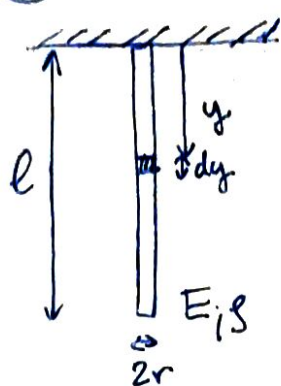


(F1)



a, Az eredetileg nyújtatlan, dy hosszú részre ható erő (ami nyújtatlan állapotban y távolságra van a felhúgyesítéstől):

$$F(y) = \frac{l-y}{l} mg \quad (\text{az alatta lévő részre ható nehézségi erő})$$

Legyen a dy hosszú rész megnyúlása Δ . Ezzel:

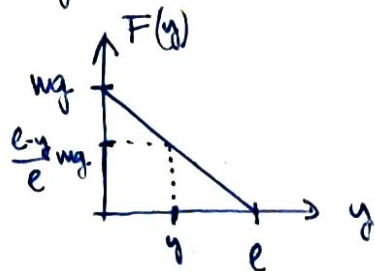
$$\varepsilon(y) = \frac{\Delta}{dy} = \frac{F(y)/D^*}{dy}, \quad \text{ahol } D^* = \frac{EA}{dy} \text{ a } dy \text{ rész "megállandója".}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon(y) = \frac{F(y)}{D^* \cdot dy} = \frac{mg}{EA} \cdot \left(1 - \frac{y}{l}\right) = \frac{\rho A l g}{EA} \left(1 - \frac{y}{l}\right) = \frac{\rho l g}{E} \left(1 - \frac{y}{l}\right)}}$$

Megjegyzés: Az y hosszú rész teljes megnyúlása:

$$\begin{aligned} \Delta l(y) &= \sum \Delta(y') = \int_0^y \varepsilon(y') dy' = \frac{mg}{EA} \int_0^y \left(1 - \frac{y'}{l}\right) dy' = \\ &= \frac{mg}{EA} \left(y - \frac{y^2}{2l}\right) = \frac{mg}{EA} \cdot \left(1 - \frac{y}{2l}\right) y. \end{aligned}$$

Ezt a következő módon is megkaphatjuk: Az y hosszú rész teljesénél mg , aljánál $F(y)$ erő hat:



$$\text{Olyan, mintha állandó } \bar{F}(y) = \frac{mg + F(y)}{2} =$$

$$= mg \cdot \left(1 - \frac{y}{2l}\right) \text{ erő hatna az } y \text{ hosszú részre.}$$

Tehát ennek a megnyúlása:

$$\Delta l(y) = \frac{\bar{F}(y)}{D(y)} = \frac{mg \left(1 - \frac{y}{2l}\right)}{\frac{EA}{y}} = \frac{mg}{EA} \left(1 - \frac{y}{2l}\right) y$$

A teljes mind a saját súlyának hatására $\frac{mg l}{2EA}$ -al nyúlik meg.

Deriválással megkapjuk a deformációt:

$$\varepsilon(y) = \frac{d \Delta l(y)}{dy} = \frac{mg}{EA} \cdot \left(1 - \frac{y}{l}\right)$$

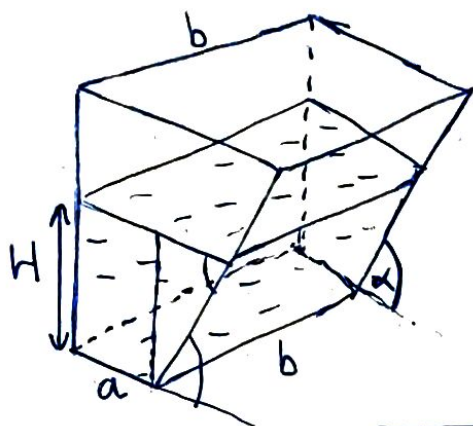
b) Az elemi nyalmas energia:

$$dW_{mg} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV = \frac{E}{2} \cdot \frac{s^2 l^2 g^2}{E^2} \left(1 - \frac{y}{l}\right)^2 \cdot A dy$$

