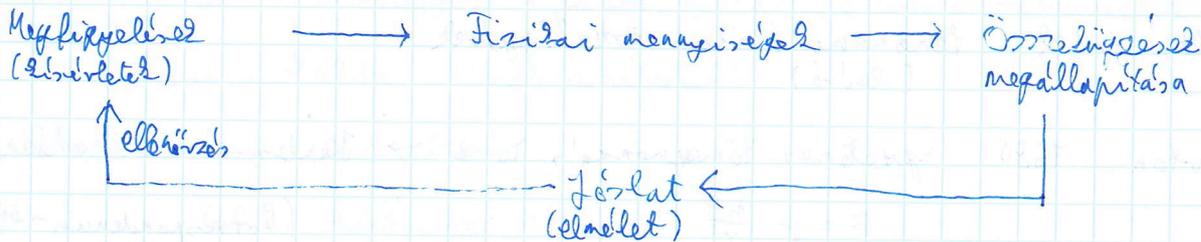


### A tudományos megismerés folyamata



- Paradigmaváltás (Thomas Kuhn)

nagy ugrás az elméletben (revolúció)

- Korrespondencia-elv: új elmélet tartalmazza a régit

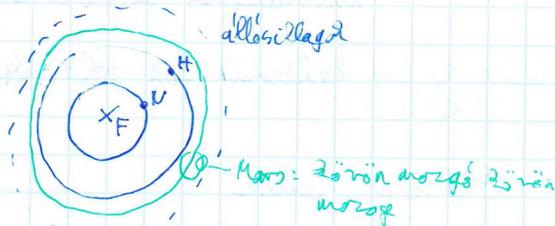
Példa: Tömegvonzás  $tv = e$

Megfigyelés: Nap, Hold → Fizikai megismerés: nap, hó, év, stb

Bolygó retrográd mozgás (5 bolygó)

Elmélet: Ptolemaiosz (Kr. e. 4. sz.)

geocentrikus világkép



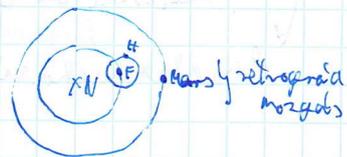
Galilei 1610: távcső → jobb megfigyelés

Jupiter holdjai (mini Naprendszer)

Vénusz fázisváltása

Kopernikuszi forradalom ~ 1610

Heliocentrikus világkép ↔ paradigmaváltás



Tycho Brahe 1580-1605

Napkor pontos észlelmények → Mars nem pontosan a körön mozog



↳ Mars mozgásán görög körök a Nap körül

Kepler 1609-1616, Brahe segédje

paradigmaváltás → helyes elliptikus pályák mozgás, egyik fókuszban a Nap

Szerepe: Marsnak nagy az ellipticitása

Kepler tör-el: fenomenológikus ömefüggetlenség (leírás)

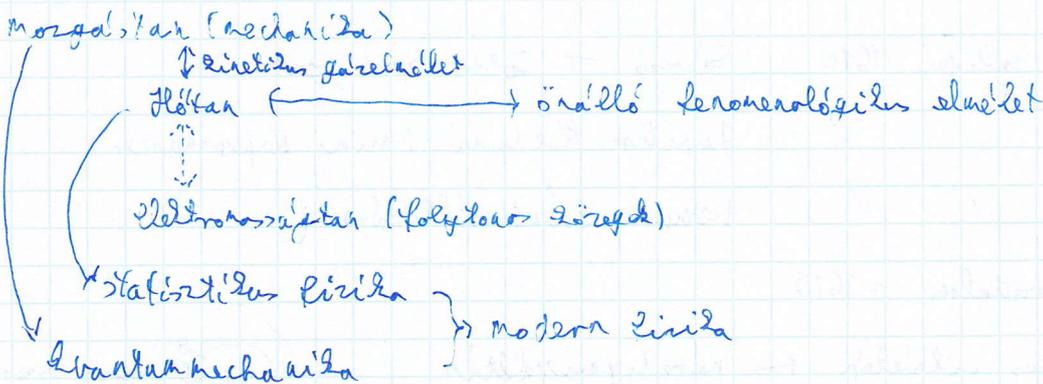
Newton 1680 Egyetemes tömegvonzás tör-e → Kepler tör-el adódna

$$F = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \quad (\text{Korrespondencia-elv})$$

## Hőtan / termodinamika

- Miért?
- fizika fejlődés történetében fontos (pl. energiamegmaradás)
  - modern fizikai gondolatok (pl. hőfokskála ↔ konzervatív erőterek)
  - hétköznapi életben fontos
  - kísérleti fizika módszertani szemléletje
  - modern koncepciók (pl. termodinamikai potenciál, entropia)
  - műszaki és biológiai területek fontos új fogalmak (Levin, potenciál, Gibbs potenciál)
  - Zelleni és statisztikus fizika, szilárd test fizika

Hőtan helye:



# Hőtan története

- 1650 Otto von Guericke → első vákuum  
→ caloricus kísérleteket  
(hővesztés)
- 1656 Robert Boyle: összenyomás a gázok nyomása, térfogata, hőmérséklete között
- 1679 Denis Papin: gőzta (Boyle tanítványa)
- 1697 Thomas Savery: első gőzgép  
gőzta hirtelenségi felvétel
- 1712 Newcomen: javított gőzgép → ipari forradalom
- 1720 Joseph Black: "Mi a hő?"  
- Kalorikus elmélet: a "hő egy anyag", nincs hővesztés  
- fizikai mennyiség  
új fogalmak: hőmennyiség, fajhő, hőkapacitás, latens hő, kalória
- 1791 Count Rumford (I. főtétel felé 1. lépés)  
- a gőzsíval fűtött víz hővesztés  
mechanikai munka hővé válik  
→ kinetikus elmélet: hő a részecskék (mozgásuk) mechanikai energiájának jelenti
- 1750 J. Watt (Black tanítványa) jó gőzgép
- 1824 Sadi Carnot, modern elmélet → II. főtétel
- 1841 James Joule, joule elvétel → I. főtétel
- 1850 Clausius  
- Kalorikus és kinetikus elmélet elvétel, és a Kalorikus  
megmaradását az energiamegmaradásal helyettesítjük
- Statistikus hőtan: Maxwell  
Boltzmann (entropia)  
Planck (III. főtétel)  
Clausius  
Gibbs

## Empirikus hőmérséklet:

- kétlépcsős fogalom
- hőmérséklet = hőmérséklet

első lépésben  
"hőmérséklet a hő"

## Tapasztalatok:

- adott körülmények között a testek hőmérséklete állandó
- érintkező testek hőmérséklete kiegyenlítődik
- testek fizikai jellemzői (kémiai összetétel, szilárdság, ... ) hőmérsékletől függetlenek
- Termikus egyensúly transzitiv



Ezért lehet ún. empirikus hőmérsékletet definiálni és hőmérsékleti

→ háttér megadni:

- Ami kell:
- mérhető tulajdonság
  - nulla törvény (pl. lineáris mérték)
  - egyesség
  - nullpont

pl.: Celsius, → háttér: - Hg oszlop hossza

→ háttér törvény: lineáris hőkapcsolás

- egyesség:  $100^\circ\text{C}$ , 1 bar-on a szilárdságát főzővel egyenlő hosszúságú víz hőmérséklete

- 0 pont  $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} \neq 1 \text{ atm}$  nyomáson az olvadási

0°C jég-víz keverék hőmérséklete

~ 100 méterre  
ontól a szilárdságától

$X(t)$ : hőmérséklet a higanyszála hossza adott  $t$ -n

$$t(^{\circ}\text{C}) = \frac{X(t) - X(0^{\circ}\text{C})}{X(100^{\circ}\text{C}) - X(0^{\circ}\text{C})} \cdot 100 \quad ; \quad \begin{aligned} X(0^{\circ}\text{C}) &= X_0 \\ X(100^{\circ}\text{C}) &= X_{100} \end{aligned}$$

## 2. Ideális gáz hőmérsékleti skála

$$pV = nRT \quad \text{egyszerűített gáz törvény}$$

↓  
 jól közelítő leplet valahőmérséklet, 1 bar körüli

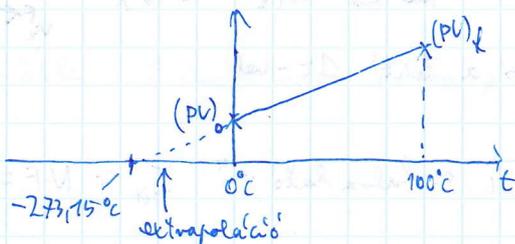
\* gáz ideális gázra igaz,  $n$  anyagmennyiség,  $R = 8,314 \frac{J}{mol \cdot K}$  gázállandó

$$pV = N k_B T$$

$N$  részecskék      Boltzmann állandó

Hőmérsékleti mennyiség  $(pV)_T$  : adott hőmérsékleten

$$(pV)_{100^\circ C} = (pV)_T \quad (pV)_{0^\circ C} = (pV)_0$$



$T_0$  : ideális gáz hőmérsékleti skála  
 0 pontja (abszolút) zérus pont

hőmérséklet

$$\frac{(pV)_{100} - (pV)_0}{100} = nR$$

innen  $0^\circ C$  az abszolút hőmérsékleti skála

$$T(0^\circ C) = \frac{(pV)_0}{nR} \quad \text{és} \quad T(100^\circ C) = \frac{(pV)_{100}}{nR}$$

$0^\circ C$  abszolút hőmérsékleti skála  $273,15 K$  (Kelvin, Lord Kelvin)

- 0 K nem elérhető el, abszolút nulla megközelíthető

- ideális gáz fogalma jó közelítés

- jön  $273,16 K$  = víz三相as ponti hőmérséklete

## Jelentős gázok

A mérhető mennyiségűnél a kinetikus elméletben egy mikroszkopikus magyarázatot ad.

Feltételei: részecskék kis gömbök

$$d \ll \ell \quad (\ell \approx 100 \text{ nm} - 10 \mu\text{m})$$

átmérő

szabad úthossz : két ütközés közt megtett út

(He :  $10^{-10} \text{ m}$ )

minden ütközés rugalmas

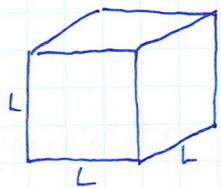
1 bar He  $\rightarrow \ell \approx 1 \text{ nm} \Rightarrow \frac{\ell}{d} \approx 10^7 \Rightarrow$  főtáblában : 10000-szeres ütközés

5

más megkülönböztetett / zökentett irány (izotróp)

a mozgás rendezetlen

nyomás értelmezése a zökentett párhuzamos falon



$$V = L^3$$

$m_0$  tömegű részecskék falra ütköztek

⇓

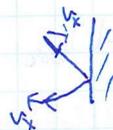
$\Delta t$  idő alatt rugalmasan ütköznek a falal

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

szórulás

$$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Falra ható erő  $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ ; átadott impulzus  $\Delta P_x = 2m_0 v_x$



"sokas"  $\Delta t$  ütközési idő azonos a lelti  $\Delta t$ -vel

$$F = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{2m_0 v_x^2}{2L} = \frac{m_0 v_x^2}{L}; \text{ a falra ható erő } F_{\text{fal}} = N \cdot F = N \frac{m_0 v_x^2}{L}$$

1 részecskétől várható erő

$$\text{nyomás } p = \frac{F_{\text{fal}}}{A} = \frac{N}{V} \frac{m_0 v_x^2}{L} = n v m_0 v_x^2 = *$$

↳ részecske-számműködés  $n v = \frac{N}{V} [n v] = \frac{dv}{m^3} = \frac{1}{m^3}$

\* a mozgás izotróp  $(v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow v_x^2 = v_y^2 = v_z^2)$  egyenlően igaz

$$v_x^2 = \frac{1}{3} v^2$$

$$p = n v \cdot \frac{1}{3} m_0 v^2 \quad v^2: \text{ a sebesség négyzetének átlaga}$$

egy részecske átlagos kinetikus energiája  $\bar{\epsilon}_n = \frac{1}{2} m_0 v^2$

$$\text{inacsk } p = n v \cdot \frac{2}{3} \bar{\epsilon}_n \Rightarrow \text{gazsokolat mikrovilág } (\bar{\epsilon}_n = \frac{1}{2} m_0 v^2)$$

↳ makroszkopikus mennyiség zökentett (p)

gáz seveselése (Dalton-törvény)

$$p = \sum p_i = \frac{2}{3} \sum n_i \bar{\epsilon}_{n_i}$$

parciális nyomások összege

Hőmérséklet értelmezése

$$pV = nRT$$

$$N_A \cdot k_B = 1R$$

$$pV = N k_B T$$

$$6 \cdot 10^{23} \frac{\text{db}}{\text{m}^3} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$$

Mezőszámrendszer

valószínűleg függ

$$pV = N k_B T \rightarrow p = n_V k_B T$$

$$p = n_V \cdot \frac{2}{3} \bar{\epsilon}_m \quad p = n_V \cdot \frac{2}{3} \bar{\epsilon}_m$$

$$\left. \begin{aligned} k_B T &= \frac{2}{3} \bar{\epsilon}_m \\ \bar{\epsilon}_m &= \frac{3}{2} k_B T \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{mikrovilág} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{makrovilág} \end{array}$$

3-as fokban eredete?

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 \text{ - hőle ered}$$

$f = 3$  szabadsági fok (Definíció)

A részecske energia kifejezésében szereplő négyzetes tagok száma:

$$\bar{\epsilon}_m = \frac{1}{2} m_0 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

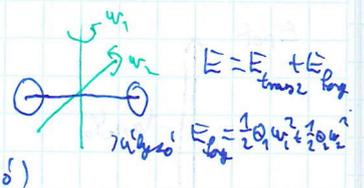
Equipartíció-tétel: 1 szabadsági fokra jutó átlagos energia  $\frac{1}{2} k_B T$   
 "egyenlő" "elosztás"

Diskusszió:

- stat. fiz -ből megérteni le lesz vezetve
  - csak magas hőmérsékleten igaz
  - alacsony hőmérsékleten a szabadsági fokok "kifagyhatnak"
  - energia egyenlően oszlik el a szabadsági fokok között
- $$\bar{\epsilon}_m = \frac{f}{2} k_B T \text{ összehajlítva mikro és makrovilág között}$$

$N$ . 1 atomos gáz  $N$  He  $f = 3$  transzláció

2 atomos gáz  $N$   $O_2$   $N_2$  ha forog  $f = 3 + 2$   
 forgási (rotáció)



Miért nincs 3. tengely - kvantum-mechanikai de van forgási invariáns

2 atomos gáz transzláció + rotáció + vibráció (rezgés)  $3 + 2 + 2$



van forgási energia kap Ten - hoz képesti elmozdulás koordináták mozgási energiája

$f = 3$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{vibráló molekula} \\ \text{- 1 rezgés} \end{array} \right. = 5$

Normálkoordináták, normálrezgések

Belső energia ideális gáza:

relatív mechanikai energiával összege (nem csak ideális gázra igaz)

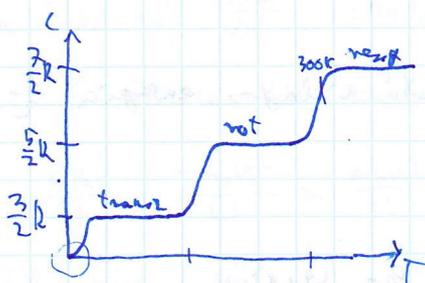
$$U_{in} = N \bar{\epsilon}_m = N \frac{f}{2} k_B T \quad \text{ideális gázra } U_{id}(T) \text{ csak } T\text{-től függ}$$

Fajhőleptéke:

$$c \stackrel{\text{fajhő}}{\Delta} \approx \frac{1}{n} \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial T}$$

ideális gázra, ha  $T$  nagy  $U = N \frac{f}{2} k_B T = n \frac{f}{2} RT \rightarrow c = \frac{f}{2} R$

létszámleti eredmény



$$c(U_2, 300K) = 3,2 R$$

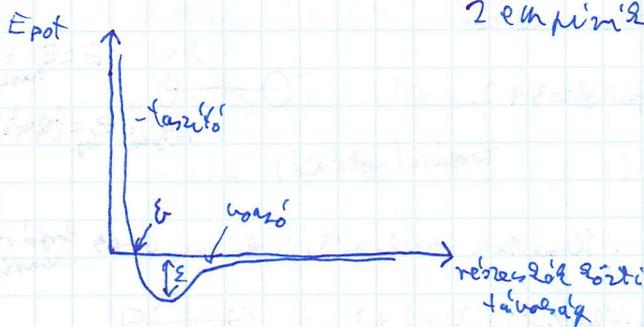
III. főétel

Reális gázok (van der Waals gáz ← jó közelítés)

vdW: 1873; 1910 Nobel-díj → a gázok szimulációjára

vdW: ideális gáz + relatív mechanikai energiával összege + van kölcsönhatás a relatív hő hőrt

empirikus paraméterek



denard-gáz potenciál

(1920)

$$E_{pot} = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\epsilon}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\epsilon}{r} \right)^6 \right]$$

$\underbrace{\hspace{2em}}_{\text{Pauli kényszer}}$ 
 $\underbrace{\hspace{2em}}_{\text{vdW kötés}}$

ideális gázra  $p = \frac{nRT}{V}$

szint térfogat  $V \Rightarrow V - nb$

empirikus paraméter  $b = 1 \text{ m}^3$  gáz által színt térfogat

$$p = \frac{nRT}{V-nb}$$

van der Waals egyenlet, közelítés  $\Rightarrow$  nyomás közelítés

$$\begin{array}{r} 00 \\ 00 \\ \hline 00 \\ 00 \\ 00 \end{array}$$

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - P_{kötés}$$

vdW-egyenlet: 2. empirikus paraméter  
 $P_{kötés} = \frac{an^2}{V^2}$

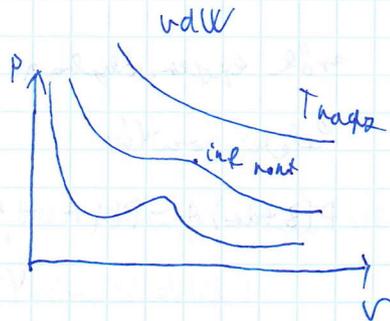
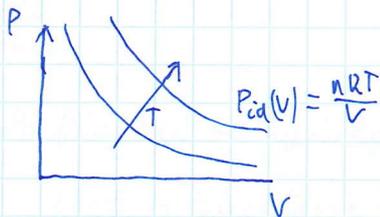
$\frac{n^2}{V^2}$  csak: párhuzamosított

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2} \Rightarrow$$

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V-nb) = nRT$$

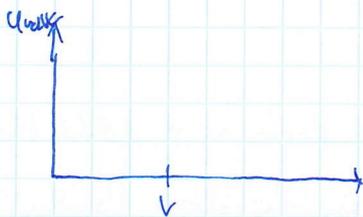
vdW páros állapot egyenlete

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V-nb) = nRT$$



vdW belső energiája

mechanikai:  $W = \int F dr$



lim  $U_{vdW} = U_{id}$   
 $V \rightarrow \infty$

$$U_{vdW}(V) - U_{vdW}(V \rightarrow \infty) = \int_{\infty}^V dW$$



negatív munka, azaz energiát vesz el a gáztól

ha felfelé  $F ds = -p A ds = -p dV$  ha zson mozgást minden

Ha  $z$

$$U_{vdW}(V) - U_{vdW}(V \rightarrow \infty) = \int_{V \rightarrow \infty}^V \frac{an^2}{V^2} dV = -\frac{an^2}{V} \rightarrow U_{vdW}(V) = U_{id}(T) - \frac{an^2}{V}$$

$\leftarrow$  2. tagja: belső

$$p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

Nem újmit önmagáért, hanem a belső energiát

de  $\leftarrow$  csökkenés az energiát

Innen:  $u_{\text{max}}(T, V) = \frac{f}{2} N z_B T - \frac{a n^2}{V}$   
fontos

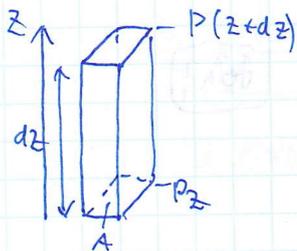
általában  $u = u(T, V)$

$$\frac{\partial u}{\partial T} \Big|_V ; \frac{\partial u}{\partial V} \Big|_T$$

### Barometrikus magasságformula



$T = \text{dél izoterm atmoszféra}$



erőle egyensúlyban

lelekl. pozitív

$$P(z+dz)A - P(z)A + mg = 0$$

$$V \cdot \rho = A \cdot dz \cdot \rho$$

$$P(z+dz) = P(z) + \frac{dP}{dz} \Big|_z dz + o(dz^2)$$

$$A dz \frac{dP}{dz} + A \rho dz g = 0 \quad (dz \text{ egyenlítőjén } 0)$$

$$\boxed{\frac{dP}{dz} + \rho g = 0} \rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\rho(z) = \rho = \text{const}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N m_0}{V}; \quad P = \frac{N}{V} z_B T \rightarrow \rho = \frac{P \cdot m_0}{z_B T}$$

$$\frac{dP}{dz} = -P \frac{m_0 g}{z_B T}$$

$$m_0 g z = E_{\text{pot}} \text{ grav}$$

$\frac{1}{n}$

dimenziójú

$$z_B T \leftrightarrow E_{\text{tr}}$$

$$\boxed{P(z) = P(z=0) \cdot e^{-\frac{m_0 g z}{z_B T}}}$$

$$e^{-\frac{\text{Energia}}{z_B T}}$$

$\leftrightarrow$  Boltzmann statisztika

Hol lesz a nyomás  $\frac{1}{e}$ -ad része a tengerszintén mértnek

$$m_0(N_2) \approx 10^{-25} \text{ kg}$$

$$z_B T \approx 3 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$10^{-24} \cdot z = 3 \cdot 10^{-21} \text{ J} \quad \leftarrow \text{itt lesz a 1/e-es rész}$$

$$z \approx 3000 \text{ m}$$

# Valószínűségi eloszlás, -és sűrűségfüggvények

Fázistér: 6 dimenziós: hely + sebesség  
 ↑  
 1 tömegpont

elemi térfogat a fázistérben  $d\tau \Rightarrow$   $\begin{bmatrix} x, x+dx \\ y, y+dy \\ z, z+dz \end{bmatrix}$   $\begin{bmatrix} v_x, v_x+dv_x \\ v_y, v_y+dv_y \\ v_z, v_z+dv_z \end{bmatrix}$

teljes fázistérben Ndb részecse van

$dN$  db van a  $d\tau$  elemi térfogatban

Def.:  $d\tau \cdot f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dN}{N}$   $(N_0: \rho = \frac{m}{V}; N_V = \frac{N}{V})$   
 fázistérbeli sűrűségfn.

