F1. $a = 1\,\frac{m}{s^2}$, $t_0 = 2s$

a) Ügyelni kell az egyes mozgás szakaszok elején a kezdeti feltétel illesztésére!

sebesség:

I: $0 \le t \le t_0$: $v(t) = 0 + \int_0^{t_0} \overbrace{a(t')}^{a}\,dt' = at$; $v(t_0) = at$

II: $t_0 \le t \le 9t_0$: $v(t) = at_0 + \int_{t_0}^{9t_0} \overbrace{a(t')}^{0}\,dt = at_0 = \text{áll.}$

III: $9t_0 \le t \le 10t_0$: $v(t) = at_0 + \int_{9t_0}^{t} \overbrace{a(t')}^{-a}\,dt' = at_0 - at + 9at_0 = a(10t_0 - t)$

b) hely:

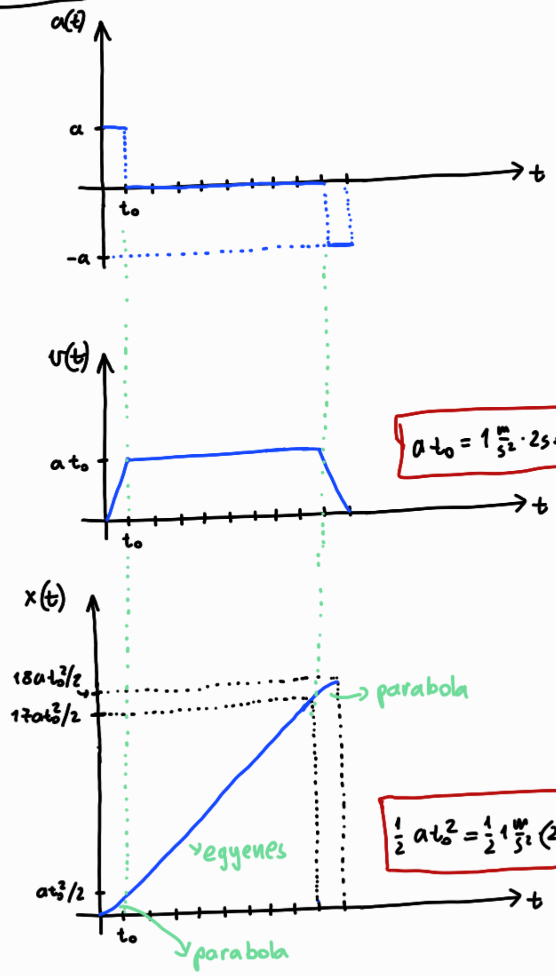
I: $0 \le t \le t_0$: $x(t) = 0 + \int_0^t v(t')\,dt' = \frac{1}{2}at^2$; $x(t_0) = \frac{1}{2}at_0^2$

II: $t_0 \le t \le 9t_0$: $x(t) = \overbrace{\frac{1}{2}at_0^2}^{x(t_0)} + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = \frac{1}{2}at_0^2 + at_0(t - t_0)$; $x(9t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 + at_0\cdot\underbrace{(9t_0 - t_0)}_{8t_0} = \frac{17}{2}at_0^2$

III: $9t_0 \le t \le 10t_0$: $x(t) = \underbrace{\frac{17}{2}at_0^2}_{x(9t_0)} + \int_{9t_0}^{t} v(t')\,dt' = \frac{17}{2}at_0^2 + \int_{9t_0}^{t} a\,(10t_0 - t')\,dt' =$

$$= \frac{17}{2}at_0^2 + a\left[\frac{1}{2}\frac{(10t_0 - t')^2}{(-1)}\right]_{9t_0}^{t} = \frac{17}{2}at_0^2 - \frac{1}{2}a(10t_0 - t)^2 + \frac{1}{2}at_0^2 = \frac{18}{2}at_0^2 - \frac{1}{2}a(10t_0 - t)^2 \; ; \; x(10t_0) = \frac{18}{2}at_0^2$$

ÁBRÁK:



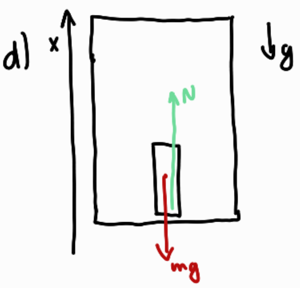
$\boxed{at_0 = 1\frac{m}{s^2}\cdot 2s = 2\frac{m}{s}}$

$\boxed{\frac{1}{2}at_0^2 = \frac{1}{2}\,1\frac{m}{s^2}(2s)^2 = 2m}$

- $v(t)$ esetében a meredekség különböző, attól függően, hogy melyik oldalról közelítjük a $t = t_0$ és $t = 9t_0$ időpontokat.
- $x(t)$ esetében azonban a meredekség azonos, mindegy melyik oldal közelítjük $t = t_0$ vagy $t = 9t_0$ időpontokat.
- A lift nem fordul vissza, így a megtett út az elmozdulással egyezik meg!