A teljes nyalmas energia:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{W_{mg}}} &= \frac{s^2 l^2 g^2 A}{2E} \int_0^l \left(1 - \frac{y}{l}\right)^2 dy = \frac{s^2 l^2 g^2 A}{2E} \left[\left(1 - \frac{y}{l}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-l) \right]_0^l = \\ &= \underline{\underline{\frac{s^2 l^3 g^2 \pi}{6E}}} \end{aligned}$$

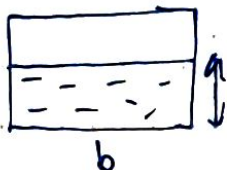
F2



1, alaplappra

$$\underline{\underline{F_1 = \rho g H a b}} \quad (H \text{ magas folyadékoszlop})$$

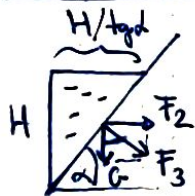
2, téglalap alakú, egyenes oldallapra



A nyomás lineárisan növekszik, így átlagos $\frac{\rho g H}{2}$ nyomással számolhatunk

$$\underline{\underline{F_2 = \frac{\rho g H}{2} \cdot H b = \frac{1}{2} \rho g H^2 b}}$$

3, téglalap alakú, ferde oldallapra (többféleképpen)

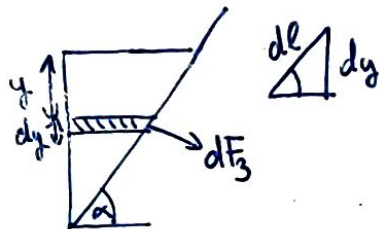


F_3 erő függőleges komponense a felette lévő folyadék G súlya, vízszintes komponense F_2 , a H magas folyadékoszlop-tól nármásod nyomás (a folyadék egyensúlyban van)

$$\underline{\underline{F_3 = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{\rho g H^2 b}{2 \sin \alpha}}}$$

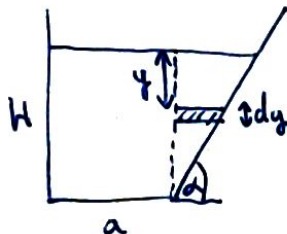
$$\text{vagy } F_3 = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \rho g \cdot \frac{1}{2} H \cdot \frac{H}{\tan \alpha} \cdot b = \frac{\rho g H^2 b}{2 \sin \alpha}$$

Direkt mámmalással:



$$F_3 = \int dF_3 = \int_{y=0}^{y=H} \rho g y \cdot d\ell \cdot b = \rho g b \int_0^H \frac{y dy}{\sin \alpha} = \frac{\rho g H^2 b}{2 \sin \alpha}$$

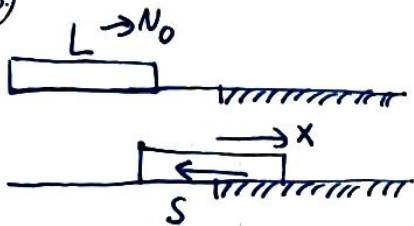
4, trapéz alakú oldallapra



Bontsuk fel téglalapra és háromszögre:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F_4}} &= F_{\square} + F_{\triangle} = \frac{\rho g H}{2} \cdot aH + \int_0^H \rho g y \frac{H-y}{\tan \alpha} dy = \\ &= \frac{\rho g H^2 a}{2} + \frac{\rho g}{\tan \alpha} \int_0^H (yH - y^2) dy = \frac{\rho g H^2 a}{2} + \frac{\rho g}{\tan \alpha} \cdot \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) = \\ &= \underline{\underline{\frac{\rho g H^2}{2} \left(a + \frac{H}{3 \tan \alpha} \right)}} \end{aligned}$$

(F3)



$$\begin{aligned} S(x) &= \mu m \frac{x}{L} g = ma \Rightarrow a = \underbrace{\frac{\mu g}{L}}_{\omega^2} \cdot x \\ a &\sim x \text{ és } a \propto x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{harmonikus rezgésnek megfelelő mozgás} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a) \quad a=0: x=0 &\rightarrow \text{egyensúlyi helyzet} \\ a=\max: x=L \text{ és } N=0 &\rightarrow \text{mértékhatás} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} a=0: x=0 \\ a=\max: x=L \end{aligned}} \right\} \Rightarrow A=L \text{ az amplitúdó}$$

$$v_{\max} = A\omega = N_0 = \sqrt{\mu g L} \quad (\omega = \frac{N_0}{L})$$

periódusidő: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\mu g}} = 2\pi \cdot \frac{L}{N_0}$