$f(x, y, z)$  tulajdonsága

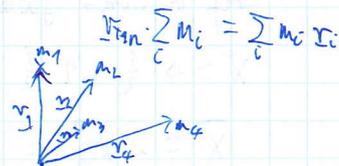
$\int_{\text{teljes fázistér}} f(x, y, z) d\tau = 1$

Adott fizikai mennyiség  $q(x, y, z)$  (pl.: energia, impulzus stb.)

ennek a teljes térre vett átlaga (várható érték)

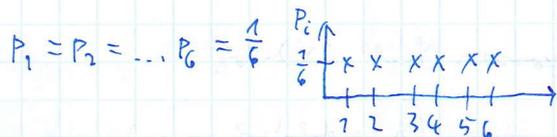
$\bar{q} \equiv \langle q \rangle = \int_{\text{teljes tér}} q(x, y, z) \cdot f(x, y, z) d\tau$

pl.:  $q(x, y, z) = x$  akkor  $\langle x \rangle = \int_{\text{teljes tér}} x \cdot f(x, y, z) d\tau$



Valható érték sűrűségfn

1. Direkt valószínűségi változó  $\Rightarrow$  1, 2, ..., 6



Jutalék: ha 6-ot dobol 6000 Ft-ot kap

$P_6: X_6 = 6000$

ha 1-5-ig dobol 1000 Ft-ot vesz

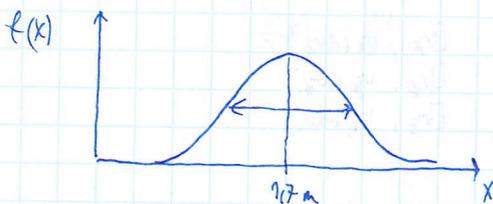
$P_1 - P_5: X_i = -1000$

$\langle X \rangle = \sum_i P_i \cdot X_i = -\frac{5}{6} 1000 + \frac{1}{6} 6000 = \frac{1000}{6} > 0$  érdemes játszani!

## 2. Folytós valószínűségi változó

űrűség fu.

eloszlás fu.  $n$ : terület magasságához elozlása a népszerűsége



$$\int f(x) dx = 1$$

teljes  
népszerűség

$$n.: \bar{x} = \int x f(x) dx$$

teljes  
terület

Híres űrűség fu.: Gauss-elozlás űrűség fu.-e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad ; \text{illetve } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 1 \quad \text{ } \} \text{ zűjőn!}$$

ú.n. szórási népszerűsége:  $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right]^2$  az Gauss-elozlás űrűség függvényére  $\sigma$ -t  $\sigma^2$ -ből visszanyerjük

Szórási u. szórási népszerűsége példán

$$f_{ij} \text{ u. } i \text{ és } j \text{ értéke} \quad f_{0j} = 0 \quad i \text{ és } j = 1 \quad P_1 = P_0 = \frac{1}{2} \quad \left( \begin{array}{l} P(i=0) = \frac{1}{2} \\ P(i=1) = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\bar{x} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x}^2 = \langle x^2 \rangle = \sum x_i^2 P_i = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{1}{2}$$

$$\langle x \rangle \text{ zöndület szám} : \langle x \rangle = 0,5$$

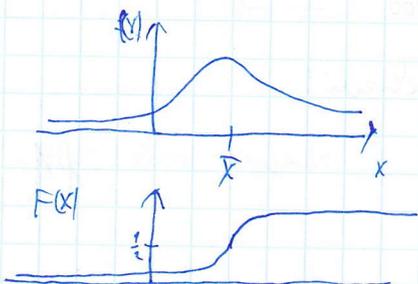
jádelelelel zűjött akkleg,  $n$  zöndületlelel  $n$  feje s'g'ndes  $\Rightarrow \bar{x}_{m} = 0,45$

u

$\sigma$  jelelelelele  $\bar{x}$  zűnt mlyen gyorsan tart  $\langle x \rangle$ -hoz

$\sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  -népszerűségele tart  $(n = a \text{ dollelelele szám})$

Elozlás fu.:



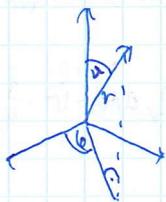
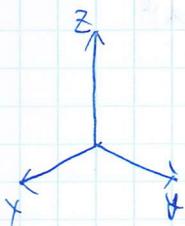
$F(x)$  az  $f(x)$  űrűségfüggvény elozlása fu.-e

$$F(x) \triangleq \int_{-\infty}^x f(x') dx' \quad \leftrightarrow \quad f(x) = F'(x)$$

$F(x)$  jelelelelele :  $P\{x < x\} = F(x)$

$$P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Integrálás polárkoordinátákban



$x, y, z \rightarrow r, \varphi, \theta$   
 sugár, polárszög, azimutális szög

$$\int dx dy dz = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi$$

elemi térszög  $d\Omega = \sin\varphi d\varphi d\theta$

elemi felület  $dA = r^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$

elemi térfogat  $dV = r^2 \sin\varphi d\varphi d\theta dr$

pl.: gömb felülete

$$\int dA = R^2 \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi R^2$$

gömb térfogata

$$\int dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Részecskeáram sűrűsége

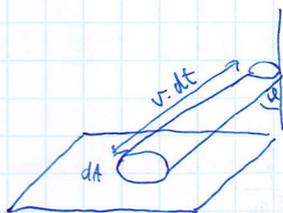
véges sebesség:  $\underline{j} = \frac{1}{4} n_v \cdot \underline{v}$  átlagssebesség

$[\underline{j}] = \frac{dr}{m^2 s}$ ; ell.:  $[n_v \cdot \underline{v}] = \frac{dr}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{dr}{m^2 s}$

$f(v)$ : sebesség eloszlás sűrűségi függvénye

$dN_v = N f(v) dv$ : olyan részecskék száma, melyek sebessége  $[v, v+dv]$  intervallumba esik

$dN_{dr, v, \varphi, \theta} = \frac{dN}{V} \cdot dV = \frac{dN}{4\pi r^2} \cdot r^2 \sin\varphi d\varphi d\theta dr$ : az a részecskék száma, melyek  $[v, v+dv]$  sebességűek a  $[r, r+dr]$  intervallumba esik és a  $d\Omega$  térszög irányába mozognak



$dA$  elemi felület

$dt$  idő alatt áthaladó részecskék száma

Az az mennyi  $dt$ , amit jó helyen vannak és jó irányba haladnak.

részecskeáram sűrűsége

$dV = v dt dA \cos\varphi$ ;  $\int dV = v dt dA \cos\varphi$

$\int dA dt = \frac{dV}{v} = *$

$dA$  felületen  $dt$  idő alatt áthaladó részecskék száma

13

$$* = \int_{\text{felte}} dN_{av, v, v, v}$$

Bizonyítsa a képletet:

$$dN_{av, v, v, v} = \frac{dV}{V} \cdot N f(v) \cdot dv \frac{2\pi v dv d\phi}{4\pi} = dA dt \frac{N}{V} f(v) v dv \frac{1}{4\pi} d\phi \frac{2\pi v dv}{\frac{1}{2} 2\pi v dv}$$

$$\int_{\text{felte}} dA dt = \frac{N}{V} dA dt \int_{\bar{v}} v f(v) dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \frac{1}{4\pi} = n_v dA dt \bar{v} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\bar{j} = n_v \cdot \bar{v} \cdot \frac{1}{4}$$

### Transport folyamatok

- Fizikai mennyiségek inhomogenitása

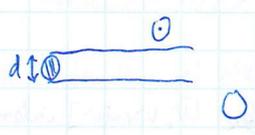
- n.: koncentráció → diffúzió → részecskeáram
- hőmennyiség → hővezetés → hőáram
- potenciál → elektromos vezet. → elektromos áram
- sebesség → viszkozitás → impulzus áram

→ ebben áramok alakulnak

Részecske mozgása: időnként ütközik, azt ütközés, azt megtett átlagos utolsó:

szabad utolsó  $\bar{e}$

d átmérőjű gömb



2d átmérőjű gömb van vizsgálja átlagosan

dt időnként ütközik:

$$dV = \bar{v} dt \cdot d^2 \pi \triangleq \bar{e} \bar{v} dt$$

$\bar{v}$  átl. sebesség
 $\bar{e}$  szabad utolsó

itt  $\bar{e} = d^2 \pi$  [ $\bar{e}$ ] = m<sup>2</sup>; 1 részecske számára rendelkezésre álló térfogat

$$dV = \bar{e} \bar{v} dt = \frac{V}{n} = \frac{1}{n_v}$$

mennyiség
mennyiség

$$\bar{v} dt = \text{szabad utolsó} \rightarrow \bar{e} \bar{e} = \frac{1}{n_v} \Rightarrow \bar{e} = \frac{1}{\bar{e} n_v}$$

$$\text{ideális gáz: } pV = N k_B T \rightarrow n_v = \frac{p}{k_B T} \rightarrow \bar{e} = \frac{k_B T}{\bar{e} p}$$

pl.: He-ra (legkisebbszörös részecské)

$$d = 37 \text{ pm} \rightarrow v = 3 \cdot 10^{-21} \text{ m}^3$$

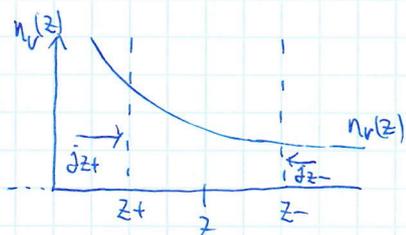
1 mbar He-ra  $\bar{e} = 1 \text{ mm}$  (ballisztikus hőtranszport)

Kezdeti térfogat:  $\bar{e} = 0,1 \mu\text{m} = 100 \text{ nm}$

100  $\mu\text{m}$ -en  $\bar{e} = 16 \mu\text{m}$  ← zéróvonal

300  $\mu\text{m}$ -en  $\bar{e} = 20 \mu\text{m}$

Difúzió a szabad átlós közelítésben



$$\vec{j} = \vec{j}(z)$$

$j_{z+}$ : balról jobbra

$j_{z-}$ : jobbról balra

$$j_z^{\text{diff}} = j_{z+} - j_{z-} \text{ : diffúziós áraműrűség}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{4} n_v \cdot \vec{v} \text{ (udvar (3D) → eredmény)}$$

$$\text{innen: } j_z^{\text{diff}} = j_{z+} - j_{z-} = \frac{1}{4} \vec{v} (n_v(z+) - n_v(z-)) =$$

Körülbeli megközelítéssel megváltoztatva legkisebb körpályák:  $\bar{e} \leftrightarrow e_z$  a szabad átlós közelítésben

$$n_v(z+) = n_v(z) - \bar{e} \frac{dn_v}{dz} + o(\bar{e}^2) \quad n_v(z-) = n_v(z) + \bar{e} \frac{dn_v}{dz} + o(\bar{e}^2)$$

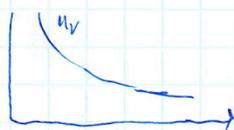
$$z+ = z - \bar{e}$$

$$z- = z + \bar{e}$$

$$j_z^{\text{diff}} = \frac{1}{4} \vec{v} \bar{e} \frac{dn_v}{dz} (-1) \cdot 2 = -\frac{1}{2} \vec{v} \bar{e} \frac{dn_v}{dz}$$

$$D = \frac{1}{2} \vec{v} \bar{e} \text{ diffúziós állandó}$$

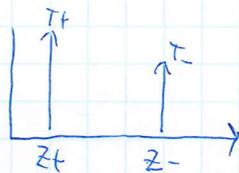
$$1D: j_z^{\text{diff}} = -D \frac{dn_v}{dz} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Fick-törvény} \\ \text{3D: } j_z^{\text{diff}} = -D \nabla n_v \end{array} \right\}$$



$$\frac{dn_v}{dz} < 0 \rightarrow j > 0$$

balról jobbra áramlás

Hasonlóan: hővezetés  $\bar{E} = \frac{3}{2} z_0 T$  ( $f=3$ ) Transzmisszió energiája  $\bar{E} = \frac{f}{2} z_0 T$



$$j_z^{\text{diff}} = \frac{f z_0}{8} n_v \vec{v} (T+ - T-) = -\frac{f z_0}{4} \bar{e} n_v \vec{v} \frac{dT}{dz} \quad (5)$$

$$T+ = T(z) - \bar{e} \frac{dT}{dz} + o(\bar{e}^2) \quad T- = T(z) + \bar{e} \frac{dT}{dz} + o(\bar{e}^2)$$

bennezetve:  $\lambda = \frac{1}{4} n_v \bar{v} \bar{e}$  "levegő" "állandó"

$$\boxed{j^{ho} = -\lambda \nabla T} \quad \text{Fourier - törvény}$$

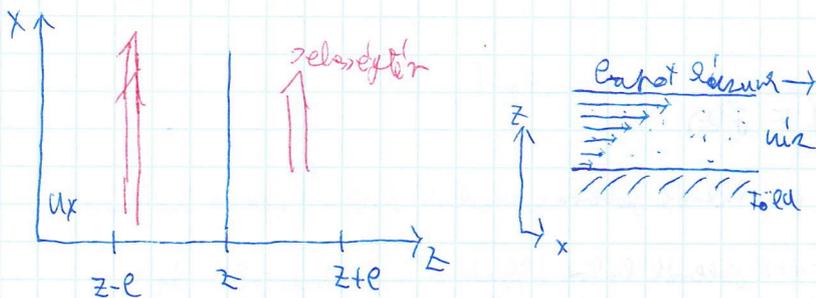
Elektronok áram:  $j = e E \leftrightarrow j = -e \nabla \phi$

$$[j^{elektron}] = \frac{C}{m^2 s}$$

$$[j^{ho}] = \frac{J}{K} \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m = \frac{J}{m^2 s}$$

$$[j^{diff}] = \frac{dw}{m^2 s}$$

### Viszkozitás



$\Delta A$  felület

$u_x$ : X irányú sebesség nagysága

$\Delta A$  felületen impulzus áramlása

$$j_z^{imp} = \frac{1}{4} n_v \bar{v} (p_x(z-e) - p_x(z+e))$$

Z irányon áthaladó  $p_x(z-e) = m [u_x(z) - \bar{e} \frac{du_x}{dz}]$

de X irányú impulzus  $p_x(z+e) = m [u_x(z) + \bar{e} \frac{du_x}{dz}]$

$$j_z^{imp} = -\frac{1}{2} n_v \bar{v} m \bar{e} \frac{du_x}{dz}$$

$$\eta = \frac{1}{2} n_v \bar{v} \bar{e} m \rightarrow j_z^{imp} = -\eta \frac{du_x}{dz}$$

↑  
viszkozitás

$$[j_z^{imp}] = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{m}{s} \cdot m \cdot \frac{J}{s} = \frac{J}{m^2 s}$$

Newton - törvény

$$j_z^{imp} = const = \frac{\eta}{m^2} \text{ "molekulák" nyitva "bűlt" } \rightarrow$$

$$\tau = -\eta \frac{du_x}{dz}$$

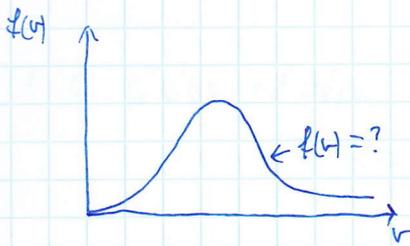
↑  
nyitva  
bűlt

Newton - törvény

Newtoni - folyadék

# Maxwell-féle sebességeloszlás

Eddig  $\vec{v} = \langle v \rangle$ ; vagy  $\bar{\epsilon}_m = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$



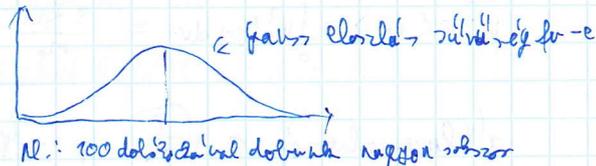
Bizonyítás: nincs, Maxwell gondolatmenetét követjük.

$f(v) = f_1(v_x) f_2(v_y) f_3(v_z)$  ← a sebesség függvények  
 ↑  
 sebesség eloszlás súrúsága  $f(v)$ -e

e)  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  nincs zavaró tényező

Maxwell javaslat:  $f$  ne  $v_x$ -től hanem csak  $v^2$ -től függjön

Próbáljuk:  $f(v_x) = A e^{-\alpha v_x^2}$  Gauss-elv (Centrális határeloszlás tétel)



ℳ: 100 doléződel doléződel nagyon ször

Gauss-elv tulajdonságai

$f_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$  ;  $\int_{-\infty}^{\infty} f_g(x) dx = 1$  ;  $\int_{-\infty}^{\infty} x f_g(x) dx = \bar{x}$

$\epsilon^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_g(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x f_g(x) dx \right]^2$  igaz!

