times B = e \cdot \left( \frac{e}{k} E_0 \sin(\omega t) \times B_0 \sin(\omega t) \right) = \frac{e^2}{k} \sin^2(\omega t) E_0 \times B_0$$

$$|F_L| = \frac{e^2}{k} E_0 B_0 \sin^2(\omega t) = \frac{e^2}{k} \frac{E_0^2}{c} \sin^2(\omega t) = \frac{F_e \cdot \omega}{c}, \text{ ahol } F_e = e \cdot E \text{ elektromos erő}$$

$$B = \frac{k \times E}{\omega} \rightarrow |B| = B = \frac{k}{\omega} E = \frac{E}{c}, \text{ ahol } k \text{ a hullámszám-vektor!}$$

Az itt bevezetett  $F_e \cdot \omega$  szorzat az EM hullám pikkuratni teljesítménye, azaz az egységes idő alatti vélezett munka az  $e^-$  mozgatása során.

$$\text{Így } |F_L| = F_L = \frac{P}{c} = \frac{dE_{\text{EM}}}{dt} \cdot \frac{1}{c} \text{ ahol } P: \text{teljesítmény}$$

$E_{\text{EM}}: \text{EM térfelület energia}$

$F_L$  az egy elektronra ható erő. A teljes felületet ható erő erő:  $\sum F_L = N_e \cdot F_L$ , ahol  $N_e$ : az  $e^-$ -k dbszáma.

Ezzel kifejezhetjük a felületet ható erő nyomását a rá ható erő és a felület hárnyadosával:

$$p = \frac{\sum F_L}{A} = \frac{N_e}{A} F_L = \underbrace{\frac{N_e}{A} \frac{dE_{\text{EM}}}{dt} \cdot \frac{1}{c}}_{\substack{\text{fénynyoma's} \\ \uparrow \\ \text{idő átlaga}}} \cdot \frac{\langle |S| \rangle}{c} \quad \text{azaz} \quad \boxed{p = \frac{\langle |S| \rangle}{c}}$$

$\text{Poynting-vektor}$

Megj.  $\langle |S| \rangle$ :  $S$  idő átlaga, ez a méhető mennyisége, hiszen  $S$  gyorsan,  $2\pi$ -val oszcillál!

Most tekintsük Newton II törvényét:

$$\frac{dp}{dt} = \sum F, \text{ ahol } p \text{ az impulzus.} !$$

Mivel ismerjük  $\sum F$ -et, kifejezhetjük az impulzust:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \left| \sum F \right| = p \cdot A = \frac{\langle |S| \rangle}{c} \cdot A = \frac{dE_{\text{EM}}}{dt} \cdot \frac{1}{c} \rightarrow \boxed{|p| = E_{\text{EM}} \cdot \frac{1}{c}}$$

$\uparrow$   
nyomás

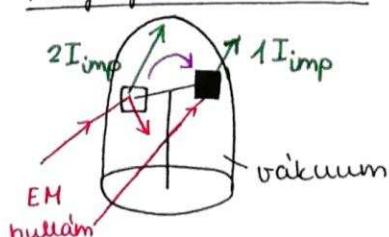
$\uparrow$   
impulzus  
nagyssza

Relativitáselméletből:

$$E = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \text{ ahol } E \text{ az energia, } m_0 \text{ a nyugalmi tömeg, } p \text{ az impulzus}$$

$\text{EM hullámra } m_0 = 0 \Rightarrow E = c \cdot p \text{ azaz } p = \frac{E}{c}$

Fénynyoma's kísérlet:

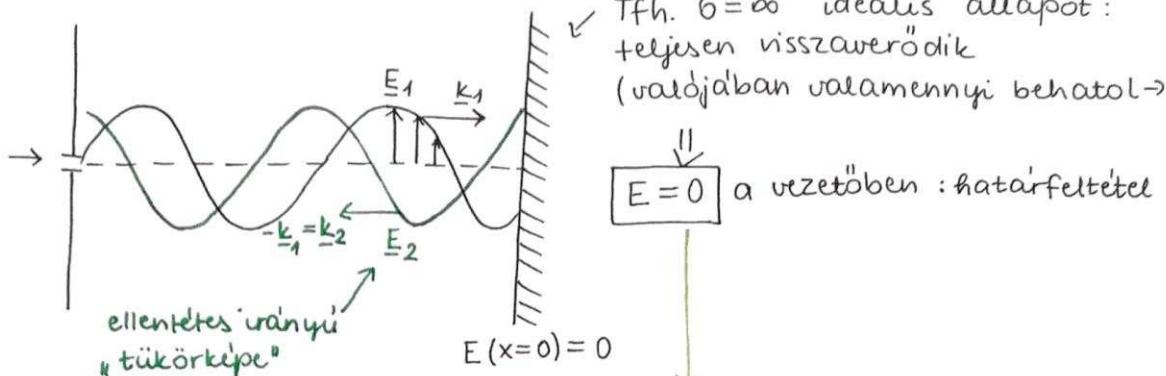


a fehér lapkáról EM visszaverődik  
impulzusváltás  $2 I_{\text{imp}}$   
a feketén elnyelődik  $\Rightarrow$  impulzus vált.:  $1 I_{\text{imp}}$