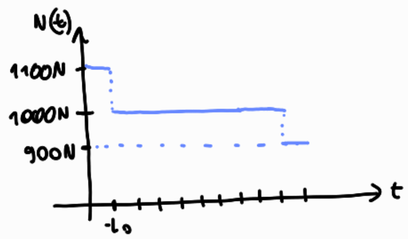
c) $v_{átl} = \frac{x(10t_0)}{10t_0} = \frac{18}{2}\,\frac{at_0^2}{10t_0} = \frac{9}{10}at_0 = 1{,}8\,\frac{m}{s}$

d)



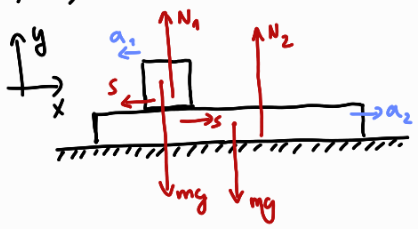
$N(t) - mg = ma(t) \Rightarrow N(t) = m(g + a(t))$

$$N(t) = \begin{cases} m(g+a) & \text{ha } 0 \le t \le t_0 \\ mg & \text{ha } t_0 < t < 9t_0 \\ m(g-a) & \text{ha } 9t_0 \le t \le 10t_0 \end{cases}$$



F2.

a) - b)



S a súrlódási erő nagysága az iránya ellentétes a relatív elmozdulással!

test:

y: $N_1 - mg = \emptyset \Rightarrow N_1 = mg$

x: $-S = -\mu_1 N_1 = -\mu_1 mg = ma_1 \Rightarrow a_1 = -\mu_1 g$ (balra "mutat") a_1

deszka:

$N_2 - N_1 - mg = \emptyset \Rightarrow N_2 = 2mg$

$S = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg = ma_2 \Rightarrow a_2 = \mu_1 g$ (jobbra "mutat") a_2

$\Rightarrow$ a test és a deszka is egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végez

$v(t) = v(t=\emptyset) + at$
↳ ált. sebesség-idő függés

c) $a_{rel} = a_1 - a_2 = -\mu_1 g - \mu_1 g = -2\mu_1 g$ (balra mutat) a_{rel}

d) A deszka kezdetben nem mozog, így $v_{rel\,0} = v_0 - \emptyset = v_0$, ez a test relatív sebessége a deszkához képest kezdetben ($t = \emptyset$ időpont).

A test megáll a deszkához képest $t = t^*$ idő múlva:

$$v_{rel\,0} + a_{rel} \cdot t^* = \emptyset \Rightarrow t^* = \frac{v_{rel\,0}}{-a_{rel}} = \frac{v_0}{2\mu_1 g}$$

A feladat szerint épp a deszka végén áll meg:

$$\underbrace{\frac{v_{rel\,0}}{2}}_{v_{rel.átl}} \cdot t^* = L = \frac{v_0}{2} \cdot \frac{v_0}{2\mu_1 g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{4L\mu_1 g} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 0{,}3 \cdot 10}\ \frac{m}{s} = 6\ \frac{m}{s}$$

e) A deszka sebessége: $v_{deszka}(t = t^*) = a_2 \cdot t^* = \mu_1 g \cdot \frac{v_0}{2\mu_1 g} = \frac{v_0}{2} = 3\ \frac{m}{s}$
(talajhoz képest!)

Megjegyzés: A test sebessége a mozgás végén a talajhoz képest:

$v_1(t = t^*) = v_0 + a_1 t^* = v_0 - \mu_1 g \cdot \frac{v_0}{2\mu_1 g} = \frac{v_0}{2} = v_{deszka}(t = t^*)$ ✓

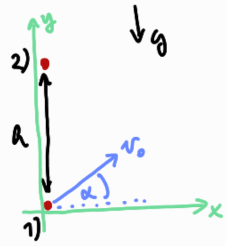
A test átlagsebesség $v_{1\,átl} = \dfrac{v_0 + \frac{1}{2} v_0}{2}$, a deszkáé $v_{2\,átl} = \dfrac{\emptyset + \frac{v_0}{2}}{2}$

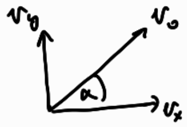
A test által megtett út a talajhoz képest: $S_1 = v_{1\,átl} \cdot t^* = \frac{3}{4} v_0 t^*$, a deszka $S_2 = v_{2\,átl} \cdot t^* = \frac{v_0}{2} t^*$ utat tesz meg!