Ezzel  $f(v) = A^3 e^{-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$

A e)  $\alpha$  meghatározása leolvashatóan

$\bar{v}_x = \int_{-\infty}^{\infty} v_x A e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 0$

$\bar{v}_x^2 = A \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x$  ismét

ismét  $\epsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$

↓  
 $\sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha}$

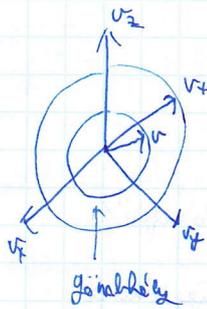
$A = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}}$

A feljebb:  $f_1(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{v_x^2}{\frac{1}{2\alpha}}}$

$\overline{v_x^2}$  értéke?  $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$  s'  $\bar{\epsilon}_m = \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2}$  s'  $\bar{\epsilon}_m = \frac{3}{2} k_B T$  1 atomos ideális gáz  
 $\overline{v_x^2} = \frac{k_B T}{m_0}$

A feljebb:  $f(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2k_B T}}$

# Teljes sebességter



$v+dv$  valóságra az origótól

$dV$  adott gömbhélyban lévő részecskék száma

$$dV = N 4\pi v^2 f(v) dv = N F(v) dv$$

$$F(v) = 4\pi v^2 f(v)$$

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

$$\bar{v} = \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

$$\overline{v^2} = \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m_0}$$

átlagsebesség  $\sim \sqrt{\frac{T}{m_0}}$

átlagból eltérés  $\sim \frac{T}{m_0}$

átlag és átlagból való eltérés is  $T$ -vel megegyezik

-Storn és Lambert elvétel  $F(v)$  zsinuszos

-diffúzió  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{e}$   $^{235}\text{U}$  és  $^{238}\text{U}$ ;  $D \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$   $\Rightarrow$  0,7% zsinuszos  
 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2}$

## Fenomenológiai termodinamika (Leibniz kötet)

### Fizikai mennyiségek

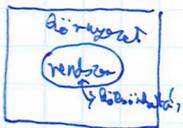
Extensív: függ a rendszer méretétől és abszolútban additív. pl.:  $V, N, S$

Intenzív: nem függ a rendszer méretétől és abszolútban effektív

Intenzivitások. pl.:  $P, \mu, T$

Chemical potential: rendszer energia változása miközben a rendszerrel anyagmennyiség és entrópia is megváltozik

↕  
 Concentration analog



Egyensúly: a rendszert jellemző fizikai mennyiség  
 térben és időben állandóval  
 homogén      stacionárius

A 0. főtétele másképp: a rendszert megafőm állapotban elérni az egyensúlyt  
 $\Leftrightarrow$  lokális egyensúlyt

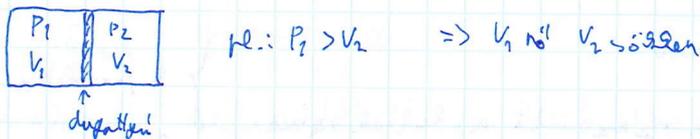
Állapotjelző: egyensúlyt jellemző fizikai mennyiség

Kölcsönhatás: intenzív mennyiség elöljárójele kapja az extenzív  
 mennyiség megváltozását

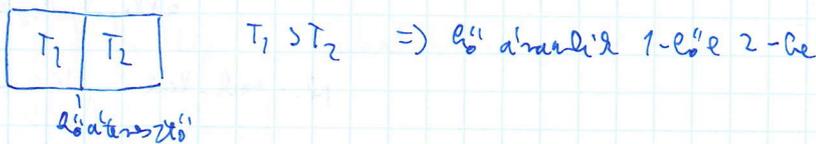
Analógia: intenzív mennyiség: "termodinamikai erő"

$F=ma$       extenzív megváltozás: "elválasztott kálcs"

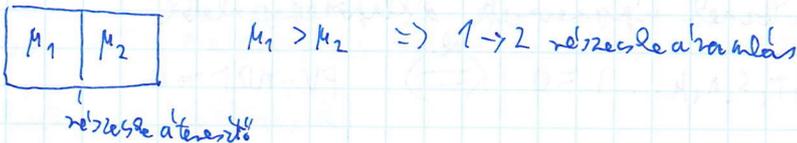
pl.: mechanikai kölcsönhatás



• termikus kölcsönhatás



• anyagi kölcsönhatás



Kölcsönhatás	intenzív	extenzív	szigetelő <sup>1</sup> fal
mechanikai	P	V	szigetelő fal $\frac{N}{V} n^3 = N/V$
termikus	T	S	hőszigetelő fal $\frac{dQ}{dt} = \frac{dS}{dt} T$
anyagi	M	N	részecske áramlat falak fal [M] = $\frac{E}{mc^2}$
elektrosztatikus	$\phi$ (potenciál)	q (töltés)	töltés szigetelő fal (áramlás)
elektromos dipólus	E	P (dipólus momentuma) <small><math>\vec{p} \rightarrow \vec{p} + \vec{p}_0</math></small>	—    —      [E] = $\frac{V}{m}$ [P] = $A \cdot m$
mágneses dipólus	B	M (mágneses dipólusmomentum) <small><math>\vec{m} \rightarrow \vec{m} + \vec{m}_0</math></small>	mágneses szigetelő fal      19 [M] = $A \cdot m^2$ [I] = $A \cdot m$

polarizáció  $\Rightarrow D = \epsilon_0 E + P$

$P = \frac{\sum p}{V}$

$[P] = \frac{As}{m^3}$

$\int_D dA = Q$

$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$

~~$\int_D dA = Q$~~

magnesesztés

$M = \frac{\sum m}{V}$

$[M] = \frac{A}{m}$

$B = \mu_0 (H + M)$

### Alapfogalmak

Zárt rendszer: nem vesz részt semmilyen kölcsönhatásban

Biz. nélkül.: a tapasztalat szerint a rendszer jellemzőitől nem függ a mennyiség, mint ahogy kölcsönhatásban részt vesz + 1 intenzív

Általában állapotjelző száma: 2x a szub-ok száma

} a probléma túlhatalozott  
lehető összefüggés az állapotjelző között

pl.: mech. és:  $pV = \text{áll}$

termikus + mech:  $pV = nRT$

Általában: a termel. újonnan állapotegyenlet

$f(p, V, T, S, n, \mu \dots) = 0 \xLeftrightarrow{pl.} pV - nRT = 0$

Folyamat: az állapotjelző megváltozása

Kvazistatikus folyamat: „lassú változás” a rendszer egyensúlyi állapotban leszti változik

reverzibilis folyamat: a külső hatást megfordítva a rendszer

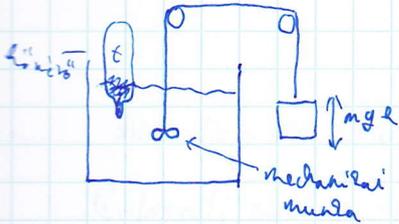
visszatér kiinduló állapotába. (jó közelítés, valószínűleg nem lehet)

# Hőtan I. fejelet

A tapasztalat szerint a mechanikai munka hővé alakul (fordítottan NEM igaz)

Energia megmaradási tétel (mechanikai és termikus kölcsönhatás)  $\equiv$  Hőtan I. fejelet

Fontos-élmények:



a munkát teljes egészében hővé alakul

$$m_{\text{ext}} = 1 \text{ kg} \quad h = 1 \text{ m} \Rightarrow W_{\text{munka}} = \Delta E_{\text{pot}} = 10 \text{ J}$$

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{m}} &= 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \\ m_{\text{m}} &= 1 \text{ kg} \end{aligned} \right\} \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{m_{\text{m}} \Delta T} \Rightarrow \Delta T = 0,002 \text{ K} = 2 \text{ mK} \text{ mérhető}$$

Megfigyelés: a rendszer 2 állapota közti átmenetkor mindig azonos nagyságú munkát kell végteni

Analóg: munkatétel

$$\Delta E_{\text{munka}} = \int \underline{F} \cdot d\underline{r} = W$$

az analógián alapszín definiálható ún. belső energia (termodinamikai potenciál)

jelle:  $U$ ; állapottjelző

$$\Delta U_{A \rightarrow B} = U_B - U_A \quad ; \quad \text{extenzív mennyiség}$$

$$U = U(p, T, S, n, V, \dots)$$

Tapasztalat szerint a belső energiát hőközléssel is megváltoztathatjuk.

Mi a hőközlés?  $\leftrightarrow$  mechanikai kölcsönhatások összessége

(mikroszkópián: ütközés, stb)

jelle: a rendszerrel közölt hőmennyiség =  $Q$

$$\text{Eszel: } \Delta U_{A \rightarrow B} = U_B - U_A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rendszeren} \\ \text{végzett munka}}}{W} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{rendszerrel} \\ \text{közölt}}}{Q}$$

$$[\text{Honor Wikipedia: } \Delta U = Q - W]$$

Elemi folyamatokra:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

potenciál  
jellegű  
mennyiség

út/folyamat  
függő

$d$ : teljes differenciál

$\delta$ : elemi munkavégzés v. hőközlés, UTFüggs 21

Teljes differenciál:

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

differenciál

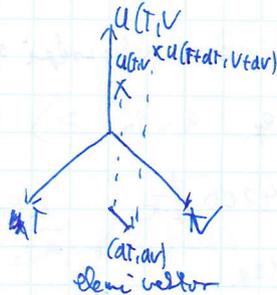


pl.:  $U(T, V)$

$$dU \cong \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

állandó V

U → szokatlan 2 változós



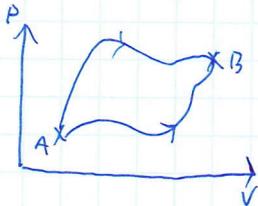
Képlet:  $U(T+dT, V+dV) - U(T, V)$

Állítás: az egyenlőség

$$dU = (\nabla U) \cdot (dT, dV)$$

$$\nabla U = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \cdot [dT, dV] \rightarrow dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

Néldo: ideális gáz + P-V diagram



$\Delta U_{AB}$  azonos  
 $W \neq Q$  nem!

Mechanikai folyamatok

mechanikai

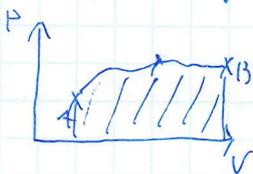


$$W = \int \vec{F}_2 ds$$

$$dW = -F_2 ds = -pA ds = -p dV$$

negatív, ha gáz húz  
 pozitív ha összenyom

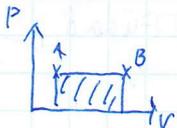
Macroscopicus folyamatokra



$$W = - \int_A^B p(V) dV$$

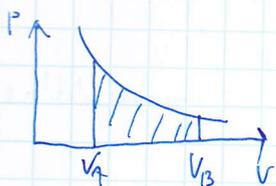
előjeles

Ízolat



$$W = -p(V_B - V_A) < 0 \text{ ha húz} \\ > 0 \text{ ha összenyom}$$

izoterm



$$P(V) = \frac{nRT}{V}$$

$$W = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} = -nRT \ln \frac{V_B}{V_A} = +nRT \ln \frac{V_A}{V_B}$$

$W < 0$ , ha  $V_A < V_B$  tágul

$W > 0$ , ha  $V_B < V_A$  összehúzó

2a.:  $du = \delta q + \delta w = \delta q - p dV$

térfeletti munka  $-p dV$

új: anyagi munka:  $\delta W = \mu dn$   
 intenzív 'extenzív

Elektrosztatikus munka

$\left| \frac{E}{\epsilon_0} \right|$  új  $\delta W > 0$   
 változó töltés

$\delta W = \int \epsilon dq$   
 potenciál  
 elemi töltésvaltozás

Általánosított munka kifejezés

$$\delta W = X_i \cdot d\xi_i$$

intenzív extenzív

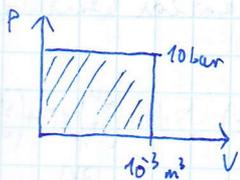
Errel a fogással:

$$du = \delta Q + \sum_i X_i d\xi_i$$

ha i-edik fajta munka kifejezés van

pl.:  $du = \delta Q - p dV + \mu dn + \epsilon dq$

Gyakorlati példa



autó motorja által végzett munka

$$|W| = W_A = 10^6 \text{ Pa} \cdot 10^3 \text{ m}^3 = 10^9 \text{ J} \Rightarrow P = f \cdot 10^3 \text{ J} = 50 \text{ kW} \approx 75 \text{ LE}$$

↑  
50 Hz fordulatszám

Tapasztalati hő

Tapasztalat szintén a tesztelgel rögzített hővel analízisban változik a hőmérséklettel (Blad)

$dQ = \int \delta T$   
 részlet az

$K = C \cdot m$   
 J/K

$\delta Q = C \cdot n$   
 [C] = J/°C

2)

Molhő "fajánatlátszó"!

① izobár  $dQ_p \rightarrow C_p$

② izochor  $dQ_v \rightarrow C_v$

③  $V = \text{állandó}$

$dU = dQ - PdV \Rightarrow dQ_v = dU \leftarrow$  fizika

"matol"  $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$  innen  $dQ_v = C_v n dT$   
 $dQ_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT \left. \vphantom{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V} \right\} C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

④  $P = \text{állandó}$

$dQ = C_p n dT$  ( $C_p$  definíciója)

$dU = dQ - PdV \Rightarrow dQ = dU + PdV$

új fizikai mennyiség: entalpia, jele  $H$

$H \triangleq U + PV$   $[H] = J$

$H$  teljes differenciálja:  $dH = dU + d(PV) = dU + PdV + VdP$

$P = \text{állandó}$   $dH_p = dU + PdV$  innen  $dH_p = dQ_p (= dU + PdV) \leftarrow$  fizika

matol:  $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$   
matol + fizika:  $C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$

Legyen  $H = H(T, P)$

A két fajhő kapcsolata

I. főtétele  $dU = dQ + dW \rightarrow dQ = dU + PdV \leftarrow$  fizika

matol:  $dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}_{nC_v} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$  egyenlet felírása amit izobár esetben tekintünk

$dQ = nC_p dT = nC_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV$   
2. főtétele

Legyen  $V = V(T, P) \Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$

izobár esetben  $dV_P = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$

Berendez:  $n(C_p - C_v) dT = \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$

$dT$  tökéletesen nemzérő  $\Rightarrow$  jobbra s' balra oldali egyenlőség

$C_p - C_v = \frac{1}{n} \underbrace{\left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}_{\text{2. főtétele}}$

$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P := \beta_P$  - izobár térfogatábrós együttható

eszel:  $C_p - C_v = \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] V \cdot \beta_P$

Idealis gázra:  $PV = nRT$  és  $U(T) = \frac{f}{2} nRT$   $\leftarrow$  azonos  $dT$  mellett  $dU_v = dU_p$   
csak T-től függ

$dU_v = nC_v dT$   $dU_p = nC_p dT - PdV$

$nC_p dT - PdV = nC_v dT$

$C_p - C_v = \frac{1}{n} P \frac{dV}{dT}$

$PdV$  értéke  $P$  állandóság mellett  $dV = \frac{nRdT}{P} \Rightarrow PdV = nRdT$

$C_p - C_v = \frac{nRdT}{ndT} = R$

Az általános formula (ideális gázra)

$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{P} = \frac{V}{T}$   $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$

$V = \frac{nRT}{P}$

$C_p - C_v = \frac{1}{n} P \cdot \frac{V}{T} = R$

N.:  $\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P = \frac{f}{2} nR$  innen  $\beta_P = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T}$

$C_v = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{f}{2} R$  ideális gázra és  $C_p = C_v + R = \frac{f+2}{2} R$

Fajhőhányados

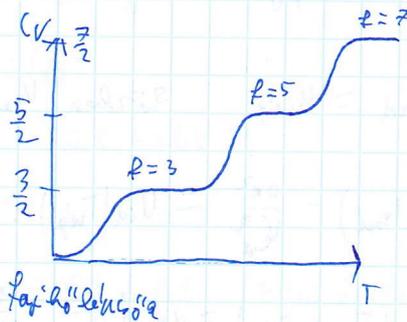
$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f}$   $\leftarrow$   $\gamma$  csak  $f$ -től függ  
ideális gázra

$\gamma > 1$

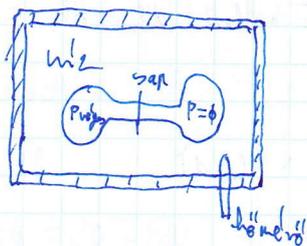
N.:

	$\frac{C_v}{R}$	$\frac{C_p}{R}$
H <sub>2</sub>	2,43	3,46
CO	2,43	
N <sub>2</sub>	2,139	3,15
Br <sub>2</sub>	3,29	

$T = 300K$



gáz - hűsac (G.I)



hővezető tartály

1. szigetelt tartály

2. tapasztalat szerint a víz hőmérséklete állandó

$dU = \delta Q + \delta W$  - nincs munka végezés, mert a hűsacban a gáz hővezető, hővezető nincs

$\Downarrow$   
innen  $dU = 0 \Rightarrow U = \text{állandó}$

$\Downarrow$   
és  $dT = 0 \Rightarrow T = \text{állandó}$

de!  $P \rightarrow V$  változik

$\Downarrow$   
 $U$  csak  $T$ -től függhet  $\Rightarrow U = U(T)$

Ez az ideális gáz állapotegyenletje alapja.

Ideális gáz definíciója.

"Szerecsen's negatív térfogat" nyilvánvalóan végre nem igaz

Azért mert a hőmérsékletváltozás kicsi, és a víz hőkapacitása nagy

Valódi gázzal elvágva G-L:

$VDK: (P + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = nRT$

$U_{VDK} = U_{id} - \frac{an^2}{V}$

$dU = \delta Q + \delta W \leftarrow = 0$  víz miatt

realis gázra is  $\leftarrow$  az egyenlet alapján nincs hővesztés a környezettel

ésért  $U_{szed} = U_{szeg}$   $\leftarrow$  hiszen  $V_{szed} \rightarrow V_{szeg}$

$U_{id}(T_{szed}) - \frac{an^2}{V_{szed}} = U_{id}(T_{szeg}) - \frac{an^2}{V_{szeg}}$

$n \left( v(T_{szed} - T_{szeg}) = an^2 \left( \frac{1}{V_{szed}} - \frac{1}{V_{szeg}} \right) > 0 \Rightarrow T_{szeg} < T_{szed} \Rightarrow$  hűtés

VDK gáz:  $U = U(T, V)$

Enfi:

felhasználás → megegyezés

szintesen összehasonlít, mindeket megfog  $x < 0$   $\Delta u < 0$

mat. értékelés

valós

inv. fun. definíciója

$$\frac{dx}{dy} = f' \quad (f^{-1})' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'}$$

mező

$$y = f(x) \quad x = f^{-1}(y)$$

$$[f^{-1}(f(x))] = 1$$

$$[f^{-1}(y)]' \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})' = \frac{1}{f'(x)}$$

$$pl.: y = \sin x \quad (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

(2) fu. egyenlet

$f(x, y) = \phi$  v. konstans

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_f = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}$$

$$f = \text{const} \Rightarrow df = 0$$

$f(x, y) = \text{const}$

$f(x, y, x)$

$$\frac{df}{dx} = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{dy}{dx}\right)_f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_f = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}$$

pl.: implicit deriválás  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

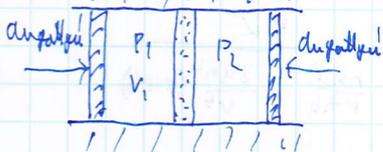
val  $\frac{dy}{dx}$  deriváltja derékszögű, (amielő  $y = \phi$ )

$$F(y, x) = y - ax^3 - bx^2 - cx - d = \phi \quad \left| \frac{a}{dx} \right.$$

$$0 = \frac{dy}{dx} - 3ax^2 - 2bx - c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$$

(váltószög)

háromszög (normális körvonalra) / képtől függően a normálisok átmenete



Öbrye költ. Vartaly

Joule-Thomson kísérlet (G-L pontonálban megismételni) (dond felvétel)

1. oldal  $v_1 \rightarrow 0$  -ra megy

2. oldal  $0 \rightarrow v_2$  térfogat

$P_1$  és  $P_2$  állando 27

mind  $h_0$  körvonal, a körvonal

$dh_0 = -p \cdot V$  Calculat

A: Quedeti

B: walfallast

$$U_B - U_A = - \int_{V_1}^0 P_1 dV_1' - \int_0^{V_2} P_2 dV_2' = P_1 V_1 - P_2 V_2 = \Delta U$$

esbo' energia mex walfallast

aktendecur:  $U_B + P_2 V_2 = U_A + P_1 V_1$   
 $H_B = H_A \Rightarrow$  entalpia allando;

$H = U + PV$  es' leggen  $H = H(T, P)$  u.ö.  $U_1 = U(T, V)$

J-T zibereleken  $dH = 0$

ingid e  $dH = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P}_{n c_p} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$

J-T eppitthabo:  $M_{JT} \triangleq \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$  def.!