} megfelelő irányba forog

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{eurg}} &= \sim 10^5 \text{ Pa} \\ P_{\text{EM}} &= \sim 10^{-6} \text{ Pa} \end{aligned} \right\} 12 \text{ nagyságrend különbség, csak tiszta vákuumban látható a jelenség}$$

## EM áltóhullám



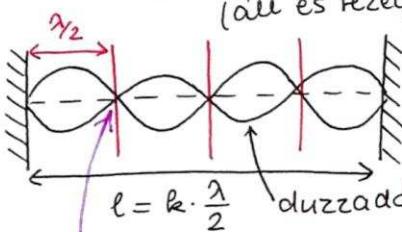
Az eredő hullám:  $E = E_1 + E_2 \rightarrow$  A megoldandó egyenlet:  $E_1(x=0) + E_2(x=0) = 0$   
 Mivel  $E_1 = E_{01} e^{i(kx-wt)}$   
 $E_2 = E_{02} e^{i(-kx-wt)}$   $\Rightarrow$   $x=0$ -ban:  $E_{01} e^{-iwt} + E_{02} e^{-iwt} = 0$

$$E_{01} = -E_{02}$$

Tetsz.  $x$  pontban az eredő:

$$E_1 + E_2 = E_0 (e^{ikx} - e^{-ikx}) e^{-iwt} = 2E_0 i \sin(kx) e^{-iwt}$$

Megj.: kétszeres amplitúddal, térfüggés és időfüggés szétválik  $\rightarrow$  áltóhullám  
 (áll és rezeg)



2 falfelület  $\Rightarrow$  2 db határfeltétel

Említ bonyos frekvenciák rezeghetnek, bonyosak nem.

$$l = k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

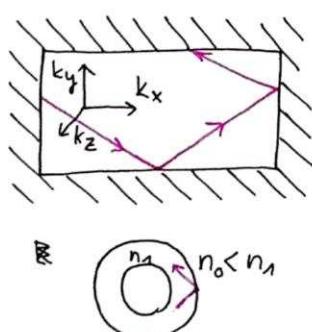
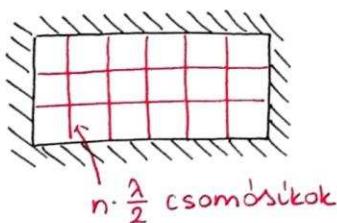
duzzadóhely (maximális amplitúddal)

$$\text{csomópontok helye: } k \cdot x = n\pi \rightarrow x_0 = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi} \lambda = \frac{n\lambda}{2}$$

Alkalmazás: üregrezonátor lézereknel

lézer: rezonátor + fényerősítő közeg

### Hullámvezetők:



z irányban végtelen csösszenű

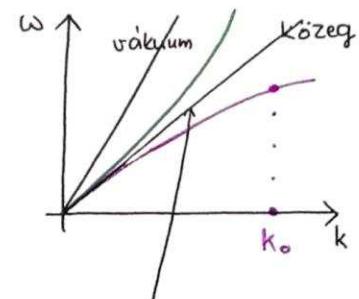
Visszaverődéskor kis veszteség  
 (skin-effektus, Joule-hő)

üvegszál - köverzető:  
 közel veszteségmentesen vezethető az EM hullám

3D lizárt doboz: üregrezonátor  $\rightarrow$  pl. mikrohullámú sütőnél is

# DISZPERZIÓ

Diszperziós reláció:  $\omega(k)$  függés  $\rightarrow \frac{\omega}{k} = v_f$  fázissebesseg



$$\text{közegben: } \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

- vakuumban:  $\frac{\omega}{k} = v_f = c$ , ahol  $c = \text{fénysabesség}$

- $\frac{\omega_0}{k_0} < \frac{c}{n}$  normális diszperziójú anyagok:  
k növelésével  $v_f$  fázissebesseg csökken

- $\frac{\omega}{k} > \frac{c}{n}$  anomális diszperziójú anyagok:

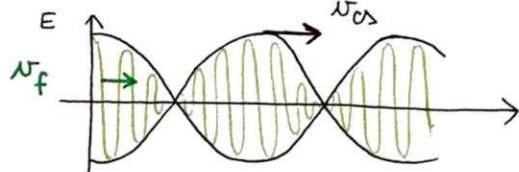
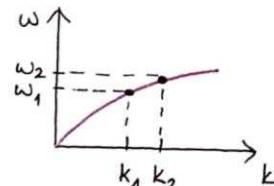
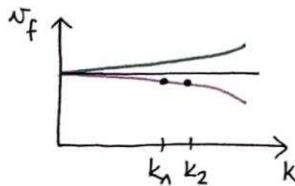
k növelésével  $v_f$  nő, azaz a hosszú hullám-hosszak lassabbak