$S_1 - S_2 = \frac{3}{4} v_0 t^* - \frac{1}{4} v_0 t^* = \frac{v_0}{2} t^* = v_0 \frac{v_0}{4\mu_1 g} = ⊚$

$⊚ = \frac{v_0^2}{4\mu_1 g} = \frac{4L\mu_1 g}{4\mu_1 g} = L$ ✓

F3.





$v_{x0} = v_0 \cos\alpha$
$v_{y0} = v_0 \sin\alpha$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y_1(t) &= v_0 \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \text{ferde hajítás}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2(t) &= \emptyset = \text{áll.} \\ y_2(t) &= h - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \text{szabadesés } h \text{ magasból}$$

$$d(t) = \sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} = \sqrt{(v_0\cos\alpha \cdot t - \emptyset)^2 + (v_0 \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 - h + \tfrac{1}{2} g t^2)^2} = ⊜$$

$$⊜ = \sqrt{\underbrace{v_0^2 \cos^2\alpha \cdot t^2 + v_0^2 \sin^2\alpha \cdot t^2}_{= v_0^2 t^2} + h^2 - 2 v_0 h \cdot \sin\alpha \cdot t} = \sqrt{\underbrace{h^2}_{\text{áll.}} + \underbrace{v_0^2 t^2 - 2 v_0 h \sin\alpha \cdot t}_{f(t)\ t\text{-függő}}}$$

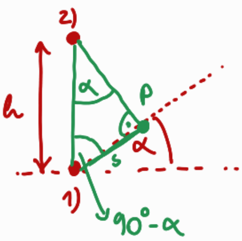
$d(t)$ minimális, ha $f(t)$ minimális: $\frac{d f(t)}{dt} = \emptyset$ kell! $\frac{d f(t)}{dt} = 2 v_0^2 t - 2 v_0 h \sin\alpha$

tehát $t = \frac{2 v_0 h \sin\alpha}{2 v_0^2} = \frac{h \sin\alpha}{v_0} = \frac{1}{2}\,s$ múlva lesz a távolság minimális!

$$d\left(t = \frac{h\sin\alpha}{v_0}\right) = \sqrt{h^2 + v_0^2 \frac{h^2 \sin^2\alpha}{v_0^2} \underbrace{- 2 v_0 h \sin\alpha \cdot \frac{h \sin\alpha}{v_0}}_{2 h^2 \sin^2\alpha}} = \sqrt{h^2 - h^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{h^2 \cos^2\alpha} = h\cos\alpha \approx$$

$\approx 0{,}87$ m. (Valóban minimum van, hiszen $v_0^2 > \emptyset$, ez t^2 együtthatója $f(t)$-ben!)

II. megoldás: Gondolatban üljünk rá a felső testre, ezzel mindkét test mozgásából „kitranszformáltuk" a szabadesést!



Ebben a rendszerben a 2)-es test áll, az egyes test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez a vízszinteshez képest α szöggel jellemezhető irányban!

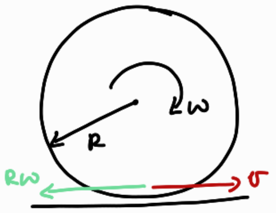
A két test közötti távolság akkor lesz a legkisebb, amikor a testeket összekötő szakasz merőleges lesz az első test pályájára.

Eddig az első test $s = h \sin\alpha$ utat tesz meg (1. ábra), így az eltelt idő: $t = \frac{h \sin\alpha}{v_0} = \frac{1}{2}\,s$

és $d_{min} = h\cos\alpha \approx 0{,}87$ m

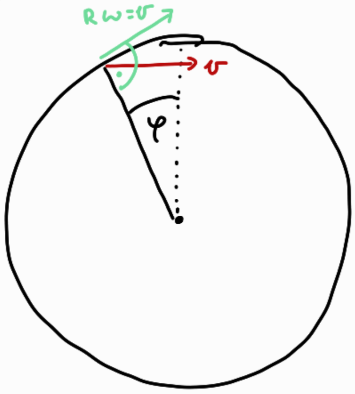
F4.1

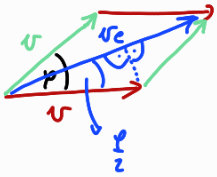
A traktor kerék mozgása v sebességű vízszintes irányú egyenes vonalú egyenletes mozgásból és a tengely körüli ω szögsebességű forgómozgásból tehető össze (a tengelyhez képest a kerék pontjai körmozgást végeznek):



tiszta gördülés: $v - R\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$

a) Az egér sebességét a két mozgáshoz tartozó sebességvektorok összege adja: (a vektorok hosszát tüntettem fel a vektorok mellett)