Jenti eppitthabo:  $n c_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP \stackrel{H=dH}{=} 0 \Rightarrow \left(\frac{dT}{dP}\right)_H = - \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T}{n c_p}$

Jelentse:  $M_{JT} > 0$  talqulwa kuit

$M_{JT} < 0$  talqulwa mekuzik

Idealis gazra:  $U = U(T)$  es'  $H = H(T)$

innen  $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0$  JT effektas id. gazrahan ning

Azonnosdy: (ion)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

id. gazra:  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{V}{T}$

VDW gazra

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V-nb) = nRT$$

$V(T)$ : 3-ad foal lenne

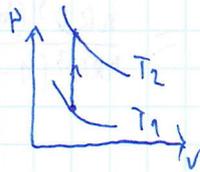
$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$  eriddele  $\rightarrow$  VDW allanot eppitthabo  $T$  eriddele  $\frac{d}{dT}$

$$-\frac{2an^2}{V^3}(V-nb)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + \underbrace{\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)}_{\frac{nRT}{V-nb}} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = nR \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{\frac{nRT}{V-nb} - \frac{2an^2}{V^3}(V-nb)}$$

Qozel'eb:  $\left(\begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix}\right)$  id. gazra  $\Rightarrow 0$ , de leggen  $a, b$  licci

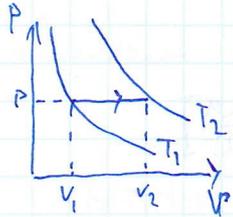


(2) Isochor  $V = \text{all}$   $W = 0$   
 $\Delta U = Q$   $\Delta U = n C_V (T_2 - T_1)$



$$C_V = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

(3) Isobar  $\Delta U = Q + W$



$$\Delta U = n C_V (T_2 - T_1)$$

$$W_{V_1 \rightarrow V_2} = -P(V_2 - V_1) = P(V_1 - V_2) \quad W < 0, \text{ for } V_2 > V_1$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - P(V_2 - V_1)$$

$$\downarrow$$

$$n C_P (T_2 - T_1)$$

$$C_P = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

alternativ:  $Q = U_2 + PV_2 - [U_1 + PV_1]$

$$Q = H_2 - H_1 = \Delta H \quad \text{v.ö.: Isochor } \Delta U = Q$$

(4) Adiabatisch  $Q = 0$

isentrochisch

$$dU = \delta a + \delta W \quad PV = nRT$$

$$n C_V dT = 0 - P dV = - \frac{nRT}{V} dV$$

$$\frac{dT}{dV} = \frac{-nRT}{n C_V V} \quad ; \quad \frac{R}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_V} = \gamma - 1 \quad \text{also } \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

$$\frac{dT}{dV} = (1 - \gamma) \frac{T}{V}$$

$$f(x) = a \frac{f}{x}$$

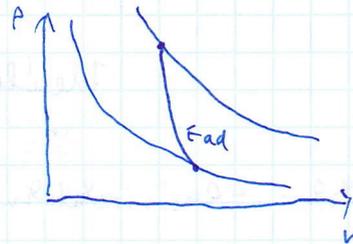
$$f = \text{const} \cdot x^a$$

$$T = V^{(\gamma-1)} \cdot \text{const}$$

adiabata effekte  $TV^{\gamma-1} = \text{all}$

$$\Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

$$\Rightarrow PV^\gamma = \text{all}$$



$$\text{ad } PV^\gamma = \text{all} \quad \rightarrow P = V^{-\gamma} C_1 \quad \frac{dP}{dV} \Big|_{\text{ad}} = -\gamma V^{-\gamma-1} C_1$$

$$\text{isoterm } PV = \text{all} \quad \rightarrow P = V^{-1} C_2 \quad \frac{dP}{dV} \Big|_{\text{isoterm}} = -V^{-2} C_2$$

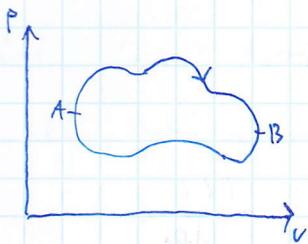
} a (P\_0, V\_0) halben

$$\frac{dP}{dV} \Big|_{\text{ad}(P_0, V_0)} = -\gamma \frac{P_0}{V_0}$$

$$\frac{dP}{dV} \Big|_{\text{isoterm}(P_0, V_0)} = -\frac{P_0}{V_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma > 1 \quad (\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1) \\ \downarrow \end{array} \right\} \text{adiabata meredeletlen!}$$

# Környezet

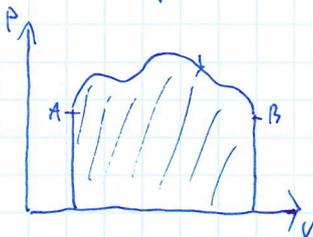


Lörnyeljárás

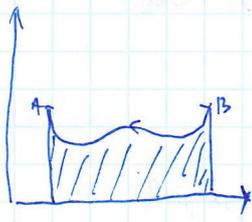
V.ö.: Newcomen vs. Watt

$$\Delta U = 0$$

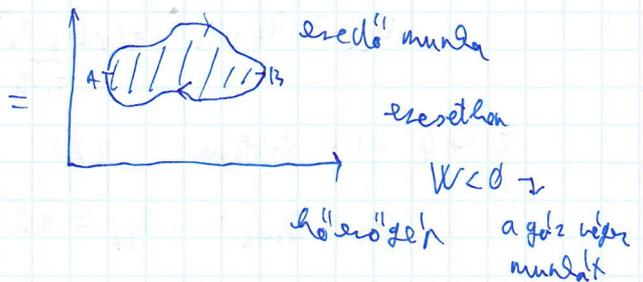
Kettőredjű



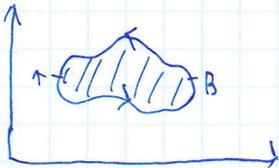
$$W = - \int_{V_A}^{V_B} P(V) dV < 0$$



$$W = - \int_{V_B}^{V_A} P(V) dV > 0$$



fordított környeljárás



$$W > 0$$

hűtőgel

Környezet

$$\Delta U = 0$$

$$\sum Q + \sum W = 0 \rightarrow \sum Q = - \sum W$$

teljes hővesztés      teljes munkavégzés

Sematikus ábra

//////  $T_1$  felső hőforrás



Rendszer

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + W = 0$$

előjeles konvenció

//////  $T_2$  alsó hőforrás

Hőerőgel

//////  $T_1$



hasznos munkavégzés

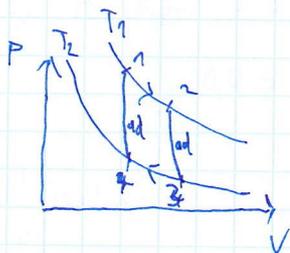
Hűtőgel

//////

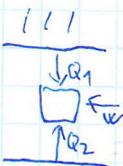
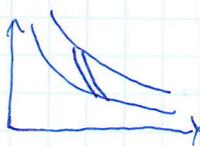


nyilvánvalóan van  
előjeles ömög 0

# Carnot - Zykloapparat



Valokäpöran



1 → 2 Isoterm  $V_1 \rightarrow V_2$   $T_1 > T_2$  isotermin

$$Q_1 = Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2 → 3 Isoterm adiabat  $Q=0$   $\Delta U < 0$   $W < 0$

$$W_{23} = U_3 - U_2 = nC_V(T_3 - T_2) < 0$$

3 → 4 Isotermin  $Q < 0$   $W > 0$  ömringöringör

$$Q_2 = Q_{3 \rightarrow 4} = -W_{34} = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} < 0$$

4 → 1 adiabatilinen  $\Delta U > 0$   $Q=0$   $W > 0$

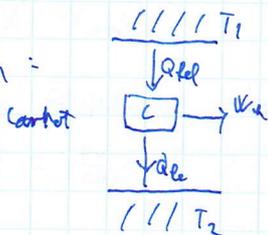
$$W_{41} = U_1 - U_4 = nC_V(T_1 - T_2) > 0$$

$$\Delta U = nC_V(T_1 - T_2) + nC_V(T_2 - T_1) = 0$$

hassios munda  
jäs ältal wäpätt munda

$$W_{\text{net}} = -W = -[W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}] = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

abrazalon:



$$Q_{\text{kel}} = Q_1$$

$$Q_{\text{ee}} = -Q_2 = |Q_2|$$

$$Q_{\text{kel}} - Q_{\text{ee}} = W_k$$

$$Q_{\text{kel}} - Q_{\text{ee}} = Q_1 + Q_2 = W_k \text{ ??}$$

$$Q_1 + Q_2 = -W \rightarrow \sum Q = -\sum W$$

hatal-fok:  $\eta = \frac{W_k}{Q_{\text{kel}}} = \frac{Q_{\text{kel}} - Q_{\text{ee}}}{Q_{\text{kel}}} = 1 - \frac{Q_{\text{ee}}}{Q_{\text{kel}}}$

$$\frac{Q_{\text{ee}}}{Q_{\text{kel}}} = \frac{nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$1-4 \text{ ad: } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$$

$$2-3 \text{ ad: } T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \\ T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \end{array} \right\} \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_4}{V_3} \Rightarrow \frac{Q_{\text{ee}}}{Q_{\text{kel}}} = \frac{T_2}{T_1}$$

hatastapa:  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$0 < \eta < 1$

$T_1 > T_2$

All: Carnot lämpövoimakone hatastapala maksimaalis

pl.: hiesu egebuu motor:  $T_1 \approx 600\text{K}$  (hiesu) }  $\eta = 30\%$   
 $T_2 \approx 400\text{K}$  (hiesu)

pl.: Pals nyomatruices reaktor:

$300^\circ\text{C}$   $125\text{ bar}$   $T_1 \approx 600\text{K}$  minen lör }  $\eta = 50\%$   
 $T_2 \approx 300\text{K}$  Dana

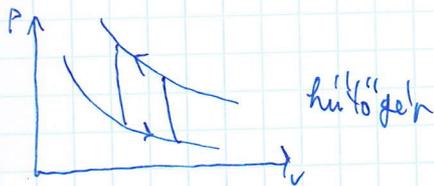
Carnot mekanizai analoia

hiz + hizivalom

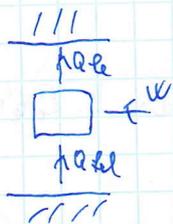


↓  $\Phi$  > eloneggel folyon di!

Juherz Carnot lämpövoimakone



(inertese elina) hizivalom



$Q_e = Q_{el} + W$

$Q_{12} = \frac{Q_e}{W} > 1$   $Q_{12} = \frac{1}{\eta} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1$

hiesu hatastapala

Inertese elina: 1 kW elina  
 3 kW hizivalom  
 4 kW hiesu

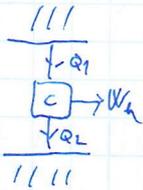
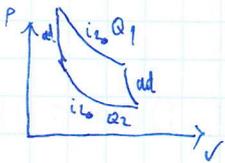
Carnot lämpövoimakone

$\frac{Q_{el}}{Q_{el}} = \frac{T_2}{T_1} = - \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$  Redukalt hiesu  $\Phi$

Kísérlet:

- jég töltés  $\rightarrow$  víz hőmérséklet + súly  $\Rightarrow$  vízszint magasság a jég olvadáspontján, jég megolvad  $\rightarrow$  drojt lejjebb megy  $\rightarrow$  víz vízszintje fölötté
- jég  $\rightarrow$  víz  $\rightarrow$  olvadt víz ott marad  $\rightarrow$  lassabban olvad  
 $\downarrow$   
 zima víz  $\rightarrow$  energia (víz) átadás által  $\rightarrow$  gyorsabban olvad
- "hőcső":  $\rightarrow$  benne víz magasság + víz: meleg helyen forró gőz (a cső egyik végén) a másikon lecsapódik  $\rightarrow$  hőtranszport  
 hővezetési tényező miatt a víz visszahúzza
- miután felmelegszik a levegő  $\Rightarrow$  hidrodinamikai sebesség  $\Rightarrow$  párolgás önszívó hatással
- $\oint$  víz + levegő (energia) átadás

Carnot



$$\eta = \frac{W_k}{Q_1} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \text{ nedűlalt hő ömög}$$

II. kötételek

Megfigyeléssel: - meleg tárgy felül a környezetet melegíti

- meleg + hideg tárgy önmagában kiegyenlítődik

(I. kötélet nem tiltja a fordítottját)

$\rightarrow$  pontán folyamatok

- csapp hirtelen  $\rightarrow$  rektifikáció

- önmagában nem állnak össze újra

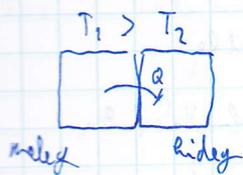
(pl.: hideg földet felmelegítve)

- "energia szétválasztás": általában patkó folyó: mozgási energiája szétválasztás

$\rightarrow$  megáll  $\rightarrow$  mozgási energiája szétválasztás mozgási energiájára

=> Folyamatok időbeli iránya meghatározott

Kísérlet:



redukált hő Q összege

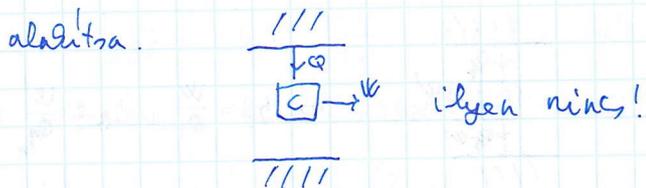
$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0 \text{ egyértelmű előjel}$$

Elemi folyamatban

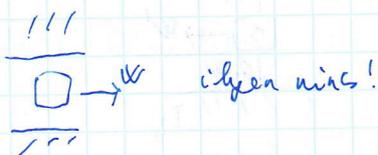
$$\delta Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0$$

II. főtétele megfogalmazásai (elmélettel)

1. Carnot: Nem lehet egy testet hőforrásból úgy teljesen munkára alakítani.



2. Thomson (Lord Kelvin): Nincs olyan, hogy egy rendszer energiája spontánul munkára alakul.



3. Clausius: Nincs olyan spontán folyamat, hogy hő a hidegebb helyről melegebbre.

4. Planck: Nem létezik másodfajú perpetuum mobile.  $\eta < 1$  szigorúan áll! (Elsőfajú  $\eta > 1$  lenne)

Összegezés: I. főtétele megmondja, hogy milyen folyamatok lehetnek véghe.

II. főtétele megmondja, hogy mely folyamatok meg is lehetnek.

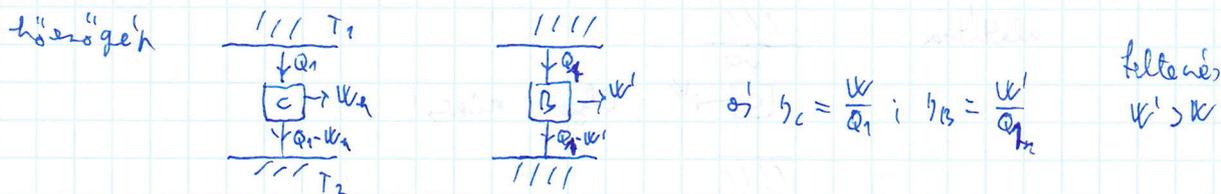
## Carnot tétel

- 2 hőforrás között működő reversibilis hőgép hatásfoka maximális  
 $\Rightarrow$  az anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől független.
- minden két azonos hőforrás között működő reversibilis hatásfoka egyenlő és független az anyagi minőségtől és a folyamat részleteitől  
 (reversibilis egyenlőség)

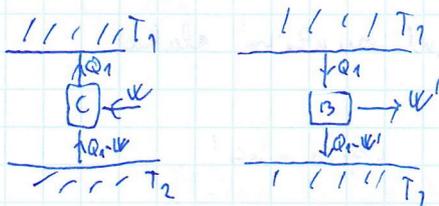
Állítás: Carnot hőforrásokat is ilyen maximális hatásfajú reversibilis hőgépeket.

Biz.: indirekt

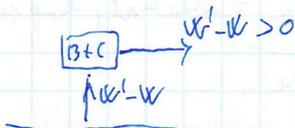
Ilyen létezik B folyamat, amire  $\eta_B > \eta_C \rightarrow$  Carnot



összevetve: Carnot: horizontális; B hőgép



eredő gép:

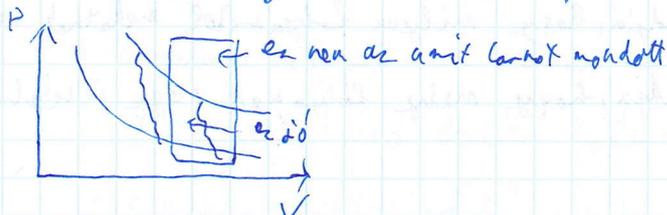


Carnot kéte megfogalmazásánál ellentmond



tehát  $\eta_B \not> \eta_C$

Megj: Mi az a hőforrás: izotermálisan gondolkodunk

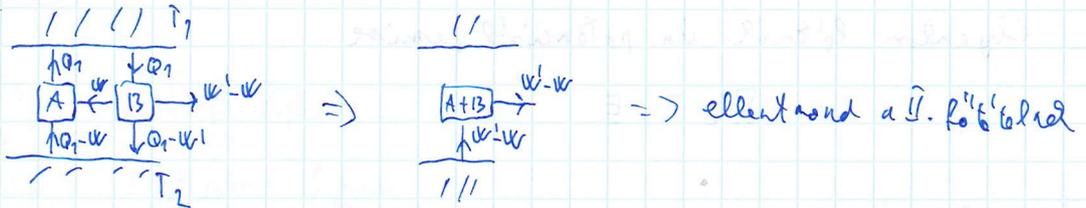


Alkötés: Carnot folyamat két köztemperaturájú anyag közötti hőátvitellel (nem csak ideális gázzal)

Biz: Teljesítmény  $T_1$  és  $T_2$  közötti két Carnot hőmotor

A: ideális gáz  $\eta_A = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

B: valami más  $\eta_B$  és  $\eta_B > \eta_A = \eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$



Termodinamikai hőmérőskala (első főtétel)

$\eta_C$  hőmérőskala függő:  $\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$  receipt: végesszám Carnot hőmotorok

ismert referencia hőmérőskala és ismeretlen hőmérőskala között

$T_0$ : olvadási víz jég keverék } normalizáltság!  
 $T_F$ : forráspontú víz

Itt mérjük  $\eta_0 = \frac{T_F - T_0}{T_F}$  és  $T_F - T_0$  legyen 100 fokos

$\eta_0 = 0,268$  adódik aránytalanilag  $\Rightarrow T_F = 373,15 K$   $T_0 = 273,15 K$



Megjegyzés: - elvi lehetőség

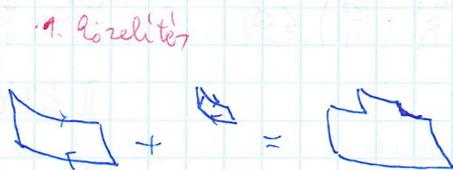
- szoba felhő pontja: Víz páráspontja

$P_2 \approx 606 Pa$   
 $T_2 = 273,16$

### Entropia

Carnot folyamat  $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

37



első izotermán leadott / felvett hő ezieszel

aldalt vizsgáljuk:  itt az adiabatikus nincsen felhett, leadott hő

Az eredeti Carnot körfolyamat leledhető, mint Carnot körfolyamatok összege így  $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$

Analógia  $\oint E_{grav} dr = 0$   $\oint E_{stat} dr = 0$

ilyenkor létezik ún. potenciál, amire

$$\nabla \phi = -E$$

Következőleg:

$\frac{\delta Q}{T}$  egy reverzibilis folyamatban egy ún. állapotfüggő teljes differenciálja

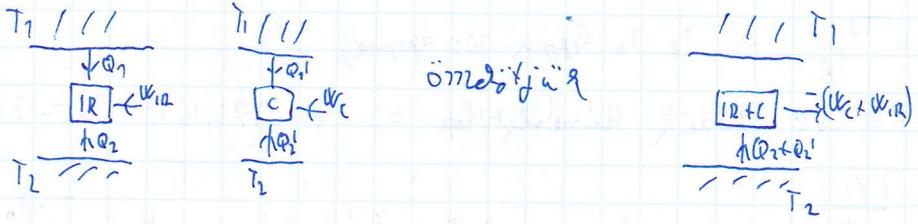
Es az ún. entrópia:

$$ds \triangleq \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

def!