Két hullám különböző frekvenciával, ha  $\omega_1$  és  $\omega_2$  egymáshoz közeli

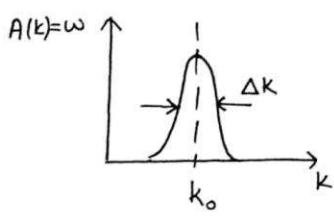
$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_0 \left( e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \right) = \\ &= E_0 \cdot e^{i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)} \cdot \left\{ e^{i\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)} + e^{-i\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)} \right\} = \\ &= E_0 \underbrace{e^{i\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}}_{\text{haladó hullám}} \cdot \underbrace{2 \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}_{\text{amplitúdó-moduláció}} \Rightarrow \text{LEBEGÉS alakú ki} \end{aligned}$$

$$\text{fázisseb: } v_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$$

$$\text{burkoló terjedési seb.} \equiv \text{csoportsebesseg: } v_{cs} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

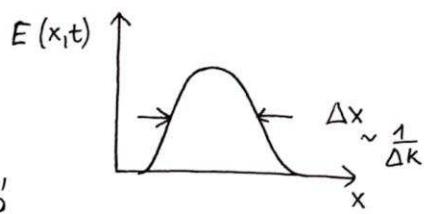


Véges hullámszám-spektrummal:



Gauss-görbe

IFT  
inverz Fourier,  
transzformáció



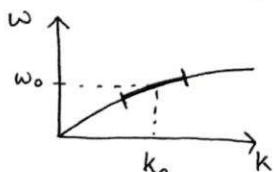
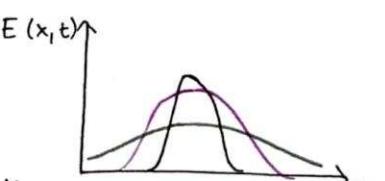
Minél keskenyebb frekvenciateriben, annál szélesebb lesz a (valós) térfelületen: "széthúzódik"

Az impulrus haladáskor kiszélesedik, ellaposodik.

Példák: mennydörgés  
távközlés

↳ minél rövidebb az impulrus, annál jobban elszélesedik

↳ ha nagyobb szélességet akarunk optikai számban vezetni, jobban elkenődik a jól

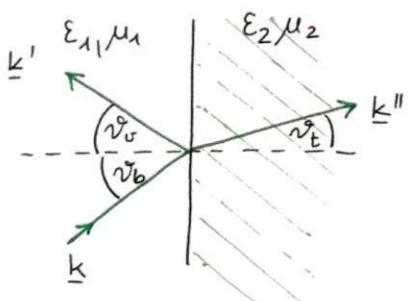


sorbafejtve:  $\omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k_0} (k - k_0) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0} (k - k_0)^2 + \dots$

## Fénytörés két közeg határán

Hullámfüggvények:  $E(x,t) = E_0 \sin(\omega t - k_r r + \varphi)$   
 $B(x,t) = B_0 \sin(\omega t - k_r r + \varphi)$

$E, B, k$  jobbsodrású rendszer alkot



beeső:  $E_0 \cos(\omega t - k_r r)$   
 visszavert:  $E'_0 \cos(\omega t - k'_r r)$   
 áthaladó:  $E''_0 \cos(\omega t - k''_r r)$

Határfelületre érvényes peremfeltételek:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad H_{1t} = H_{2t} \quad \text{transzverzális komponense}$$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad \text{normális komponense}$$

A határfeltételek csak akkor teljesülnek, ha a három hullám fazisa a határon megegyezik:

$$\omega t - k_r r = \omega t - k''_r r = \omega t - k'_r r$$

$$k_r = k'_r = k''_r$$

$\Rightarrow$  határfelületen  $r$  pontjaira teljesül, ha  $k, k', k''$  egy síkban vannak hullámszámok felületre vett vetülete megegyezik:

$$k \sin \theta_b = k' \sin \theta_r = k'' \sin \theta_t$$

$$k = k' \Rightarrow \boxed{\theta_b = \theta_r} \quad \text{beesési, visszaverődési szög egyenlősége}$$

Törleske:

$$\frac{\sin \theta_b}{\sin \theta_t} = \frac{k''}{k} = \frac{n_1}{n_2} = n_{21} \quad \text{azaz} \quad \boxed{\frac{\sin \theta_b}{\sin \theta_t} = n_{21}}$$