A megállásig eltelt idő:

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{N_0}}}$$

b) $N'_0 = 2N_0 = A'\omega = A' \cdot \frac{N_0}{L} \Rightarrow A' = 2L$ lenne, ha a teljes átmozgás után is harmonikus rezgés lenne.

$$x(t) = 2L \cdot \sin(\omega t) \quad , \text{ amíg } 0 \leq x \leq L$$

Számítsuk ki mennyi idő alatt ér át az érdes részre (átérve a sebessége $\neq 0$)

$$L = 2L \sin(\omega t_0)$$

$$\frac{1}{2} = \sin(\omega t_0) \rightarrow \omega t_0 = \frac{\pi}{6} \rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{L}{v_0}$$

Eldör a sebessége: $v(t) = v_{\max} \cdot \cos(\omega t) = 2v_0 \cos(\omega t)$

$$v(t_0) = 2v_0 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = v_0 \cdot \sqrt{3}$$

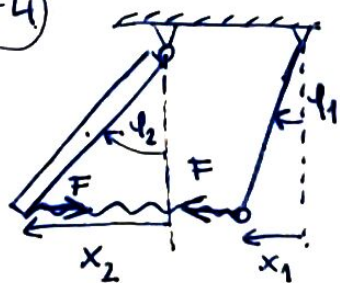
Inventől a gyorsulás értéke állandó: mg , tehát a megállásig:

$$mg \cdot t' = v_0 \cdot \sqrt{3} \rightarrow t' = \frac{L}{v_0} \cdot \sqrt{3}$$

Tehát a teljes idő megállásig:

$$\underline{\underline{t_2 = t_0 + t' = \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \right) \frac{L}{v_0}}}$$

(F4)



nídra: $-mg \frac{l}{2} \sin \varphi_2 - F \cos \varphi_2 = \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_2$

ingá: $-mg \sin \varphi_1 + F = m \ddot{x}_1$

mgó: $F = D(x_2 - x_1)$

$\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 0$: $x_1 = l \varphi_1 \rightarrow \ddot{x}_1 = l \ddot{\varphi}_1$ ($\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$)

$$x_2 = l \varphi_2$$

$$\text{Errel: } \left. \begin{aligned} -mg \frac{l}{2} \varphi_2 - D l^2 (\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{1}{3} m l^2 \ddot{\varphi}_2 \\ -mg \varphi_1 + D l (\varphi_2 - \varphi_1) &= m l \ddot{\varphi}_1 \end{aligned} \right\}$$

$$D = \frac{mg}{2l} \text{ és legyen } \frac{g}{L} = \omega_0^2.$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{3}{2}\omega_0^2\varphi_1 + \frac{1}{2}\omega_0^2\varphi_2 \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{3}{2}\omega_0^2\varphi_1 - 3\omega_0^2\varphi_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\omega_0^2 & \frac{1}{2}\omega_0^2 \\ \frac{3}{2}\omega_0^2 & -3\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2}\omega_0^2 + \Omega^2 & \frac{1}{2}\omega_0^2 \\ \frac{3}{2}\omega_0^2 & -3\omega_0^2 + \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2}\omega_0^2 + \Omega^2\right)(-3\omega_0^2 + \Omega^2) - \frac{3}{4}\omega_0^4 = 0$$

$$\Omega^4 - \frac{9}{2}\omega_0^2\Omega^2 + \frac{15}{4}\omega_0^4 = 0$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 4 \cdot 1 \cdot \frac{15}{4}}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{9 + \sqrt{21}}{4}\omega_0^2 \\ \frac{9 - \sqrt{21}}{4}\omega_0^2 \end{cases}$$

Teilt a bit frequency:

$$\Omega_1 = \frac{\sqrt{9 + \sqrt{21}}}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} ; \quad \Omega_2 = \frac{\sqrt{9 - \sqrt{21}}}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

modus:

$$\underline{\Omega_1^2}: \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{9 + \sqrt{21}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 + \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{3 + \sqrt{21}}{4}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\varphi_1 \approx -8,8\varphi_1$$

$$\underline{\Omega_2^2}: \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{9 - \sqrt{21}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 + \frac{9 - \sqrt{21}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{3 - \sqrt{21}}{4}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\sqrt{21} - 3}{2}\varphi_1 \approx 0,8\varphi_1$$