Irreverzibilis folyamat s' entrópia, s

Teljesítmény egy irreverzibilis folyamatot + rev. Carnot



a II. főtétele szerint nem lehet netto leadott

munka  $W_{12} + W_c \geq 0$

12-re  $W_{12} = -(Q_1 + Q_2)$

C-re  $W_c = -Q_1' - Q_2'$   $\Leftrightarrow \frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} = 0$  (mert Carnot)

$Q_2' = -\frac{T_2}{T_1} Q_1'$

Eredő munka  $W_{12} + W_c = -Q_1 - Q_2 - Q_1' - Q_2' = -Q_2 + \frac{T_2}{T_1} Q_1' = -Q_2 - Q_1 \frac{T_2}{T_1} \geq 0 \Leftarrow$  II. főtétele

innen  $Q_2 + Q_1 \frac{T_2}{T_1} \leq 0$  átrendezve

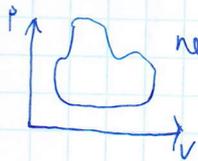
$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$

pozitív

v.o. 

II főtétele következménye  
= van reverzibilisne < irreverzibilisne

Álltalában



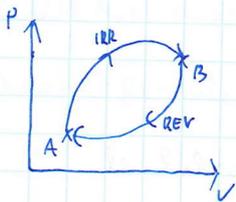
nem reverzibilis,

$$\oint \frac{\delta Q^{irr}}{T} < \phi$$

általában

$$\boxed{\oint \frac{\delta Q}{T} \leq \phi}$$

Véges folyamatra



$$\oint \frac{\delta Q}{T} < \phi$$

$$\int_A^B \frac{\delta Q^{irr}}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q^{rev}}{T} < 0$$

$$S_A - S_B$$

Általában

$$\boxed{\int_A^B \frac{\delta Q^{irr}}{T} < S_B - S_A}$$

Clarius - egyszerűsége

1)  $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq \phi$  körf.

2)  $\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq S_B - S_A$  véges

3)  $\frac{\delta Q}{\Phi} \leq ds$  elemi

II. főtételel matematikai alája

Entropia produkció

irreverzibilis folyamatban  $\delta Q^{irr} < T ds \rightarrow$  létezik  $ds^{prod} > 0$

vagy a II. főtételel  $ds = ds^{prod} + \frac{\delta Q}{T}$ ; reverzibilis folyamatban  $ds^{prod} = 0$

irreverzibilis - II -  $ds^{prod} > 0$

Zárt rendszerre  $\delta Q = 0 \rightarrow ds = ds^{prod} \geq 0$

Entropia a zárt rendszerbeli spontán folyamatokban nem csökkenhet.

Jón rajd:

$$ds^{prod} = \frac{\delta W^{irr}}{T}$$

irreverzibilis  $\delta Q$  munkája

39

Véges folyamatra:

$$S_B - S_A \geq \int \frac{\delta Q}{T} \text{ ha ez } \phi \rightarrow S_B - S_A \geq 0 \text{ entropiakövetelés tétele.}$$

# Fizika'faldalalalalal (halmas allapot valtozasol)

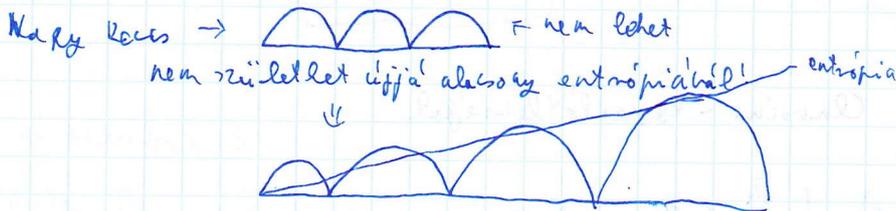
latens  $\rightarrow \frac{\Delta Q_T}{T} = \Delta S_T \leftarrow$  rendszerlense'g megno'l.

## Entropia noveledes telele:

- folyamatok "valrosa egysegtelen" (szal ilyemel nemmel vegbe zart rendszerben) abszolusome szoltsanlet
- zart rendszerbe egysegtely  $S = \text{maximalis} \Leftrightarrow ds = 0$
- Univerzumra ne'zve: "ho'halal"  $\rightarrow$  energia egysegtelenen osszilt el.  
 $\downarrow$   
 nem lehetnek az ideje (m'rt el szollet volna az ennie az entropia maximum)

most vannak energia gradiensek

- Univerzum jo'sse'je:  $\rightarrow$  lehetelen ideje' tagol



## Endelense'get:

- leheto egydalnal is van entropia'jal  $\rightarrow$  van ho'mel'sellettul  
 $\hookrightarrow$  lehet is ho'mel'sellettul rugalzas

Flawling - rugalzas

- reversible computing

Landauer informacio's entropia

1 bit informacio' to'rlense'het  $2_0 T \ln 2$  energia kell

$dQ = T ds \rightarrow$  informacio's entropia  $ds = 2_0 \ln 2$

rev. comp  $\leftrightarrow$  z'aroljunal informacio's to'rlense'

pe'lda: mai z'aroljunal ho'latol

$\frac{10 \text{ W}}{10^3} \text{ proc} \leftrightarrow 40 \text{ utlen} = 4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{s}}$

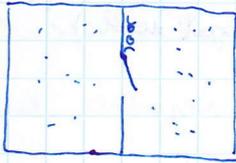
Landauer  $4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{s}}$

$\frac{2_0 T \ln 2}{\text{s}} \rightarrow 10^{21} \text{ J}$

$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 10^{10} \frac{\text{bit}}{\text{s}} \cdot 10^{21} \text{ J} = 10^{11} \text{ W} \text{ teljes it'el'ez} \\ \text{de a gyabolalban } 10 \text{ W} \end{array} \right\}$

mai gen 2b 12  
nap'sa'f'randdel  
rossabb mint az  
elmelet: b'ale'z's's's'id

Maxwell - de'mon (gedanken experiment)



ha balról jön gyorsabbak a kinyitáskor, lassítom  
jobbra fordítva

⇓

baloldalon kevés, jobboldalon telmelezés

⇓

De'mon munkát végez

Modern gondolatmenet: információ tárolás, + feldolgozás van

A hőtan Fundamentális egyenlete (F.E.)

I. főtétel  $du = \delta W + \delta Q$

reverzibilis folyamatban  $Tds = \delta Q^{rev}$

eset:  $du = \delta Q^{rev} + \delta W^{rev} = Tds - pdv$   
reverzibilis  
teljesgati munka

Ez az állítás, eh igaz nem csak reverzibilis esetben is!

$du = \delta Q^{imer} + \delta W^{imer} = Tds - pdv$

Zúzó-zúzó  $\left. \begin{matrix} \delta Q^{imer} \neq Tds \\ \delta W^{imer} \neq -pdv \end{matrix} \right\} \text{De együtt igaz!}$

Voigt:  $ds = \frac{\delta Q}{T} + ds^{Prod}$   
elt. folyamat

F.E:  $Tds - pdv = \delta Q + \delta W$   $\delta W = -pdv + \delta W^{imer}$   
elt. folyamatok

$\delta Q + ds^{Prod} \cdot T - pdv = \delta Q + \delta W^{imer} - pdv$   
 $ds^{Prod} = \frac{\delta W^{imer}}{T}$

produkcio, entropiát irreverzibilis munkavégzés hozza létre

41

F.E nem más mint I. és II. főtétel egyben

F.E általános:  $du = Tds - pdv \rightarrow ds = \frac{1}{T}(du + pdv)$ , az általános munka:

int	ext
-P	V
$\mu$	n
e	q
$x_i$	$\xi_i$

$\delta W = -pdv + \mu dn + \sum_i x_i d\xi_i$

$ds = \frac{1}{T}(du + pdv - \mu dn - \sum x_i d\xi_i)$

Ideális gáz entropiája (számszerű, folyamat, termodinamika)

$$U = U(T); \quad PV = nRT$$

"fizika"  $\rightarrow ds = \frac{1}{T} du + \frac{P}{T} dv$  itt  $U$  nem függ  $V$ -tól

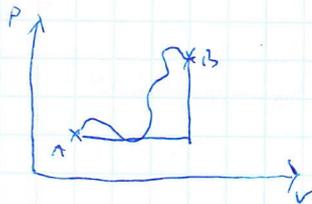
"molek"  $du = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = nC_V dT$  } ezzel F.E.:  $ds = nC_V \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV$

o ideális gázra

"molek"  $S = S(T, V) \rightarrow ds = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$   $dT$  &  $dV$  tetszőleges, innen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{nC_V}{T} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

S parciális deriváltak ismerem



$$S_B - S_A = \int_A^B ds$$

a zárt integrál = egymásután multi integrál

ezért  $S(T, V) = S_0(T_0, V_0) + \int_{T_0}^T \frac{nC_V}{T'} dT' + \int_{V_0}^V \frac{nR}{V'} dV'$

$$S(T, V) = S_0(T_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

Alternatív:  $S(T, P)$ -re

$$S(T, P) = S_0(T_0, P_0) + nC_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

$$S(T, P) = S_0(T_0, P_0) + nC_P \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Alternatív  $S(P, V)$ -re

$$S(P, V) = S_0(P_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + nC_V \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$S(P, V) = S_0(P_0, V_0) + nC_V \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + nC_P \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

Détermináció:

ha  $T \rightarrow T_0 \Rightarrow S \rightarrow S_0$

ha  $T_0 \rightarrow 0 \Rightarrow$  -entó nem értelmes

Ideális gáz koncepciója nem lehet értelmes  $T \rightarrow 0$  határesetben

Fay-dussac állítás és entropia

$V_1 \rightarrow V_2$  társul  $dU=0 \quad dV=0 \quad dQ=0$

$P_1 \rightarrow P_2$  sőt is

Ábrázoljuk a P-V síkon

nem ábrázolható P-V-n!



a folyamat síkja a P-V síktól

Ázsa! térszél  $\rightarrow$  lenne megvalósítható

Nem reverzibilis, spontánul végrehajtható.

$S_1$  kezdeti entrópia

$$S_1(T_1, V_1) \approx S_0(T_0, V_0) + n C_v \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + n R \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

$S_2$  végállapot entrópiája

$$S_2(T_2, V_2) = S_0(T_0, V_0) + n C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + n R \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)$$

$$\text{és } T_1 = T_2$$

$$S_2 - S_1 = n R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0 \quad \text{nél az entrópia}$$

$\Downarrow$   
irreverzibilis, spontánul végrehajtható

$\Delta S$  entrópia a szigetelt rendszeri folyamatokban

$U_1$	$V_1$	$U_2$	$V_2$
$T_1$	$P_1$	$T_2$	$P_2$
$M_1$	$n_1$	$M_2$	$n_2$

Szétválasztás: termikus, mechanikai (anyag)

Közvetlen: energia  $dU_1 = -dU_2$

megmunkálás

terjedelmek  $dV_1 = -dV_2$

anyag

részesedések  $dn_1 = -dn_2$

megm.

$$\text{F.E.: } dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{P_1}{T_1} dV_1 - \frac{\mu_1}{T_1} dn_1$$

$$dS_2 = \frac{dU_2}{T_2} + \frac{P_2}{T_2} dV_2 - \frac{\mu_2}{T_2} dn_2$$

$$\text{entrópia változás, } dS = dS_1 + dS_2 = dU_1 \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) + dV_1 \left( \frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) - dn_1 \left( \frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} \right)$$

1. példa:  $T_1 = T_2$ ,  $P_1 > P_2$ ,  $M_1 = M_2 \Rightarrow dS = dV_1 \left( \frac{P_1}{T} - \frac{P_2}{T} \right) > 0$    
 II. főtételel  $dV_1 > 0 \rightarrow 1 \rightarrow$  tágul   
 ahogy vártuk

2. példa:  $P_1 = P_2$ ,  $M_1 = M_2$ ,  $T_1 > T_2 \Rightarrow dS = \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 > 0$    
 I. főtételel  $dU_1 < 0 \rightarrow 1 \rightarrow$  hőt ad le   
 ahogy vártuk

3. példa:  $T_1 = T_2$ ,  $P_1 = P_2$ ,  $M_1 > M_2 \Rightarrow dS = - \frac{dn_1}{T} (M_1 - M_2) > 0 \rightarrow dn_1 < 0 \rightarrow 1 \rightarrow$  a 2. le a 1. oldalról   
 részecskéket

Spontán szigetelt rendszeri folyamatok a II. főtételel következményei.

Addig tart a folyamat, amíg  $dS > 0$  nem lesz, akkor  $S = \text{max}$ .

Belső energia térfogatfüggése

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = ? \quad \text{vagy: } c_p - c_v = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P \left( P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right)$$

$$dU = \delta Q_p - PdV \quad dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$$n(c_p - c_v) dT = PdV + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \quad dU(dT) = ?$$

$$V = V(P, T) \quad dV = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT$$

Φ izoterma

} }

innen:  $C_p - C_v = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right]$

Material + F.E.

$$dS = \frac{1}{T} (dU + PdV)$$

"material"  $dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$  (2)  $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} dS = nC_v \frac{dT}{T} + dV \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right]$  (1)

"material"  $dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$   $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$  S megfelelő "parciális deriváltakat" megadják

(1) = (2)  $\Leftrightarrow \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{nC_v}{T} = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ ;  $\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{P}{T}$

Young-tétel  $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = -\frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \left( \frac{-P}{T^2} \right) + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

Young-tétel  
deriváltak

itt T konstans deriváltak  $\Rightarrow V = dU$

Young-tétel  $\phi = -\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T - P + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = -P + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

Beírunk  $C_p - C_v$ -et

$$C_p - C_v = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \cdot T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

[ HF f. gázoknál: F.E. más, az alapja  $dS = \frac{1}{T} (dU - Xd\xi) \rightarrow \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_T = -T \left( \frac{\partial X}{\partial T} \right)_\xi + X$  ]

Teljesen deriválna  $C_p - C_v = \frac{1}{n} \cdot V \beta_P \cdot T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$

1. pl.: ideális gáz  $PV = nRT$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{P}{T} \text{ s } V \beta_P = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{V}{T}$$

mindent beírunk:

$$C_p - C_v = \frac{1}{n} \frac{V}{T} \cdot T \cdot \frac{P}{T} = \frac{P \cdot V}{nT} = R$$

2. pl.: VDW gáz  $\left( P + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$   $P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left( P + \frac{an^2}{V^2} \right) = \frac{nR}{V - nb}$$

innen  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{an^2}{V^2} \neq 0$  v.ö. ideális gáz

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \neq \frac{\frac{\partial P}{\partial V}}{\frac{\partial T}{\partial V}}; \quad f(x,y) = \text{const} \quad df=0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_f = - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}$$

Állapotfüggvény:  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = - \frac{V\beta_P}{-V\alpha_T} = \frac{\beta_P}{\alpha_T}$  ekkor:

$$\alpha_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

$$C_p - C_v = \frac{1}{n} V \beta_P \frac{T \beta_P}{\alpha_T}$$

ideális gáz:  $\alpha_T = + \frac{1}{V} \frac{1}{p} nRT = \frac{1}{p}$

$$C_p - C_v = \frac{V T \beta_P^2}{n \alpha_T}$$

Empirikus paramétereket érintően  $C_p, V, \beta_P, \alpha_T$

Ellenőrzés: ideális gázra

$$C_p - C_v = \frac{V T P}{T^2 n} = \frac{PV}{nT} = R \quad \checkmark$$

### Entropia statisztikus értelmezése

Fenomenológikus  $S$  fogalom  $\longleftrightarrow$  statisztikus fizika  
axiómák

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ha } S \text{ megvan statisztikailag} \rightarrow T, P \text{ is megvan} \\ \text{és fordítva} \end{array} \right\}$$

$$ds = \frac{1}{T} (du + PdV) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{UV} = - \frac{\mu}{T} \quad \left\{ \begin{array}{l} ds = \frac{1}{T} (du + PdV - \mu dn) \end{array} \right.$$

Boltzmann-hipotézis:

Az egyensúly a legvalószínűbb állapot.

Sok részecske van  $6 \cdot 10^{23}$  db

Induktív szint a terméket statisztikus módszerrel számítjuk ki.

Ha B-H igaz  $\rightarrow$  adott állapot valószínűségeket kell meghatározni  $\rightarrow$

$\rightarrow$  ehhez F.É alapján meghatározni mennyiségét megkapjuk  $\rightarrow$  számolás  $\rightarrow$

$\rightarrow$  összerakás, termékekkel

$U, f$  fogalmak:

Macroállapot: adott makroszkopikus állapotjelöléssel leírható állapot  $(P, T, V, M, \dots)$

Kelet macroállapot azonos, ha az  $\forall$  állapotjelölés azonos.

Mikroállapot: a részecskéket összerakva jellemezhető  $(p, r)$  értékek sorozata

95

állítás: egy makroállapotot sok mikroállapot valósít meg

A B-H nyelvén: a makroállapot valójában meg, amelyet a legtöbb mikroállapot valósít meg.

Entropia a B-H szerint:

- S egyensúlyban maximális

- jelöljük  $W$ -vel a mikroállapotok számát,  $W_{\text{nagy}} \approx 10^{23}$

állítás  $S$  a  $W$  monoton függvénye  $\Leftrightarrow$  az a B-H

$S$  extenzív, alrendezésre  $S = S_1 + S_2$

Ha két alrendszer egymástól független  $W_1, W_2$

$$\text{szedő} \quad W = W_1 \cdot W_2$$

Logyer  $S = g(W)$ ; monoton

$$S_1 = g(W_1) ; S_2 = g(W_2)$$

$$S_1 + S_2 = g(W_1) + g(W_2) = g(W_1 \cdot W_2)$$

fü. egyszerű, ún. additív fü. egyszerű

$$S \approx \ln W \quad \text{ell.:} \quad \ln(W_1 \cdot W_2) = \ln W_1 + \ln W_2 \quad \checkmark$$

$\ln$  mindenütt használható

Van egy analógia a térfogattal

$$S = \alpha_B \ln W \quad \alpha_B = 1,38 \cdot 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Alternatív entropia kifejezés

$$\frac{S}{W} = -\alpha_B \sum_i p_i \ln p_i \quad ; p_i : i\text{-edik mikroállapot valószínűsége}$$

Következő:

A hőmérséklet nem abszolút, hanem valószínűségi jellegű.