↑  
1. és 2. közegbeli  
terjedési sebessége

$n_{21}$ : 2. közegre az 1. közegre vonatkozó relatív törlesmutatója,

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \boxed{\sin \theta_b \cdot n_1 = \sin \theta_t \cdot n_2} \quad \begin{matrix} n_1, n_2: \text{abszolút törlesmutató} \\ \leftarrow \text{törleski törény} \end{matrix}$$

$$n = \frac{c}{\lambda}$$

### Teljes visszaverődés

2. közeg optikailag sűrűbb  $\Rightarrow n_2 > n_1$ , illetve  $n_2 < n_1$

Ekkor  $\theta_t > \theta_b$

$\theta_b$  beesési szöget növelve elérhetünk oda, hogy  $\theta_{t,krit} = 90^\circ$ , azaz nincs áthaladó fény.  $\theta_b$ -t növelve a sugar teljes visszaverődést szinved.

$$\frac{\sin \theta_{b,krit}}{\sin \theta_{t,krit}} = \frac{\sin \theta_{b,krit}}{\sin 90^\circ} = n_{21} \Rightarrow \boxed{\sin \theta_{b,krit} = n_{21}}, \text{ ahol } n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

# A SPECIA'LIS RELATIVITÁ'S SELMELET ALAPJAI

## A relativitá's elve

Mi az összefüggés egymáshoz képest mozgó rendszerek fizikai mennyiségei, tövényei között?

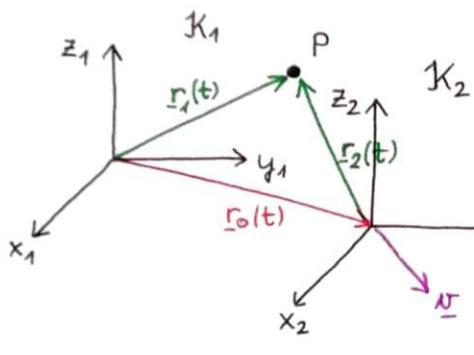
Testek leírásához vonatkoztatási rendszer, koordinátarendszer szükséges.

Inciarirendszer: amelyben érvényesek a Newton-tövények  
egymáshoz képest állandó sebességgel mozognak

### Galili - transzformáció (GT)

Galili-féle relativitá'si elv: különböző inciarendszerekben a mechanika tövényi azonos matematikai alakban érvényesek, az inciar.-ek egyenértékűek, nincs kitüntetett rendszer.

koordináta-transzformáció:



$K_1, K_2$ : inciarendszerek,  $K_2$   $v$  sebességgel halad  $K_1$ -hez képest.  
Adott  $P$  pont helyvektorai közötti összefüggés:

$$r_2(t) = r_1(t) - v \cdot t - r_0$$

spec. választás:

$$\text{Azaz } x_2 = x_1 - v_x t - x_0 \quad x_2 = x_1 - vt$$

$$y_2 = y_1 - v_y t - y_0 \quad y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1 - v_z t - z_0 \quad z_2 = z_1$$

$$t_2 = t_1$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} K_1 \\ \rightarrow x_1 \end{array}}_{K_1} \quad \underbrace{\begin{array}{c} K_2 \\ \rightarrow x_2 \end{array}}_{K_2}$$

$$\frac{dr_2}{dt_2} = \frac{dr_1}{dt_1} - v \rightarrow v_2 = v_1 - v$$

$$\frac{d^2r_2}{dt_2^2} = \frac{d^2r_1}{dt_1^2} \rightarrow a_2 = a_1 = \frac{F}{m} \Rightarrow \text{Azaz a Newton II tr. invariáns GT-ra}$$

A mechanika tr-ei invariánsak GT-ra

Hanghullám terjedése:

közegbeli terj. seb:  $v_1$

előre haladó hullám sebessége:  $v_2'$ ; hátra:  $v_2''$

$$v_2'' = v_1 + v$$

$$v_2' = v_1 - v$$

$$v = \frac{v'' - v'}{2} \Rightarrow \text{a kocsi sebessége meghatározható}$$

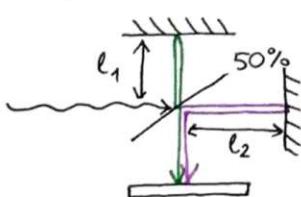
ÉTER: "EM hullám terjedési közege"

a fény terjedését a mechanikai hullámok terjedése szerint értelmeztek

Elmélletileg: Föld mozgási sebessége kímérhető az éterhez képest, ha a Földön két különböző irányban megmérjük a fénysebességet  $\rightarrow c+v$  e's  $c-v$  kapunk



Hicholson - Morley kísérlet 1887 interferometer



a két nyaldb interferenciaképe a terjedési sebességtől függ.  
A feltételezés alapján elforgatva a berendezést változnak a terjedési sebességek  $\rightarrow$  más lesz az interferenciakép

TAPASZTALAT: nincs változás

a fénysebesség  $\neq$  inciarendszben ugyanakkora!