A sebesség nagysága:

$$v_e = 2 \cdot v \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|$$

irány: $\frac{\varphi}{2}$ fokos szöget zár be a vízszintessel

Precízebben:

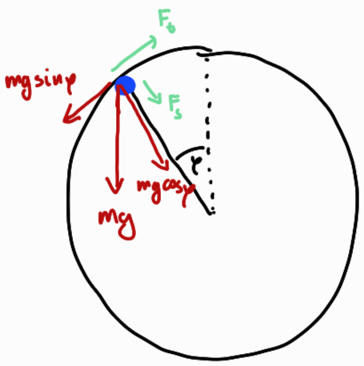
$$\left.\begin{aligned} v_{ex} &= v + v\cos\varphi \\ v_{ey} &= v\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad v_e = \sqrt{v_{ex}^2 + v_{ey}^2} = \sqrt{v^2 + v^2\cos^2\varphi + 2v^2\cos\varphi + v^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{2v^2 + 2v^2\cos\varphi} = \sqrt{2}\, v \sqrt{1+\cos\varphi}$$

b) A traktorral együtt mozgó rendszerben (inercia rendszer) az egér egyenletes körmozgást végez! $\Rightarrow$ A gyorsulás nagysága: $a = a_{cp} = R\omega^2 = R\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$

irányát az ábra mutatja: (sugárirányban befele mutat)

c) A kerék tengelyével együt mozgó rendszerben írjuk fel a mozgás egyenletet:



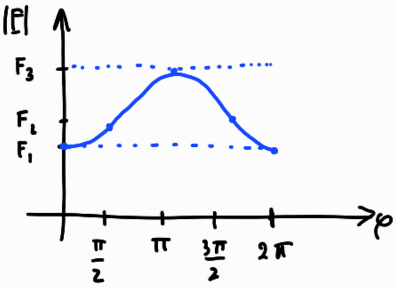
érintő irány: $mg\sin\varphi - F_t = 0 \Rightarrow F_t = mg\sin\varphi$

sugár irány: $mg\cos\varphi + F_s = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow F_s = m\frac{v^2}{R} - mg\cos\varphi$

$$|F| = \sqrt{F_t^2 + F_s^2} = \sqrt{\underbrace{m^2g^2\sin^2\varphi + m^2g^2\cos^2\varphi}_{=m^2g^2} + m^2\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 - 2m^2\frac{v^2}{R}g\cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{m^2g^2 + m^2\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 - 2m^2\frac{v^2}{R}g\cos\varphi} = mg\sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2R^2} - 2\frac{v^2}{Rg}\cos\varphi}$$

F_t, F_s: Az egérre a kerék által kifejtett erő tangenciális és sugárirányú komponensei.



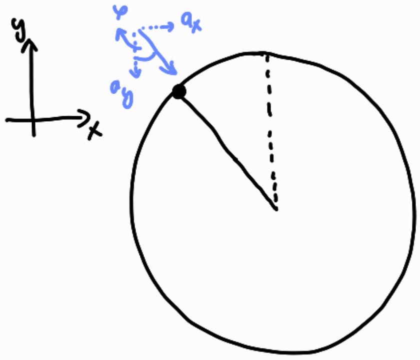
$\varphi = 0$: $|F| = \left|mg\left(1 - \frac{v^2}{Rg}\right)\right| = \left|m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)\right| = F_1$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$: $|F| = mg\sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2R^2}} = m\sqrt{g^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = F_2$

$\varphi = \pi$: $|F| = mg\left(1 + \frac{v^2}{Rg}\right) = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) = F_3$

Megjegyzés:

b)-c) talajrendszerben:



$a_x = a_{cp} \sin\varphi$

$a_y = -a_{cp} \cos\varphi$

y: $F_y - mg = m a_y \Rightarrow F_y = m a_y + mg$

x: $F_x = m a_x$

$\underline{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ az egérre a kerék "által" ható erő!

$$\underline{F} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{m^2 a_x^2 + m^2 (g + a_y)^2} = ⊚$$

$$⊚ = m\sqrt{a_x^2 + g^2 + a_y^2 + 2g a_y} = m\sqrt{a_{cp}^2 \cos^2\varphi + a_{cp}^2 \sin^2\varphi + g^2 - 2g a_{cp} \cos\varphi} = ⊚$$

$$⊚ = m\sqrt{g^2 + a_{cp}^2 - 2 a_{cp} g \cos\varphi} = mg\sqrt{1 + \frac{a_{cp}^2}{g^2} - 2\frac{a_{cp}}{g}\cos\varphi}$$ ahol $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$

ugyanaz, nyilván mert mindkét rendszer inercia rendszer!