Kiegészítés: - Kvantummechanika: valószínűség

Einstein: "isten nem dob kockát"

Rejtett változó

1970-es évek Bell-egyenletével  $\rightarrow$  Einstein tévedett

- Készlet: komplex rendszer, jövedelmek nem megismerhetők

Entropia statisztikus értelmezése, feladat

BH:  $S = k_B \ln W$

Gibbs:  $\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$

feladat: mennyi a valószínűsége annak, hogy egy porzem gőzmelegedése spontán 1 K-tal csökken?

porzem  $\approx 1 \mu\text{g}$ ; 300K-en  $\delta Q = m C \Delta T = 1 \mu\text{J}$   
 $10^{-7} \text{ J}$      $1 \text{ K}$

$ds = \frac{\delta Q}{T} \rightarrow$  entropia megváltozása  $\Delta S = S_2 - S_1 = -\frac{\delta Q}{T_1} + \frac{\delta Q}{T_2} \approx -10^{-17} \frac{\text{J}}{\text{K}}$   
 $300\text{K}-1\text{K}$      $300\text{K}$

előzetes állapot  $W_1$

előzetes állapot  $W_2$

$-10^{-17} \frac{\text{J}}{\text{K}} = k_B \ln \frac{W_2}{W_1} \Rightarrow W_2 < W_1$

$k_B \approx 10^{-23}$

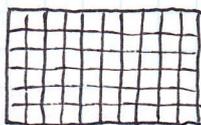
$\Rightarrow \ln \frac{W_2}{W_1} = -10^6 \Rightarrow W_2 = W_1 \cdot e^{-10^6}$

$e^{-10^6} \approx (e^2)^{-5 \cdot 10^5} \ll 26^{-10^5}$

majom sejtél  $\rightarrow$  most egy skalespear dráma!

$(10^5 \text{ sejt}) 26^{10^5}$

### Statisztikai modellek



Mennyi a legvalószínűbb állapot?

$\sum_{i=1}^g N_i = N$ ;  $g$  db doboz

Ide  $N$  db részecskét  $N$  db dobozba, hányféleképpen (megkülönböztethető részecskék)

mindegyikben pontosan 1 db részecske van?  $\rightarrow W = N!$

$N$  db részecskét 2 db dobozba, rendre  $N_1, N_2 \dots N_g$  db

részecske van bennük  $W(N_1, N_2 \dots N_g) = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_g!}$

BH:  $W(N_1 \dots N_g)$  maximumát keresni a  $\sum_{i=1}^g N_i = N$  feltétel (elgyszer) mellett.

$\ln W$  maximumát keresni ( $\ln$ : monoton fun!)

Lagrange-szabó multiplikatív módszerrel

$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$  Stirling formula

$\ln N! = \frac{1}{2} (\ln 2\pi + \ln N) + N \ln N - N$

, ha  $N \approx 6 \cdot 10^{23} \Rightarrow \ln 2\pi$  és  $\ln N$  elhanyagolható az  $N$ -hez képest

$\ln N! \approx N \ln N - N$

## Lagrange módszer

max  $f(x,y)$  - + állandó, mielőtt  $g(x,y) = \text{const}$

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)$  függvény

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - \text{const})$$

a megoldás,  $(x,y)$  szükséges feltétel

$$d\mathcal{L} = 0$$

$$\Delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_{y,\lambda} dx + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\right)_{x,\lambda} dy + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_{x,y} d\lambda = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_{x,y} = g(x,y) - \text{const} \rightarrow \text{ennek a zérusa}$$

## Egyenletrendszer

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_{y,\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,\lambda} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{mindegyik } 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\right)_{x,\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x$$

A mi esetünkben:

$$\mathcal{L}(N_1, N_2, \dots, N_k) = \ln W(N_1, \dots, N_k) + \lambda \left( \sum_{i=1}^k N_i - N \right)$$

$N_i$  -ket folytonos változóként tekintjük

$$d\mathcal{L}(N_1, \dots, N_k) = 0 \quad 2+1 \text{ egyenlet és } 2+1 \text{ változó}$$

$$\ln W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_k!} = \ln N! - \sum_i \ln N_i! \approx N \ln N - N - \sum_i (N_i \ln N_i - N_i) = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i$$

$$\mathcal{L} = N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i + \lambda \left( \sum_i N_i - N \right)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_i}\right)_{\text{többi } N_j \text{ konst}} = -1 - \ln N_i + \lambda = 0 \Rightarrow \text{megoldás } \forall N_i \text{ egyenlő és } N_i = e^\lambda$$

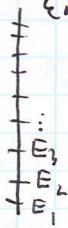
$$\Downarrow \\ \sum_i N_i = N \rightarrow N_i = \frac{N}{k} = e^\lambda$$

$\forall$  dolgotlan azonos számú részecské van.

2. modell: Maxwell-Boltzmann eloszlás

Energia szintjei eloszlás  $i$ -edik állapotban  $N_i$  db részecske van

$$\sum_i N_i = N; \quad \sum_i N_i E_i = E$$



Segédlet:  $-\Delta \ln(N_1, \dots, N_n) = \ln W(N_1, \dots, N_n) + \lambda_1 (\sum_i N_i - N) + \lambda_2 (\sum_i N_i E_i - E)$

egyenletrendszer, 2+2 db

$$\frac{\partial \ln W}{\partial N_i} + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0$$

$$-\ln N_i + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0 \quad N_i = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 E_i} \quad \text{bevezetve } A = e^{\lambda_1} \Rightarrow \beta = -\lambda_2$$

$$N_i = A \cdot e^{-\beta E_i}$$

$$\sum_i N_i = N \rightarrow A \sum_i e^{-\beta E_i} = N \Rightarrow \frac{N}{A} = \sum_i e^{-\beta E_i} = Z$$

allapotösszeg

innen  $A = \frac{N}{Z} \rightarrow N_i = \frac{N}{Z} \cdot e^{-\beta E_i}$

$Z$  "osztóösszeg, rendszerállók"

adatt: állapotok száma:  $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$

v.ö. barometrikus magasságformula  $P(z) = P(z=0) \cdot e^{-\frac{mgh}{\beta T}}$

Entropia a M-B eloszlásra

$$S = k_B \ln W \quad \text{és} \quad W(N_1, N_2, \dots, N_n) = \frac{N!}{N_1! \dots N_n!}$$

$$\ln W = N \ln N - \sum_i (N_i \ln N_i)$$

$$\text{ígyis} \text{ és } N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i} : \ln W = N \ln N - \sum_i \left[ \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i} \cdot (\ln N - \ln Z - \beta E_i) \right]$$

$$= N \ln N - N \ln N + N \ln Z + \sum_i \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i} \beta E_i$$

$\beta E$

$$S = k_B N \ln Z + k_B \beta E$$

F.E.:  $dS = \frac{1}{T} (dU + PdV)$  elvezetésű, hogy a juttatott  $E$  szorzattal

$$\left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = \frac{1}{T} \quad \text{ezért} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = k_B \beta = \frac{1}{T} \Rightarrow \beta = \frac{1}{k_B T}$$

49

$\beta$ : termodinamikai hőmérséklet

A feljebb M-B eredmény

$$N_i = \frac{N}{\sum_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Gibbs-féle entropia formula a M-B eloszlásra

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

$$\text{itt } p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$$

$$\text{elvégre: } \ln p_i = -\ln Z - \beta E_i$$

$$\text{tehát } -k_B \sum_i p_i (-\ln Z - \beta E_i) = k_B \ln Z + k_B \beta \langle E \rangle$$

ez éppen  $\frac{S}{N}$  értéke!

$$\text{most } p_i = \frac{N_i}{N}$$

### Kvantum statisztika

Boltzmann  $p(E) \sim e^{-\frac{E}{k_B T}}$

Tapasztalat szerint

adott energia  
(kvantum) állapotban

csak 1 részecske  
lehet

↓  
fermionok

félszpinű

e<sup>-</sup>, kvarkok

tetszőleges számú  
részecske lehet

↓  
bosonok

egész spinű

photon, gluon, W<sup>±</sup>, Z<sup>0</sup>, H<sup>0</sup>

Fermionok statisztikája: i-edik állapotban 0 vagy 1 részecske.