$\Rightarrow$  a fényterjedelem, a Maxwell-egyenletek nem invariánsak GT-ra!

Opciók: ① Nem igaz a relativitás elve (más formajú)

② Maxwell-egyenletek hibásak

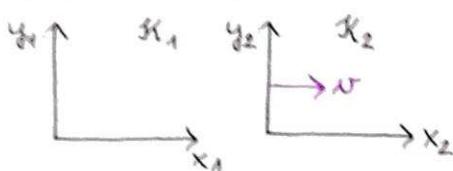
③ Newton-törvények rosszak

Tudósok szerint: Lorentz: ① 1904  $\rightarrow$  Lorentz-transzformáció

Poincaré: ② 1904

Einstein: ③ 1905

### Lorentz-transzformáció (LT)



$K_2$   $v$  sebességgel halad  $K_1$ -hez képest

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$t_2 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

#### Tulajdonságok

I. az idő is transzformálódik

II.  $v \ll c$  határesetben GT-t kapjuk vissza

III.  $v \geq c$  értelmezhetetlen, c a hatarsebesség

IV. A mechanika törvényei nem invariánsak LT-ra

### Einstein posztulátumai

posztulátum = munkahipotézis,  $\neq$  axióma

① minden fizikai rendszerenél érvényes a relativitás elve, azaz a fizikai törvények inerciarendszerben azonos ~~szabályai~~ matematikai alakuik

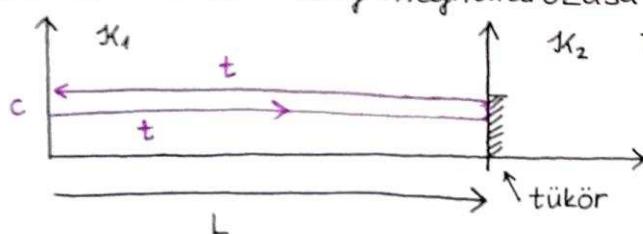
② A vákuumban terjedő EM hullám - fény - sebessége  $\neq$  inerciarendszerben azonos, univerzális állandó: c

Ezeken alapul a speciális relativitáselmélet

spec. rendszerekre: inerciarendszerrel vonatkozik

### Relativisztikus mechanika

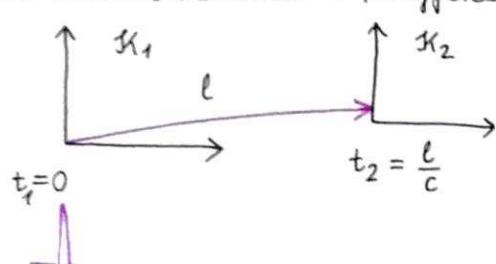
Koordináta-mérés - hely meghatározása  $\rightarrow$  fényjelek méréseivel



Teljes utat a fényjel t idő alatt teszi meg (oda-vissza)

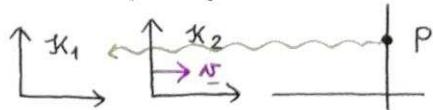
$L = \frac{1}{2} c \cdot t \leftarrow$  visszaverődelel helyének koordinátaja

Órák szinkronizálása  $\rightarrow$  fényjellekkel



a két rendszer távolsága: l (ismert)  
t=0-ban rövid fényjelöt bocsátunk ki, megérkezéskor az időt  $t_2 = \frac{l}{c}$  -re kell beállítani

## Az egycidejűség relativ - koordinátarendszer-függő



$t=0$ -ban  $x_1 = x_2$  (közös origó)  $\rightarrow$  közös origóból fényjele indítása.

P esemény különböző időpillanatban történt  $K_1$ -ben és  $K_2$ -ben mezejé:

$$t_1 = \frac{x_1}{c}, \quad t_2 = \frac{x_2}{c}$$

### Idődilatáció

Két esemény között eltelt időt vizsgáljuk különböző inerciarendszerekből.

I. esemény: lámpa felkapcsolódik

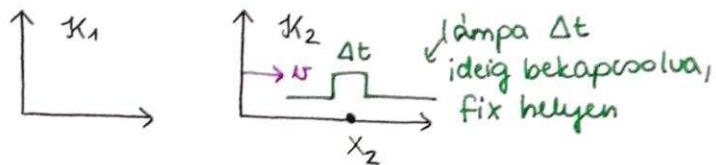
II. " " : lámpa lekapcsolódik

A lámpa  $K_2$ -ben fix helyen van:  $x_2$

$$\Rightarrow x_2^{\text{II}} = x_2^{\text{I}} = x_2$$

Felkapcsolás  $K_2$ -ben:  $t_2^{\text{I}}$ ;  $K_1$ -ben:  $t_1^{\text{I}}$

Lekapcsolás  $K_2$ -ben:  $t_2^{\text{II}}$ ;  $K_1$ -ben:  $t_1^{\text{II}}$



Két esemény között eltelt idő  $K_2$ -ben:  $\Delta t_2 = t_2^{\text{II}} - t_2^{\text{I}}$