$p_0$ : i-edik állapot nincs betöltve

$p_1$ : i-edik állapot egyrészesen van betöltve

$$p_1 + p_0 = 1$$

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{-\beta E}; \text{ ha van költve } +E \text{ energia}$$

~~~~~

Boltzmann - tétel (0-1 állítás, itt nem bizonyítjuk)

2 egyenlet, 2 ismeretlen:

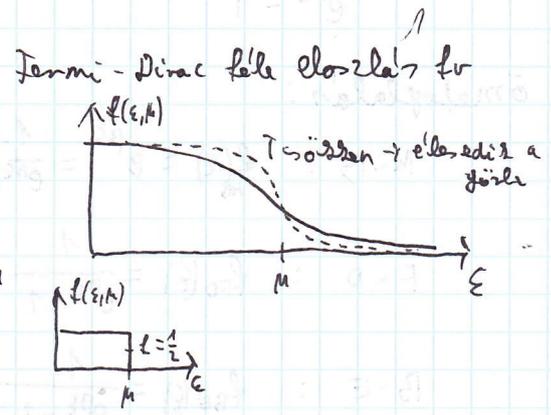
$$p_0 = \frac{1}{1 + e^{-\beta \epsilon}} \quad p_1 = \frac{e^{-\beta \epsilon}}{1 + e^{-\beta \epsilon}}$$

A kétállapotú rendszer

$$\langle n \rangle = \sum p_i = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = \frac{e^{-\beta \epsilon}}{1 + e^{-\beta \epsilon}} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon} + 1}$$

veges szimiai potenciálra  $f(\epsilon, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$

vegyél  $T \rightarrow 0$   $f(\epsilon, \mu) = \begin{cases} 1 & \epsilon < \mu \\ 0 & \epsilon > \mu \end{cases}$



Bozonok > Yatinzillatja:

- minden állapotot  $N = 0, 1, \dots, \infty$

Tk egy állapot máz n-rezsen be van töltve  $p_n$ : valószínűség +1 vezessék té energiá

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = e^{-\beta \epsilon} \text{ s' } \sum_{i=0}^{n+1} p_i = 1$$

n+1 dr egyenlet

n+2 dr ismeretlen n+2 dr egyenlet

megoldás:  $p_n = \frac{e^{-n\beta \epsilon}}{1 + e^{-\beta \epsilon} + e^{-2\beta \epsilon} + \dots + e^{-n\beta \epsilon}}$  az jó megoldás

a kereso  $Z = 1 + e^{-\beta \epsilon} + \dots + e^{-n\beta \epsilon} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$  (ah  $|q| < 1$  s'  $n \rightarrow \infty$   $Z = \frac{1}{1 - q}$ )

telat  $n \rightarrow \infty$   $Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon}}$

A kétállapotú, végtelen számú

$$\langle n \rangle = \sum_i i p_i = \frac{1}{Z} \sum_i i e^{-i\beta \epsilon}$$

$$\frac{\partial (e^{-i\beta \epsilon})}{\partial (-\beta \epsilon)} = i e^{-i\beta \epsilon} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Eszel} \\ \langle n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i \frac{\partial e^{-i\beta \epsilon}}{\partial (-\beta \epsilon)} = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial (-\beta \epsilon)} \sum_i e^{-i\beta \epsilon} = \\ = \frac{\partial (1 - e^{-\beta \epsilon})}{\partial (-\beta \epsilon)} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon}} \right) = \\ = \frac{\partial (1 - e^{-\beta \epsilon})}{\partial (-\beta \epsilon)} (-1) (-1) e^{-\beta \epsilon} \cdot \frac{1}{(1 - e^{-\beta \epsilon})^2} = \\ \langle n \rangle = \frac{e^{-\beta \epsilon}}{1 - e^{-\beta \epsilon}} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon} - 1} \end{array} \right\}$$

Bose-Einstein féle eloszlású.

$$f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

ömeloglalás:

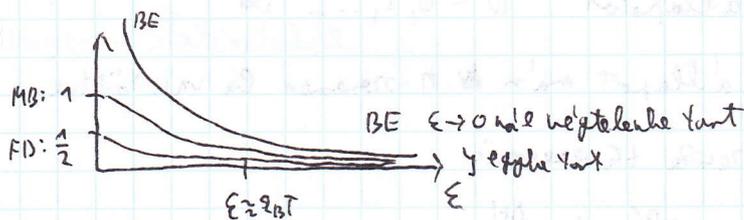
M-B :  $f_{MB}(\epsilon) = e^{-\beta\epsilon} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon}}$  klasszikus részecske

F-D :  $f_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} + 1}$  fermion

B-E :  $f_{BE}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1}$  bozon

Ha  $\epsilon \gg k_B T$  akkor FD és BE is átmenet MB - lra

eggyor  $e^{\beta\epsilon} \gg 1$



Termodinamikai potenciálok

U : belső energia

H : entalpia

F : szabad energia (Helmholtz-féle szabadenergia)

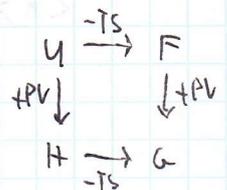
G : Gibbs potenciál (szabadentalpia, Gibbs-féle szabadenergia)

$$dU = Tds - pdv \leftarrow \text{F.E.} \quad \text{M} \quad U = U(S, V) \quad \text{szé extenzívok függ}$$

$$H = U + PV \rightarrow dH = dU + PdV + VdP = Tds + VdP$$

$$F = U - Tds \rightarrow dF = dU - Tds - SdT = -SdT - pdv$$

$$G = U - Ts + PV \rightarrow dG = dU - Tds - SdT + PdV + VdP = -SdT + VdP$$



Értesít :  $U = U(S, V)$

$H = H(S, P)$

$F = F(T, V)$

$G = G(T, P)$

## Legendre transformáció

Lagrange - kv harmonikus oszcillátor

$$L(x, \dot{x}) = L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} D x^2$$

$$L \rightarrow H(x, p) = L(x, \dot{x})$$

$$H(x, p) = \dot{x} \cdot p - L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

$\dot{x} \rightarrow p$  - re átírás,  $\dot{x} p$  levonás

$$U(S, V) \rightarrow H(S, P)$$

$V \rightarrow P$  átírás,  $(-pV)$  levonás

Legendre transformáció

$$U(S, V) \xrightarrow{\text{Legendre}} H = U + PV \quad dH = TdS + VdP$$

$$F = U - TS \quad dF = -SdT - PdV$$

$$dU = Tds - pdv$$

$$G = U + PV - TS \quad dG = -SdT + VdP$$

## Fizikai tartalmak

U: rendszerrel önmagában mechanikai energiája "fizika"

H: "teljes";  $dH = dQ_p$  felvett hő vagy elcsúszt hő

F: "gépérték" a rendszerből maximálisan kinyerhető mechanikai munka

G: "hibrid" nem mechanikai és nem termikus folyamatok mérése (anyagok folyadékok)

Uj fogalom: fundamentális - kv: <sup>(karakter)</sup> Termodinamikai potenciál az ún. saját változóival kifejezve

$$U = U(S, V) \quad ; \quad \text{de pl: } U = U(T, V) \text{ termodinamikai pot., de nem fund. kv.}$$

$$H = H(S, P)$$

$$F = F(T, V)$$

$$G = G(T, P)$$

G-nél csak intenzív saját változói vannak

Fundamentális kv-ek és deriváltak

$$dU = Tds - pdv$$

$$dH = Tds + VdP$$

$$dF = -SdT - PdV$$

$$dG = -SdT + VdP$$

: fizika

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \quad dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P dS + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S dP \quad dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \quad dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T dP$$

$$\Downarrow \quad \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P \quad \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V$$

Fund. funkciók első deriváltjai állapotszenvedés

Ma' adni a deriváltak (Maxwell-összefüggések)

$$n.l.: \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\right)_S = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\right)_V \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Ez a fizikai

menyiségeket használ:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = V \cdot \beta_P$$

$$HF: S(P, T) \stackrel{\text{időzárta vált}}{=} \text{és az a fenti azonosítást}$$

és az a fenti azonosítást

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_T} = \frac{\beta_P}{\alpha_T}$$

$$\text{innen: } \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\beta_P}{\alpha_T}$$

Maxwell's id. függvény

Fundamentális funkciók első deriváltak

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \quad \text{és } F = U - TS$$

$$\text{innen } F = U + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad \left. \begin{array}{l} \text{innen } F = U + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \\ \text{közvetlen } G = H + T \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P \end{array} \right\} \text{ ún. Gibbs-Helmholtz összefüggések}$$

$$\text{közvetlen } G = H + T \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$$

Euler-tétel (Euler-összefüggések)

$$dU = TdS - PdV$$

Tapasztalat szerint ha egy rendszer  $\lambda$  részecskére növelünk  $X \xrightarrow{\text{int}} X \quad \left\{ \text{és } \lambda \right\}$

$$\text{és } U(S, V, n) \Rightarrow U(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \lambda U(S, V, n)$$

$$H(P, S, n) \Rightarrow H(\lambda S, P, \lambda n) = \lambda H(S, P, n)$$

$$F(T, V, n) \Rightarrow F(T, \lambda V, \lambda n) = \lambda F(T, V, n)$$

$$G(T, P, n) \Rightarrow G(T, P, \lambda n) = \lambda G(T, P, n)$$

Euler-tétel:

ha  $f(x)$  homogén, akkor  $\lambda f(x) = f(\lambda x)$

akkor ennek egyetlen megoldása a

homogén lineáris fv.  $f(x) = cx$

"Béz":  $\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial(\lambda x)} \frac{\partial(\lambda x)}{\partial \lambda} = f'(x) \cdot x \Rightarrow$  innen:  
 $f(x) = f'(x) \cdot x$

csak ha a lineáris oldja meg

Állalmasokra a fund. reláció

$U = TS - PV + \mu n \rightarrow H = U + PV = TS + \mu n$

Entalpia

$F = U - TS = -PV + \mu n$

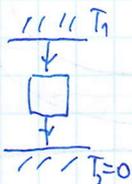
$G = U - TS + PV = \mu n \rightarrow$  köi: nem kell a más termikus munkavégzés

III. főtétele (IV. főtétele: Onsager reláció)

Motiváció:  $-S = S_0 + \dots$  mennyi az  $S(T=0)=?$

- mennyi  $U(T=0)=?$

- Carnot kört.



$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$   $T_2 \rightarrow 0$ -ra  $\eta \rightarrow 1$  lenne

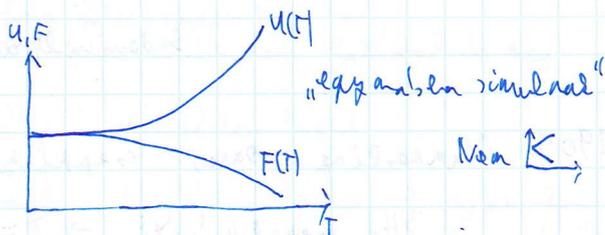
Kísérlet: Walter Meit (1906-1912)

Edmuni realitást vizsgálta  $\rightarrow$  reakció hő a T szögletével nőnek  
 Látszólag 0-ba tart.

Planck általánosítása a matematikája:

III. főtétele:  $\lim_{T \rightarrow 0} U(T) = \lim_{T \rightarrow 0} F(T)$

$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial U(T)}{\partial T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial F(T)}{\partial T}$



Következtetés:  $F = U - TS \Rightarrow S = \frac{U - F}{T}$

$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{U - F}{T} \right) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)}{1} = 0$  az entropia a 0-ba tart

$W = 1$

nem degenerált alapállapot

$$dQ^{rev} = C(T) dT$$

Fajla:

$$S = S_0 + \int_0^T \frac{dQ^{rev}(T)}{T} = S(T=0) + \int_0^T \frac{C(T) dT}{T}$$

$\Rightarrow C(T)$  is 0-ha tart, lineárisanál függvény!

III. főtétel összeraklása:

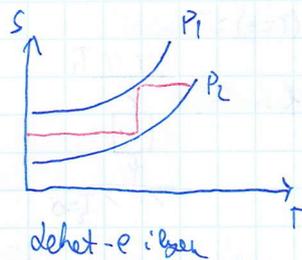
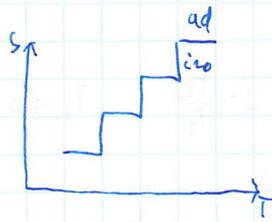
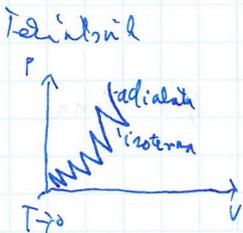
- Páncél:  $U(T) = F(T)$  of  $\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T}$ , ha  $T \rightarrow 0$

-  $S(T=0) = 0$

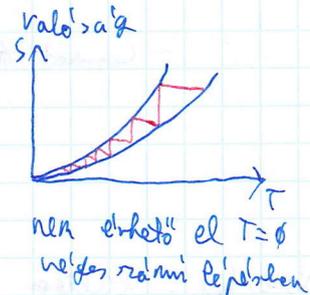
-  $\lim_{T \rightarrow 0} C(T) = 0$

-  $T=0$  nem elérhető el véges számú lépésben.

Illusztráció (véges lépésben)



d'All.: ez nem lehet!



Lehető fizikai megvalósítás  $T=0$ -n

$$dG = -SdT + VdP \Rightarrow -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = V\beta P \rightarrow \beta P \text{ is } 0\text{-ha tart}$$

$S$  deriváltjai is 0-é!

ideális gáz  
 $PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P}$   
 $V \cdot \beta P = \frac{n}{T}$   
 ideális gázra ez!

1905 Kamerling - Oakes: seppelődés, He: 4,2 K

$^3\text{He}$  seppelődésén  $\rightarrow T = 300 \text{ mK}$

$^3\text{He} - ^4\text{He}$  lecsúszási hőmérséklet  $\rightarrow 10 \text{ mK}$

Adiabátikus lemelegedés  $\mu\text{K}$

Leeresés hűtés  $\rightarrow \text{nK}$  (Bose-Einstein kondenzátum)

Adiabátikus lemelegedés



$T, P = 0$

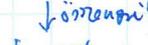


$\beta$  véges  $T + \Delta T \rightarrow$  csökken  $\rightarrow T$

Gyűjtés



$T + \Delta T \rightarrow$  csökken  $\rightarrow T$



$T - \Delta T \rightarrow$  csökken  $\rightarrow T$



# Fázisátalakulások

halmazállapot: szilárd, folyékony, gőzemi

Fázis: 4 halmazállapotváltás, fázisátalakulás, fordított nem!

pl.: kromomagnézium-átalakulás (Tunice)

→ szupervezetés, szuperfolyékonyság

Fázisok: fizikai tulajdonságok megváltozása

halmazállapotváltás: reversibilis, P-T diagram

yelempont: 3 fázis egyensúlyban van

pl.: H<sub>2</sub>O:  $P_H = 610,6 \text{ Pa}$   
 $T_H = 273,16 \text{ K}$

CO<sub>2</sub>:  $P_H = 51 \text{ bar}$   
 $T_H = -56,6^\circ \text{C}$

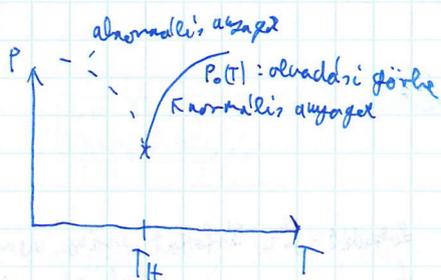


Kritikus pont: e fölé a folyadék és a gáz nem megkülönböztethető

H<sub>2</sub>O:  $T_k = 647 \text{ K}$   
 $P_k = 218 \text{ bar}$

CO<sub>2</sub>:  $T_k = 31^\circ \text{C}$   
 $P_k = 73,8 \text{ bar}$

① Tapszokat szint  $T = \text{állandó}$  anyagot hűtve/űtve megolvad, szilárd → sepp.



- olvadási, fagyási

- molekulák közt: szilárd/gőzben lezáródnak

- a fázisok fázisegyensúlyban van, amennyit előle nem katarokhato meg

- normális: olvadási fázis

- abnormális: fagyási fázis → olyan kritikus amilyen van egy "2. fázis"

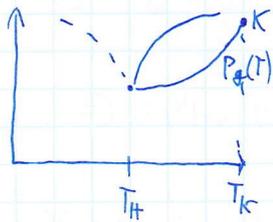
de - Chatelier - Braun - elv

a rendszer hűsödése hatására úgy reagál, hogy a hűsítést csökkentse

pl.: jéget megfagyozni → T<sub>0</sub> sülken, megolvad, v<sub>0</sub> sülken, nyomás sülken

normális anyagokra → T<sub>0</sub> nő, mélyebb megfagy, v<sub>0</sub> sülken, nyomás sülken

(2) párolgás  $\leftrightarrow$  szuphizáció



$P_g(T)$  : gőzgörbe

telítő

itt a folyadék a saját gőzével egyensúlyban van



egyensúlyban

$T = 300\text{ K}$

$P_g = 20\text{ mbar}$

Kniofor

párolgás  
hőt von el



- Hűtőszaki:
- izadási
  - deszor
  - Windchill

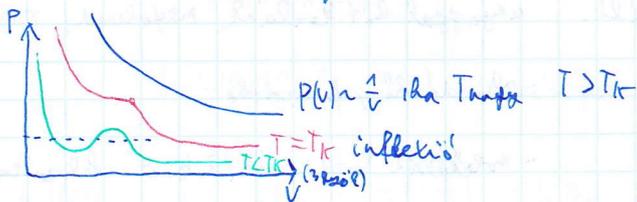
Folyadék - gőz (gáz) halmazállapot

vdK:  
1 mole

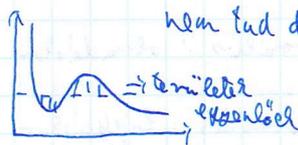
$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

invalens halmazállapot

mitől  $P(V_m) = ? \Leftrightarrow$  3-ad fokú  $\begin{cases} 1. & \text{2. fokozatú gőz} \\ 3. & \end{cases}$

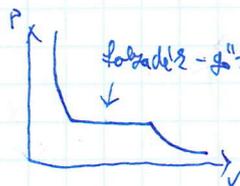


Maxwell - konstrukció

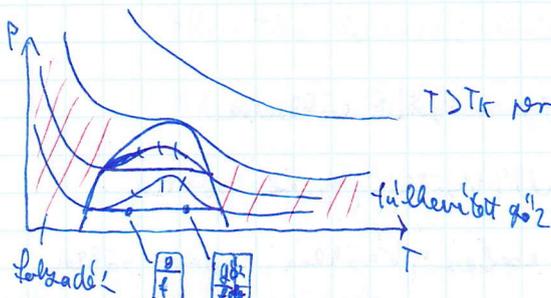


nem tud dönteni

$\Rightarrow$



folyadék-gőz tartogat arány nem meghatározott



$T > T_K$  normális gáz : nem szuphizáció

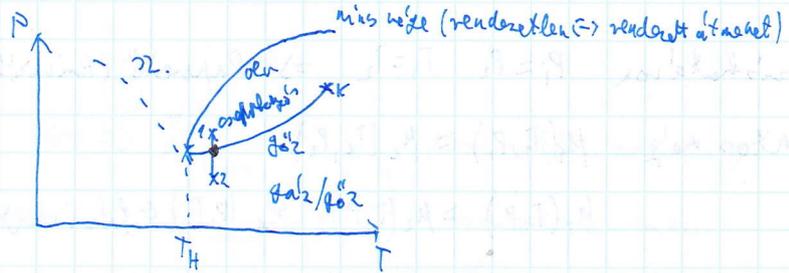
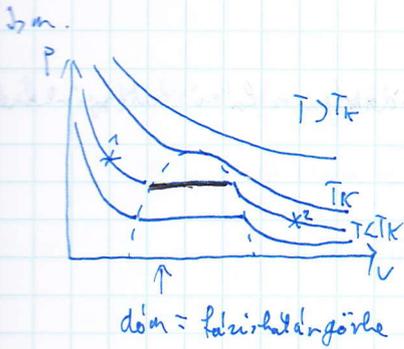
telített gőz

folyadék  $\frac{dP}{dT}$   $\frac{dP}{dT}$

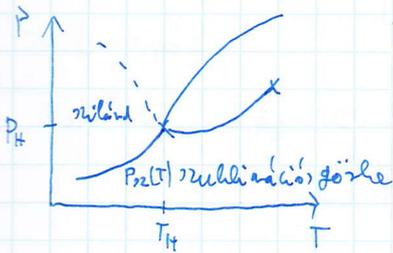
$\frac{dP}{dT}$  nagy

folyadék ömlesztetetlen

|      |     |                                      |                          |                              |                             |
|------|-----|--------------------------------------|--------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| pl.: | LPG | liquefied petroleum gas (P-B)        | $T_g = 96^\circ\text{C}$ | $P_{kr} = 30\text{bar}$      |                             |
|      | CNG | compressed natural (H <sub>2</sub> ) | $P_{kr} = 45\text{bar}$  | $T_{kr} = -82^\circ\text{C}$ | $\Rightarrow 200\text{bar}$ |
|      | LNG | liquefied natural gas                | $-120^\circ\text{C}$     |                              |                             |

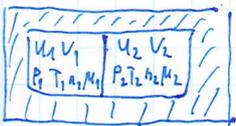


### Sublimáció



### Fázisegyensúly feltétele

pl.: két fázis közötti egyensúly



$U = U_1 + U_2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad dU_1 = -dU_2$   
 $V = V_1 + V_2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad dV_1 = -dV_2$   
 $n = n_1 + n_2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad dn_1 = -dn_2$

Egyensúlyban  $S = \text{max} \quad dS = 0$

Teljes rendszer  $S = S_1(U_1, V_1, n_1) + S_2(U_2, V_2, n_2)$   
 $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{U,n} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,n} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{U,V} dn$   
 $0 = dS = dS_1 + dS_2 = \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1}\right)_{U_1, n_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right)_{U_2, n_2}\right] dU_1 + \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial V_1}\right)_{U_1, n_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial V_2}\right)_{U_2, n_2}\right] dV_1 + \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1}\right)_{U_1, V_1} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial n_2}\right)_{U_2, V_2}\right] dn_1$   
 $\forall \text{ tétel } dU_1, dV_1, dn_1 \Rightarrow \left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1}\right)_{U_1, n_1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right)_{U_2, n_2} \quad \left(\frac{\partial S_1}{\partial V_1}\right)_{U_1, n_1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial V_2}\right)_{U_2, n_2} \quad \left(\frac{\partial S_1}{\partial n_1}\right)_{U_1, V_1} = \left(\frac{\partial S_2}{\partial n_2}\right)_{U_2, V_2}$

Emlékeztető: F.E.:  $dS = \frac{1}{T}(dU + PdV - \mu dn)$  innen  $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{U,n} = \frac{1}{T} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,n} = \frac{P}{T} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T}$

\* alapján  $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$   $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$  s  $\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}$

Tehát  $T_1 = T_2$   $P_1 = P_2$   $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow$   $\mu$  intenzív paraméter azonos a két fázisban

Clausius - Clapeyron egyenlet s a fázisdiagram

Fázishatáron  $P_1 = P_2$   $T_1 = T_2 \Rightarrow$  alapvető (kritikus) tulajdonsága a fázisátmenetnek

Fontos még  $\mu_1(T_1, P_1) = \mu_2(T_2, P_2)$

$\mu_1(T, P) = \mu_2(T, P)$   $\mu(P, T) \in$  fázisátmeneti görbe

ebből  $d\mu_1 = d\mu_2$  ha  $(P, T) \in$  fázisátmeneti görbe

$$d\mu_1 = \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial P}\right)_T dP = \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial P}\right)_T dP \approx d\mu_2$$

átrendezve  $0 = dT \left[ \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_P \right] + dP \left[ \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial P}\right)_T \right]$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial P}\right)_P - \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial P}\right)_P}{\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_T - \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_T} \quad \text{C-C egyenlet}$$

$$G = U - TS + PV = \mu N$$

$$dG = SdT + VdP + \mu dN \Rightarrow \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{T, n} = \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T, P} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{T, n} = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{T, P}$$