$K_1$ -ben:  $\Delta t_1 = t_1^{\text{II}} - t_1^{\text{I}}$

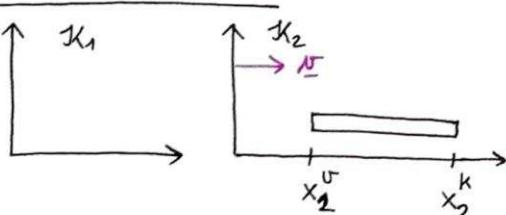
$$\left. \begin{array}{l} \text{Lorentz-trafó: } t_1^{\text{I}} = \frac{t_2^{\text{I}} - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \qquad \qquad \qquad t_1^{\text{II}} = \frac{t_2^{\text{II}} - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\} \Delta t_1 = \frac{t_2^{\text{II}} - t_2^{\text{I}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$T_0$ : nyugvó megfigyelő által mérő  
 $T$ : mozgó — " —

Az eseményhez képest mozgó ( $K_1$ -beli) megfigyelő az eltelt időt hosszabbnak találja, mint az eseményhez képest nyugvó ( $K_2$ -beli) megfigyelő.

Mindig a mozgási időtartam a hosszabb

### Lorentz-kontraktió



nid:  $K_2$ -ben nyugszik

$x_2^k$ : kezdőpont

$x_2^v$ : végpont

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v$$

$K_1$ -ben a hosszát hasonlóan kapjuk:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lorentz-trafó: } x_2^k = \frac{x_1^k - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \qquad \qquad \qquad x_2^v = \frac{x_1^v - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\}$$

$\Delta x_1 = x_1^k - x_1^v \rightarrow t_1^k = t_1^v$  egycidejűleg kell leolvashni

$$\Delta x_2 = x_2^k - x_2^v = \frac{x_1^k - x_1^v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$L_0$ : nyugalmi hossz: nyugvó megfigyelő ( $K_2$ ) által mérő

$L$ : mozgási hossz: mozgó ( $K_1$ ) — " —

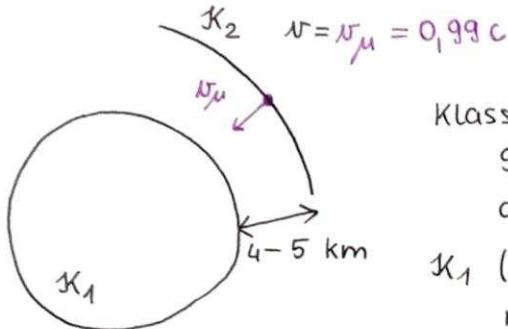
$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Rúdhoz képest mozgó megfigyelő méri a rövidebbet

## Müönök élettartama

$\mu$ -mezonok: müönök

atmoszferában (4-5 km) magasan keltkernel,  $v \approx c$ , instabilak  
nyugvó müönök élettartama (laborban)  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  s



Klasszikusan:

$s_{\text{kl.}} = \tau_0 \cdot v = 660 \text{ m}$  → csak ennyi utat tesz meg  
de mégis detektálunk müönöket 4-5 km mélyen is.

$K_1$  (Földi), müön hoz képest mozgó rendszerben:

$$\text{mozgási élettartam: } \gamma = \frac{\tau_0}{\text{Föld} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 15,6 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$s_{\text{Föld}} = v \cdot \tau = 4,68 \text{ km}$$

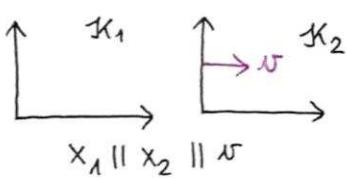
$K_2$  müönhoz rögzített = nyugvó rendszerben:

$\tau_0$  nyugalmi élettartam

$$s_\mu = \tau_0 \cdot v = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 0,99c = 660 \text{ m}$$

$$\text{de a befutandó út is: } s_\mu = s_{\text{Föld}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 660 \text{ m}$$

## Sebességtranszformáció



Adott pont sebessége  $K_2$ -ben:

$$v_{2x} = \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{\cancel{dx}_2 / \cancel{dt}_2}{\cancel{dt}_2 + \cancel{v} dt_1} = \frac{\cancel{dx}_2 / \cancel{dt}_2}{\cancel{dt}_2 + \cancel{v} \frac{\cancel{dx}_2}{c^2} / \cancel{dt}_2} = \frac{\cancel{dx}_2 / \cancel{dt}_2}{1 + \frac{v}{c^2} \cancel{dx}_2 / \cancel{dt}_2} = \frac{v_{1x} - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_{1x}}$$

$$\cancel{K} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Többi komponens:

$$v_{2y} = \frac{v_{1y}}{\cancel{K} \left( 1 - \frac{v}{c^2} v_{1x} \right)}$$

$$v_{2z} = \frac{v_{1z}}{\cancel{K} \left( 1 - \frac{v}{c^2} v_{1x} \right)}$$

Fénysebesség hogyan transzformálódik? Azaz  $v_{1x} = c$ :  $v_{2x} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c$

## Négydimenziós teridő

1 esemény megadása:  $\underbrace{(ct, x, y, z)}$  esemény koordinátái

négyesvektor  $\equiv$  Lorentz-trafóval transzformálódik

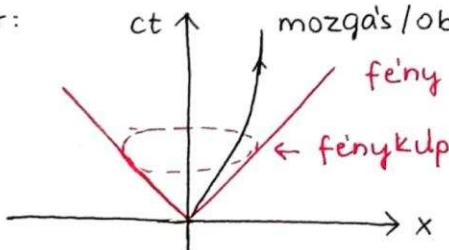
3D-ben hossz:  $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$  invariáns, nem függ a koordinátarendszer-választástól

4D: négyes áltapvektor hossza: négyes távolság négyzetet:

$$\Delta s^2 := (c \Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \text{ invariáns LT-vel mindenben: } \Delta s_1^2 = \Delta s_2^2$$

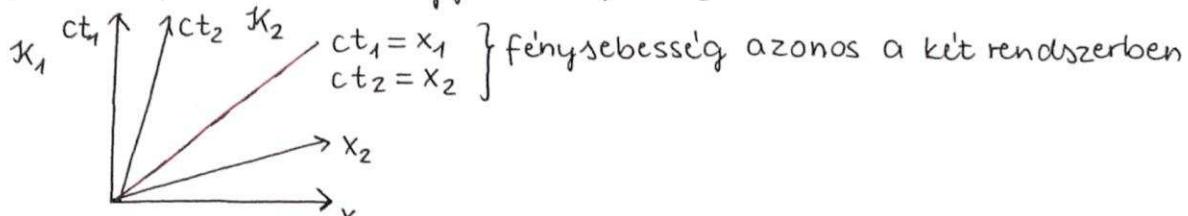
négyester:  $ct \uparrow$  mozgás/objektum világvonala

fény világvonala:  $ct = x$  (45°-os egyenes)

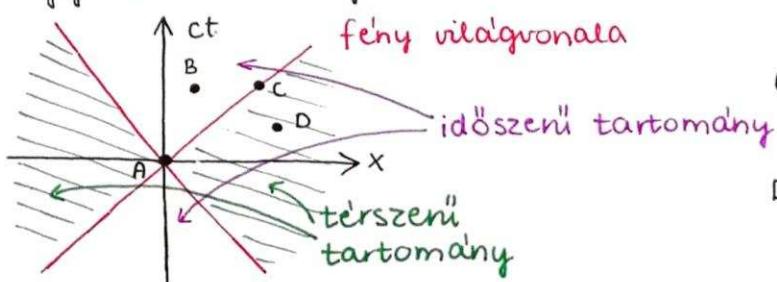


A'llandó sebességgel mozgó tömegpont világronala egyenes.

$K_1$ -hez képest u sebességgel mozgó  $K_2$  rendszer:



Négyzetű tartományai:



B: időszemű eseményre:

$$\Delta S_{AB}^2 > 0$$

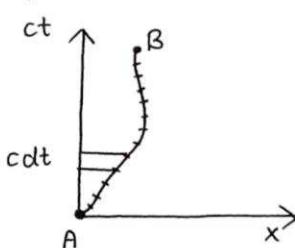
C: fényszemű eseményre:

$$\Delta S_{AC}^2 = 0$$

D: térszemű eseményre:

$$\Delta S_{AD}^2 < 0$$

Sajátidő



mozgó tömegpont ≠ más rendszereben van nyugalomban elemi sajátidő:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2_{\text{pill}}}{c^2}}$$

ez is invariant LT-re

$$\text{makroszkopikus sajátidő: } \tau = \int_A^B \sqrt{1 - \frac{v^2_{\text{pill}}}{c^2}} dt$$

### Relativisztikus dinamika

Ha  $m_0$  a tömegpont nyugalmi tömege,  $d\tau$  a sajátideje, akkor az  $\frac{m_0}{d\tau}$  -vel beszorozott

$$\frac{m_0}{d\tau} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2_{\text{pill}}}{c^2}}} \begin{pmatrix} m_0 c \\ m_0 v_x \\ m_0 v_y \\ m_0 v_z \end{pmatrix} \leftarrow v_{\text{pill}} \ll c : \text{klasszikus impulzusvektor}$$

relativisztikus impulzus:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Relativisztikus tömegnövekedés:  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  tömegpont tömegét nagyobban érzékeljük, ha mozog hozzáink képest