$\underbrace{v}_V$  moláris térfogat

S, V, n az extenzív  $\Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{T, P} = \frac{V}{n} = V_M$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T, P} = \frac{S}{n} = S_M \quad \text{moláris entropia}$$

Tehát  $\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{T, n} = V_M$   $\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P, n} = -S_M$

Ezzel C-C:  $\frac{dP}{dT} \Big|_{\text{átmenet}} = \frac{S_{M1} - S_{M2}}{V_{M1} - V_{M2}}$

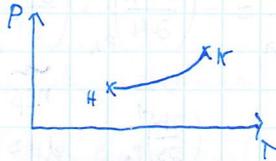
latens hő: 1-ől 2-é átmenet  $Q_{M12} = T(S_{M2} - S_{M1})$   
szelvény  $\mu_2$  szelvény  $\mu_1$

$$\frac{dP}{dT} \Big|_{\text{szelvény}} = \frac{Q_{M12}}{T(V_{M2} - V_{M1})} = \frac{Q_{M12}}{T \Delta V_M}$$

1. folyadék → gőz

$$V_{ML} < V_{Ma} \\ \text{liquid}$$

$$Q_{M12} > \phi \Rightarrow \frac{dP}{dT} > \phi \text{ de léci!}$$

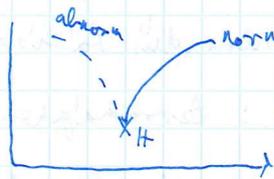


2. szil → folyadék

$$Q_{M12} > \phi \text{ norm } V_{Ms} \leq V_{ML} \Delta V_{s0} \Rightarrow \left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{norm}} > \phi$$

$$\text{abnorm } V_{Ms} \geq V_{ML} \Delta V_{s0} \Rightarrow \left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{abnorm}} < \phi$$

deriválttal adottság  
aránylag nagy



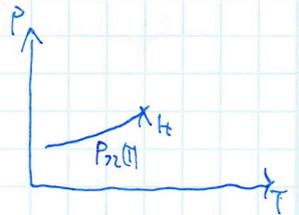
3. szil → gőz

$$Q_{M12} > \phi \text{ nagy } \Delta S = \frac{Q_{M12}}{T}$$

rendszert → rendezetlen

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{reál}} \geq 0 \text{ ez az eredmény}$$

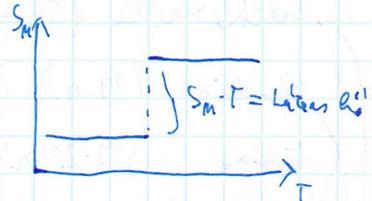
$$V_{M12} < V_{Ma}$$



Fázisátalakulásról osztályozásba

Elsőrendű fázisátalakulás

$$\left( \frac{\partial M}{\partial P} \right)_{T,n} = V_M \quad \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{P,n} = -S_M$$

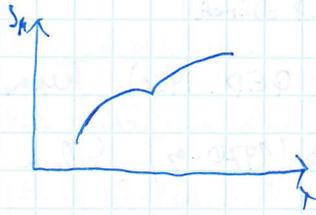
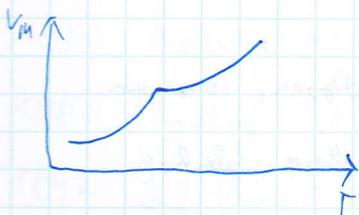


$\mu$  megfelelő deriváltjai nem folytonosak

van C-C egyenlet

Másodrendű fázisátalakulás (folytonos)

61



első derivált folytonos

$$\text{de! } \left( \frac{\partial V_M}{\partial T} \right)_{P,n} \text{ azad és } \left( \frac{\partial S_M}{\partial T} \right)_{P,n} \text{ is azad}$$

$$\text{és } \frac{\partial^2 M}{\partial T^2}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial T^2}$$

$$n.l.: \left( \frac{\partial^2 M}{\partial P^2} \right)_{T,n} = \left( \frac{\partial V_M}{\partial P} \right)_{T,n} = -K_T \cdot \frac{1}{n} \cdot V$$

$$\left( \frac{\partial^2 M}{\partial T^2} \right)_{P,n} = - \left( \frac{\partial S_M}{\partial T} \right)_{P,n} = - \left( \frac{\partial S_M}{\partial H} \right)_{P,n} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,n} = - \frac{n C_p}{T}$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P,n} \quad dH = T ds - V dp \Rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial S} \right)_{P,n} = T$$

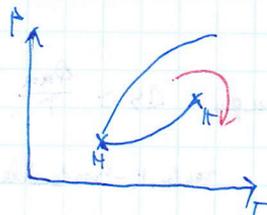
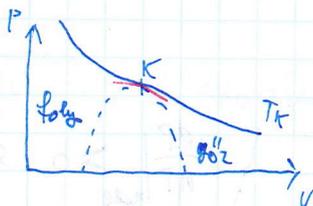
$$\left( \frac{\partial^2 M}{\partial T \partial P} \right) = \left( \frac{\partial V_M}{\partial T} \right) = \frac{\beta_P \cdot V}{n}$$

Ma, odiz deriváltak mérhető fizikai mennyiség, s' ezek nem fizikailag mérhető fizikai tulajdonságok.

n.l.: ferromágneses rendeződés & mágneses térerő

C-C-nél mérhetőre nincs értelme

Halmazállapotváltásokról



nincs térfogatváltozás  
2-odrendű átmenet

## Kvantummechanika

- klasszikus mechanika (16-17. sz.) Newton, Lagrange, Hamilton
- el-din (19. sz.) Faraday, Ampère, Maxwell
- tervezés (19-20. sz.)
- spec-rel (1905. Einstein)
- alt-rel. (1916. Einstein)
- kvantummechanika (1920-as évek) Bohr, Planck, Heisenberg, Schrödinger
- relativisztikus QM. (1928 Dirac)

elektrosztatikus kölcsönhatás (QED. 1950) Feynman, Dyson, Tomonaga

elektromágneses kölcsönhatás (1970-as) Salam, Weinberg, Glashow

standard modell (erős + gyenge + elektrosztatikus kölcsönhatás) (1960-2015) Gell-Mann, Higgs

### 3. pöytäkirja

#### 1) Elektronin ominaisuudet

1814 Fraunhofer havaals röntgen (X-ray, helium  $\rightarrow$  helium)

1859 Kirchhoff (Bunsen ei) katsoi kirkko kokeita ja kehiteli röntgenin  
adottu aineet upotettiin

1879 Joseph Stöckert  $\rightarrow$  kirkko kokeita  $\sim T^4$  Un. kokeita testit kokeita,  
negatiiviset röntgenit

1884 Boltzmann: termodynamiikka + Maxwell  $\rightarrow$  kirkko kokeita  $T^4$  ominaisuudet

1896 Wien  $\rightarrow$  kirkko kokeita

1900 Rayleigh-Jeans  $\rightarrow$  kirkko kokeita  $\rightarrow$  kirkko kokeita  $\rightarrow$  "UV katastrofi"

1900 Max Planck (1918 Nobel)  $\rightarrow$  kokeita testit röntgenin kokeita kirkko kokeita

$\Rightarrow$  "kvantti kokeita" energiaa kirkko kokeita kirkko kokeita  
kirkko kokeita kirkko kokeita kirkko kokeita

#### 2.) Kokeita kirkko kokeita (kirkko kokeita)

-17-18. kokeita: Huygens  $\rightarrow$  kirkko kokeita (Huygens-Fresnel kokeita)

1803 Thomas Young: kirkko kokeita, kirkko kokeita (kirkko kokeita)

1887 Hertz: UV kokeita kirkko kokeita  $\leftrightarrow$  kirkko kokeita

1905 Heinrich Hertz: kirkko kokeita kvantitatiiviset kokeita

1905 Einstein (1921 Nobel)  $\rightarrow$  kokeita kirkko kokeita, kirkko kokeita a Planck kokeita  
kvantti kokeita kirkko kokeita

#### 3.) Atomin mallit

i.e. 4.2. Demokritoksen "atomien" kokeita, kirkko kokeita

1838 Faraday  $\rightarrow$  kirkko kokeita

1870 Mendeleev  $\rightarrow$  kirkko kokeita

1880 Rydberg  $\rightarrow$  kokeita kirkko kokeita kirkko kokeita formula (He kokeita)

1897 J.J. Thomson  $\rightarrow$  kirkko kokeita

1904 Thomson kokeita kirkko kokeita, kirkko kokeita

1911

1909 Széchenyi kísérlet → Rutherford féle atommodell → Nobel

1913 Bohr modell 1922 Nobel

1914 Franck-Hertz kísérlet

1922 Stern-Gerlach → elektron spinje

1924 De Broglie → anyaghullák elmélete (1929 Nobel)

1927 Compton - kísérlet

1926 Schrödinger (egyenlet) (1933 Nobel)

1927 Heisenberg → határozatlansági elv

Felület test sugárzás (hőmosszéleti sugárzás)

Megfigyelés: Kirchhoff: a fény eloszlása és kibocsátása hővesztés mértékétől

Ha az anyag termelés egyensúlyban van a környezetével

(pl.: téglák vázlatban)

emisszió (kibocsátás)  $\frac{e(\nu, T)}{d(\nu, T)} = u(\nu, T)$  ← univerzális fr. minden anyagra azonos  
 abszorpció (elnyelés)  $\frac{a(\nu, T)}{d(\nu, T)} = u(\nu, T)$  ← Kirchhoff állítása

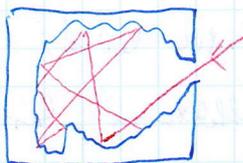
$\nu$ : fény frekvencióján

Abszolút

Felület test koncepcióján  $a(\nu, T) = 1$  minden fényre elnyel.

$e(\nu, T) = 1$  kibocsátás:  $e(\nu, T) = u(\nu, T)$  meghatározható

is kibocsátás:



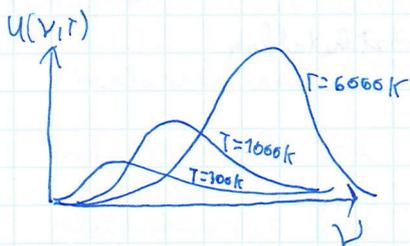
hisz belül, belül énds

minden IR infravörös

VIS látható

UV ultravioleta

fény elnyel



Intenzitás nő és görbe maximuma eltolódik

Teljes hőenergia: görbe alatti terület

$$\int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \rightarrow \text{Stefan-Boltzmann}$$

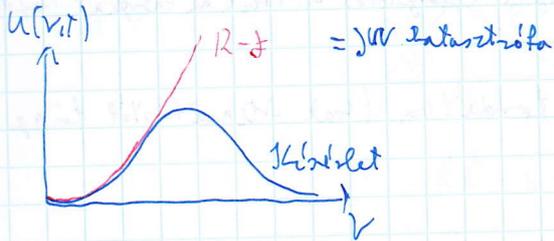
↓  
5-15 állandó

Maximum hely:  $\lambda_{max} \cdot T = \text{all}$  Wien féle eltolódási törvény

$$\frac{T}{\lambda_{max}} = \text{all}$$

elméleti problémák: Maxwell egyenletek

Rayleigh-Jeans  $U(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} 20 \nu^2 T$



Planck: fitt  $U(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$  ;  $\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$  Bose-Einstein-fü

Planck féle sugárzási törvény

Maxwell S-B törvény integrálással

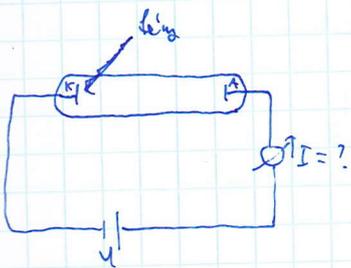
Wien deriválással

R-J konceptuál  $\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{20T}{h\nu}$  csak  $U(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} 20 \nu^2$   $h\nu \rightarrow 0$

Fizikai lép: a sugárzással  $h\nu$  adagokban azelődik el / loszafődik ki

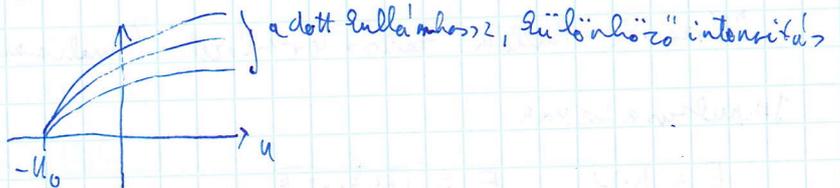
ör  $E = h\nu$  kvantum hipotézis

Fény és anyag kölcsönhatása (Fotoeffektus)



Eredmények:

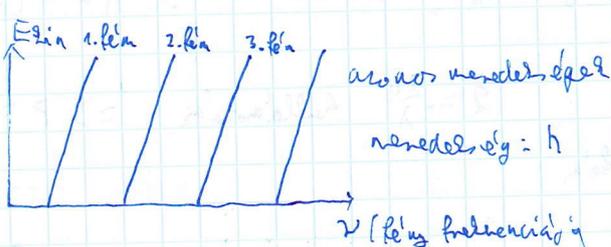
1.)



Előrejelzés

$E_{kin} = eU_0 = \frac{1}{2} m v^2$  elektronok kinetikus energiája

2.)



veseletek:  $h$

$h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

megfigyelés

mindenmal klasszikus (Maxwell egyenletekkel)

fotoeffektus  $\nu$ -tól függ

Maxwell szerint  $\nu$  semmilyen szerepet nem játszik

nl.: IR-re nincs!

csak az intenzitás

van  $\nu$  től függő (külső, független)

mindenkor (csak intenzitásról függ)

leadási sebesség

dram függ az intenzitásról

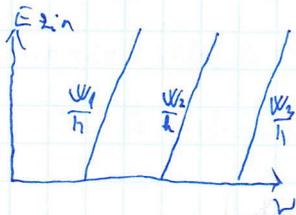
energia függ az intenzitásról

Einstein magyarázata: részecskékként

Planck féle kvantum hipotézis  $\rightarrow$  a fény valójában  $h\nu$  energiadarabokban

terjed foton: fény részecskéje

1 foton 1 elektron tud kitérni:  $E_{\text{fotó}} = h\nu \rightarrow E_{\text{kin}} = h\nu - W$



$\rightarrow$  zéró energiájú fotonok (szívó & ellopók)

Követelmények:

Fény egyszerre lehet hullám és részecske természetű is

Részecske-hullám dűlő természet (dualizmus)

Impulzus is van

$$E = h \cdot \nu \quad E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

$$\text{fényre } m_0 = 0 \Rightarrow E = pc \quad \Rightarrow h\nu = pc \Rightarrow p = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

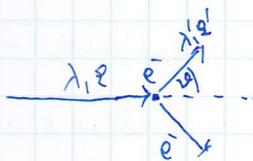
hullám

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \text{ hullámzáma} \Rightarrow p = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

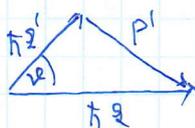
részecske impulzusa

# Compton szórási (fény impulzus hirtesség)

röntgen fotóval



impulzus megmaradás



$$h\nu = p c = h Q c$$

$$p^2 = h^2 Q^2 + h^2 Q'^2 - 2 h^2 Q Q' \cos \varphi$$

Energia megmaradás:  $h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2 m_0}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} \quad \text{2. rendű Taylor polinom}$$

ergo  $\Rightarrow h c (Q - Q') = \frac{p^2}{2 m_0}$

$$2 m_0 h c (Q - Q') = h^2 [Q^2 + Q'^2 - 2 Q Q' \cos \varphi]$$

$$2 m_0 c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = 2 h \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - 2 \frac{1}{\lambda \lambda'} \cos \varphi \right]$$

ha  $\Delta \lambda \ll \lambda, \lambda' \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - \lambda'} \approx 1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$

$$\frac{2 m_0 c}{h} (\lambda' - \lambda) = \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} - 2 \cos \varphi$$

$$\Delta \lambda := \lambda - \lambda'$$

$$\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\lambda - \Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda - \Delta \lambda} = 2 + O\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)$$

Végeredmény:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

Kisebbségi eredményekkel jó egyezés

"olyan mint  $\bar{e}$  aki fény sebességgel megy"

$$\frac{h}{m_0 c} = \lambda_{\text{Compton}} \quad \text{Compton hullámhossz}$$

## Atommodell

Thomson 1896  $\bar{e}$ -t felfedezte

$\rightarrow \frac{e}{m}$  arányát

$\rightarrow e$  elemi töltés millikan

$\rightarrow$  Thomson-modell (szilíciuming)



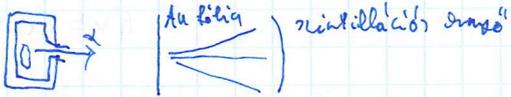
$\rightarrow$  anyag nemleges

$e^-$  tömegű

mellette nagy tömegű pozitív részecskék

Rutherford féle atommodell

1896 Becquerel radioaktív sugárzás  $\alpha, \beta, \gamma$

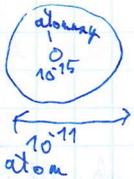


szitlány, de néha van visszaverés is

„olyan mintha kőröslégy lövedékek visszapatnáskálnak a papírlapon”

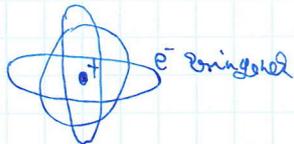
Rutherford meggyőződése 1911

anyag tömegének 99,99%-a valószínűleg az atomokban van koncentráva



atomok sűrűsége  $10^{22}$ -szer nagyobb, mint a normál anyag sűrűsége (neutroncsillagok)

„Atomrendszer”  $\leftrightarrow$  Rutherford



Kísérlet

Szintillációs : vonalas spektrum : Rydberg 1880

H atom : a hidrogén vonalas tömegszámát követel

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad R - \text{Rydberg állandó} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$$

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 2, 3, \dots \infty \quad \text{Lyman (UV)}$$

$$n_1 = 2 \quad n_2 = 3, 4, \dots \infty \quad \text{Balmer (VIZ)}$$

$$n_1 = 3 \quad n_2 = 4, 5, \dots \infty \quad \text{Paschen (IR)}$$

} van tömegszámosság

Bohr modell

Kell szabályozni a Rutherford modellt.

Rutherford problémája : Sűrűség  $e^-$ -el győztesen  $\rightarrow$  sugározni kellene

→ fotóelektron spektrummal zene lehnne

Ad hoc hipotézis (adott probléma vonatkozó)

- "soríngó" elektron nem sugároz
- amikor két stabil pályára zörött átugrik, akkor sugároz
- csak meghatározott pályák léteziknek
- impulzus momentum kvantált:

Bohr-lelő kvantálási feltétel

$$L = \hbar \cdot n, \text{ ahol } n = 1, 2, \dots$$

Hidrogén atom Bohr-modellje:

$$m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \frac{m_0 v^2 r n \hbar}{m_0 v r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 \Rightarrow v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{n \hbar} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{n}$$

$$L = n \hbar = m_0 v r = r = \frac{n \hbar}{m_0 v}$$

finomszerkezeti állandó

$$d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \text{ finomszerkezeti állandó} \quad d \approx \frac{1}{137} \text{ dimenziótlan}$$

$$[d] = \frac{Vm}{As} \cdot \frac{A^2 s^2}{VA^2} \frac{s}{m} = 1$$

És az a sebesség megoldása

$$v_n = d \cdot c \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{Visszahelyettesítve: } r = \frac{n \hbar}{m_0 v} = \frac{n^2 \hbar}{2 c m_0} = n^2 \frac{\hbar}{m_0 c} \frac{1}{2} \quad ; \quad d_B = \frac{\hbar}{m_0 c d} \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ nm} \approx 0,5 \text{ \AA}$$

↑  
Bohr sugár

↑  
Compton  
2π

Ötött állapotok energiája

$$E_n = \frac{1}{2} m_0 v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2} m_0 \frac{d^2 c^2}{n^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 m_0 c d}{n^2 \hbar} = \frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{d^2}{n^2} - m_0 c^2 \frac{d}{n^2} =$$

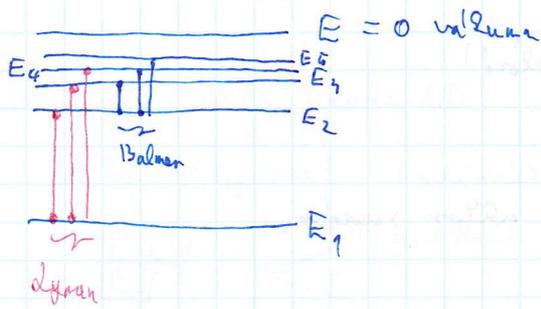
$$\text{elöl} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = d$$

$$E_n = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{d^2}{n^2}$$

$$n = 1, 2e \quad m_0 c^2 \approx 5 \cdot 10^5 \quad E_1 \approx -13,6 \text{ eV} = -1 \text{ Ry}$$

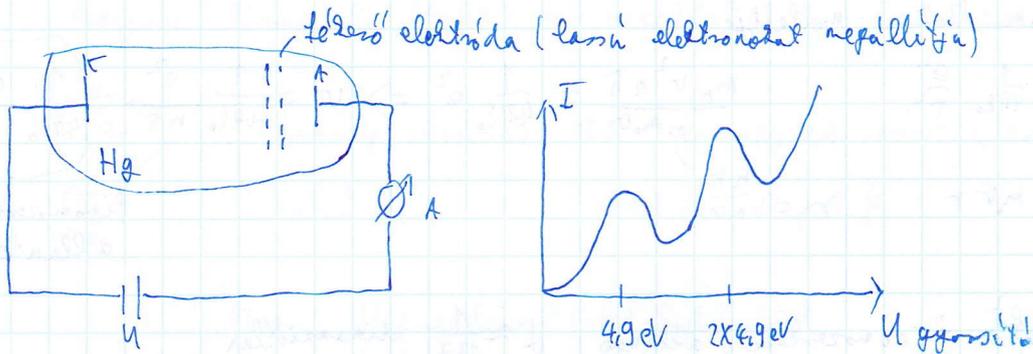
↑  
 $\frac{h}{2\pi} \approx 10^{-34}$

# Bohr-energiák

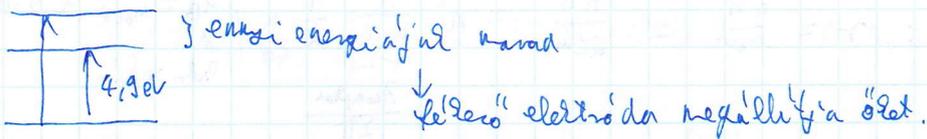
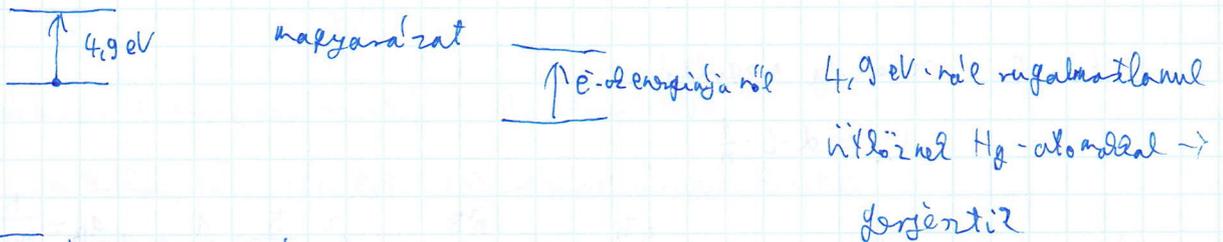


Kihátsátás, elugrás  $n=1$ -ről  $n=2, 3, 4$  ugrik a  $e^-$

# Franck-Hertz kísérlet



Hg-n lemegel gerjeszthető atomi átmenet



Fontos állítás:

nem csak lemegel gerjeszthető atomok, hanem mechanikai kölcsönhatással is

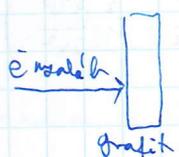
de Broglie féle anyaghullám hipotézis

Ismeret tudjuk:  $\lambda = \frac{h}{p}$  v.  $p = \frac{h}{\lambda}$

Legyen az igaz minden részecskére  $\leftrightarrow$  részecske - hullám dualitás  
(legnagyobb  $c_{60}$   $720 \frac{u}{moe}$ )

Kimutatása: Davisson - Germer

elektronokat gyorsítunk  $eU = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ ;  $p = \sqrt{2meU}$



elhajlási kép, mintha optikai rácsok lennének a elektronok használat:  $e^-$  mikroszkóp

de Broglie  $\leftrightarrow$  Bohr - modell

$p = \frac{h}{\lambda}$

$L = n\hbar$   $m_0 v r = n\hbar$

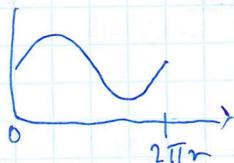
$m_0 v = \frac{h}{\lambda}$



$\frac{h}{\lambda} \cdot r = n\hbar$

$\leftrightarrow 2\pi r = n\lambda \rightarrow$  olyan mintha az anyaghullám  $e^-$

a hidrogénben álló hullámokat állítaná



repmatikus

Program 1920-es években:

- $e^-$  anyaghullámként viselkedik  $\rightarrow$  hullámegyenlet kell
- a megoldásból adják vissza a Bohr modellt
- a hullámfüggvény "ψ" természetét ne kíséreljük

(Hilbert: matematikailag hullámegyenletet megoldásai normált  $\psi$ -el felelt)

Schrödinger - egyenlet:

$\hbar^2 \psi = \frac{p^2}{2m} \psi + V \psi$

$\hbar^2 \psi = \frac{p^2}{2m} \psi$

Írja le az elektront egy szilícium 10-ken



Bohr - Einstein vita



"Isten nem dobál" → "hanyagok reptető változó"



Bell - egyenlőtlenség

1964

→ 1974 - os éreken kísérlet → Einstein tévedett

Skizsék:

vonalas skizsék

emissio || || ||

abszorpcio ~~|| || ||~~

gázok skizsék:

- perjesztés → "előrehozott" gázok "előrehozott" skizsék világítás

Fotoeffektus:

vilámpa → cind lemez (elektroszkóp)

negatívra föltjű → a fény hatására elvont a töltéseket

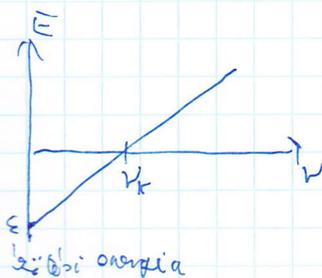
pozitívra -||- → nem sül ki

negatívra föltjű, de üveglapon keresztül világított meg → nem sül ki

250W-os reflektor → nem sül ki



Sőt az UV fény hoz effektust a cind lemez



nem az intenzitás, hanem az egyes fotonok energiája számít

## Edison effektus

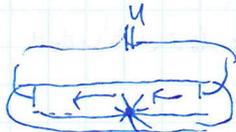
világításra katód - melegítő  $\Rightarrow$  elektronok kimenet  $\rightarrow$

$\Rightarrow$  áramot hálózatról diódokhoz lép

gyűjtő és anóda (elektron hullámban) létezik a pozitív táp

$\Rightarrow$  elektron hullám terjedése

valamint



elektronok mozgása katódtól  $\Rightarrow$  végsőre tulajdonképp

Képek : kétyűk  $\rightarrow$  rossz irányban forog

$\Rightarrow$  nem a kétyűk mozgása, hanem az elektronok mozgása  $\rightarrow$  a kétyűk  $\rightarrow$  a