Relativisztikus mozgásegyenlet:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad v \ll c: F = m_0 a$$

határeset

A'llandó F erővel gyorsított tömegpont: ( $v(t=0)=0$ )

$$\text{klasszikusan: } v(t) = \frac{F}{m_0} t \quad \text{bármekkora sebességet elérhet}$$

$$\text{relativisztikusan: } \int_0^t F dt' = F \cdot t = \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow v(t) = \frac{c}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{F^2 t^2} + 1}} \quad \frac{t}{\infty} \rightarrow c$$

c-hoz tart!

## Tömeg-energia összefüggés

munkatétel:  $W_{12} = \int_1^2 F_e dr = \Delta E_m = \Delta E$  teljes energia  
 mozgási energia nincs helyzeti energia (klasszikus)

Relativisztikus esetben:

$$W_{12} = \int_1^2 F dr = \int_1^2 \frac{dp}{dt} dr = \int_1^2 \frac{v}{c} dp = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_2^2} - c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_1^2} = \Delta E,$$

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow v(p) = \frac{cp}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}$$

Amiből az energia:

$$E(p) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \sqrt{\frac{m_0^2 c^2 - m_0^2 v^2 + m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \cdot c^2 \text{ tömegpont energiája}$$

Tömegpontron végezett munka:  $W_{12} = \Delta E = m_2 c^2 - m_1 c^2 = c^2 \Delta m$

$\Rightarrow$  tömeg-energia-ekuivalencia

az energia és a tömeg változása egymással arányos

Energia-impulns négyesvektor:

$$\begin{pmatrix} mc \\ m v_x \\ m v_y \\ m v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \rightarrow \text{hossza: } \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \text{ invariáns a Lorentz-transzformációra}$$

$$\frac{1}{\hbar} \left( \frac{E}{\hbar c}, \frac{p}{\hbar} \right) = \left( \frac{\omega}{c}, \underline{k} \right) \leftarrow \begin{matrix} \text{körfrekencia - hullámszám} \\ (\omega) \quad (\underline{k}) \end{matrix} \text{ négyesvektor}$$

ld. QM  $E = \hbar \nu = \hbar \omega$  Azaz ez is a Lorentz-trafóval transzformálódik  
 $p = \hbar \underline{k}$

$(\frac{\omega}{c}, \underline{k})$  vektort skalárisan szorozza az elmozdulás négyesvektorral:

$$\left( \frac{\omega}{c}, \underline{k} \right) \cdot \left( ct, \underline{r} \right) = wt - \underline{k} \underline{r} \text{ invariáns skálárít kapunk, ami az EM hullám frekvenciával egyenlő (ld. } e^{i(wt - \underline{k} \underline{r})})$$

Invariáns skálár: minden koordinátarendszerben ugyanolyan

$$wt - k_x x = w't' - k'_x x' \quad \forall t', x' - \text{re}$$

$$\frac{w \cdot (t' + \frac{v}{c^2} x')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{k_x (x' + vt')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = w't' - k'_x x'$$

$$\underbrace{\frac{w - k_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t'}_{\text{green circle}} - \underbrace{\frac{(k_x - w \frac{v}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x'}_{\text{green circle}} = \underbrace{w't'}_{\text{green circle}} - \underbrace{k'_x x'}_{\text{green circle}}$$

Mivel  $\omega = ck_x$

$$\text{Azaz } \omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{EM hullámok Doppler-effektusa}$$

$$k' = k \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A Doppler-effektus EM hullámokra tehát levezethető az  $\omega_t - \frac{v}{c}$  invariáns mennyiséggel használataval.

$$\omega' = \omega \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

→ a frekvenciára

$$f' = f \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = v_o - v_s$$

↑                   ↑  
observer          source

$$\text{Ha } v \ll c: f' = f \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Azaz a forrástól távolodó megfigyelő kisebb frekvenciát és nagyobb hullámhosszt ( $\lambda$ ),  
 $(v > 0)$

a forrásnak közelítő megfigyelő ( $v < 0$ ) nagyobb frekvenciát és kisebb hullámhosszt érzékel.

Példa: Vörös eltolódás: messzi galaxisok fényének színkípontjai a nagyobb hullámhosszak felé tolódik el. (vörös felé)

Megj.: akusztikus hullámoknál:

$$\downarrow \quad \omega' = \omega \cdot \frac{v_f \pm v_o}{v_f \pm v_s} \quad \begin{matrix} o: \text{observer}, s: \text{source} \\ v_f: \text{fázissebesség (közeghez képest)} \end{matrix}$$

A'l: kis sebességekre a két leírásmód ugyanazt adja.