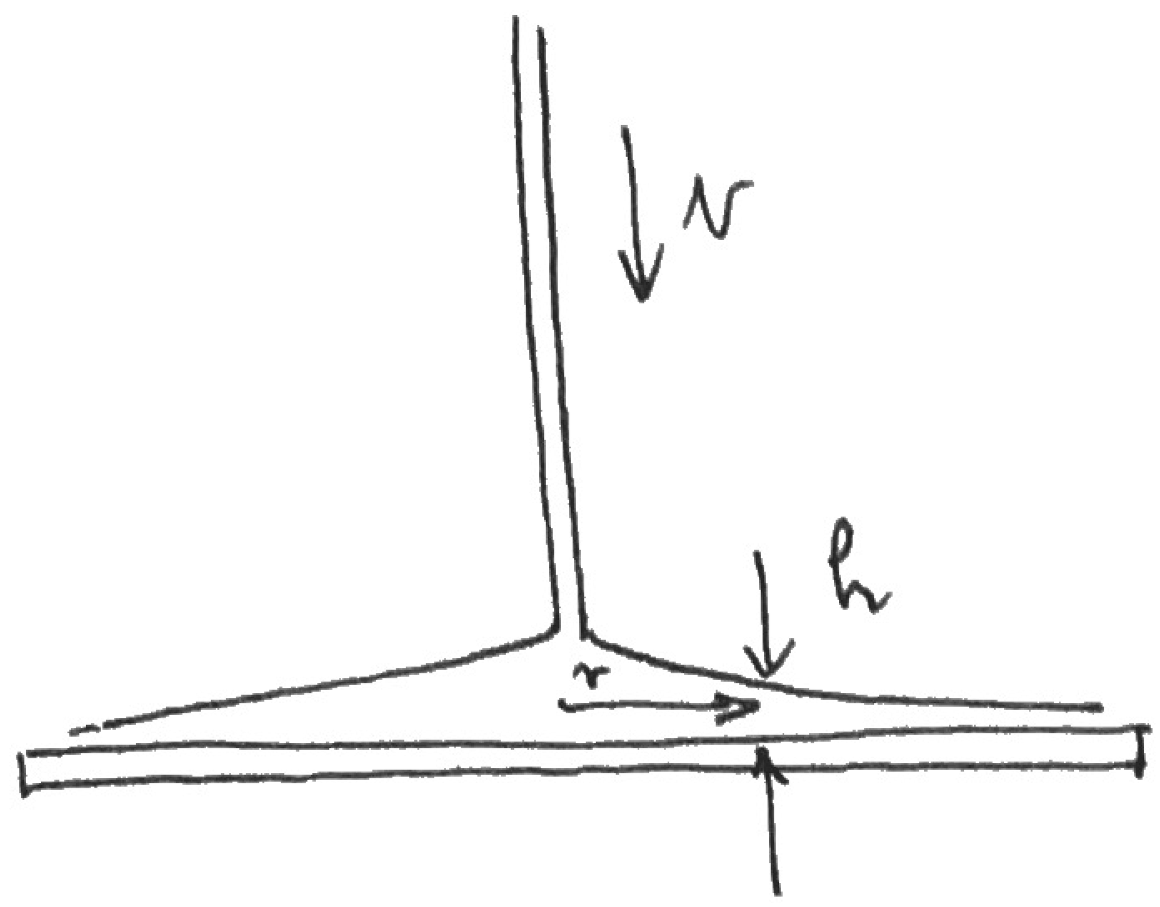
F1. Bernoulli törvénye miatt $\frac{1}{2}\varrho(v(r))^2 = \text{állandó}$, azaz $v(r) = v$.

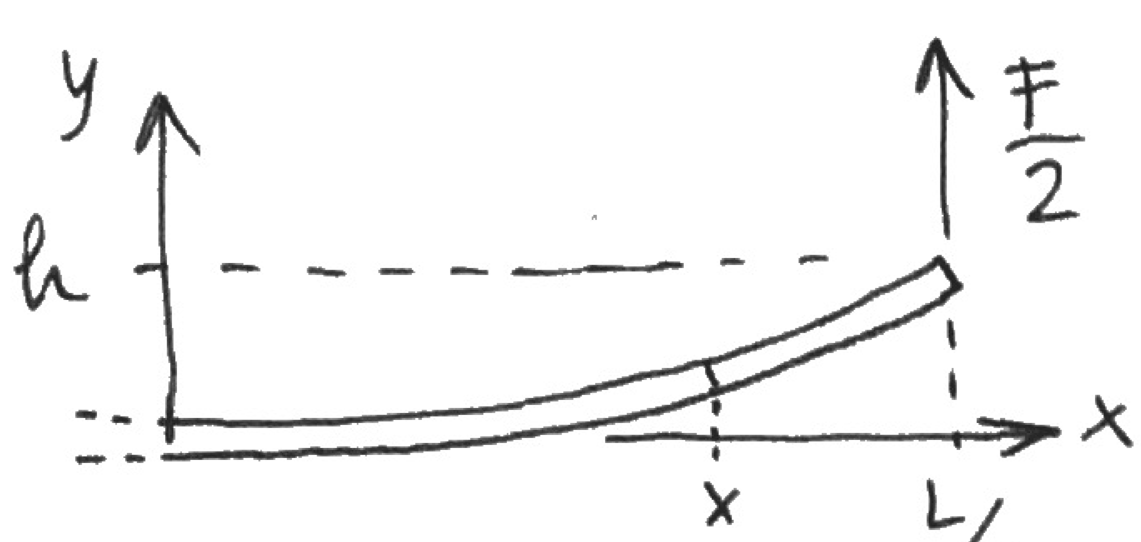


Kontinuitási egyenlet:

$$Av = 2\pi r h \cdot v(r),$$

ebből:
$$h(r) = \frac{A}{2\pi r}.$$

F2. Vizsgáljuk a rúd jobb oldali felét!



$$M = \frac{EI}{R} \approx EI \cdot y'',$$

ebből:
$$y''(x) = \frac{F}{2EI}\left(\frac{L}{2} - x\right),$$

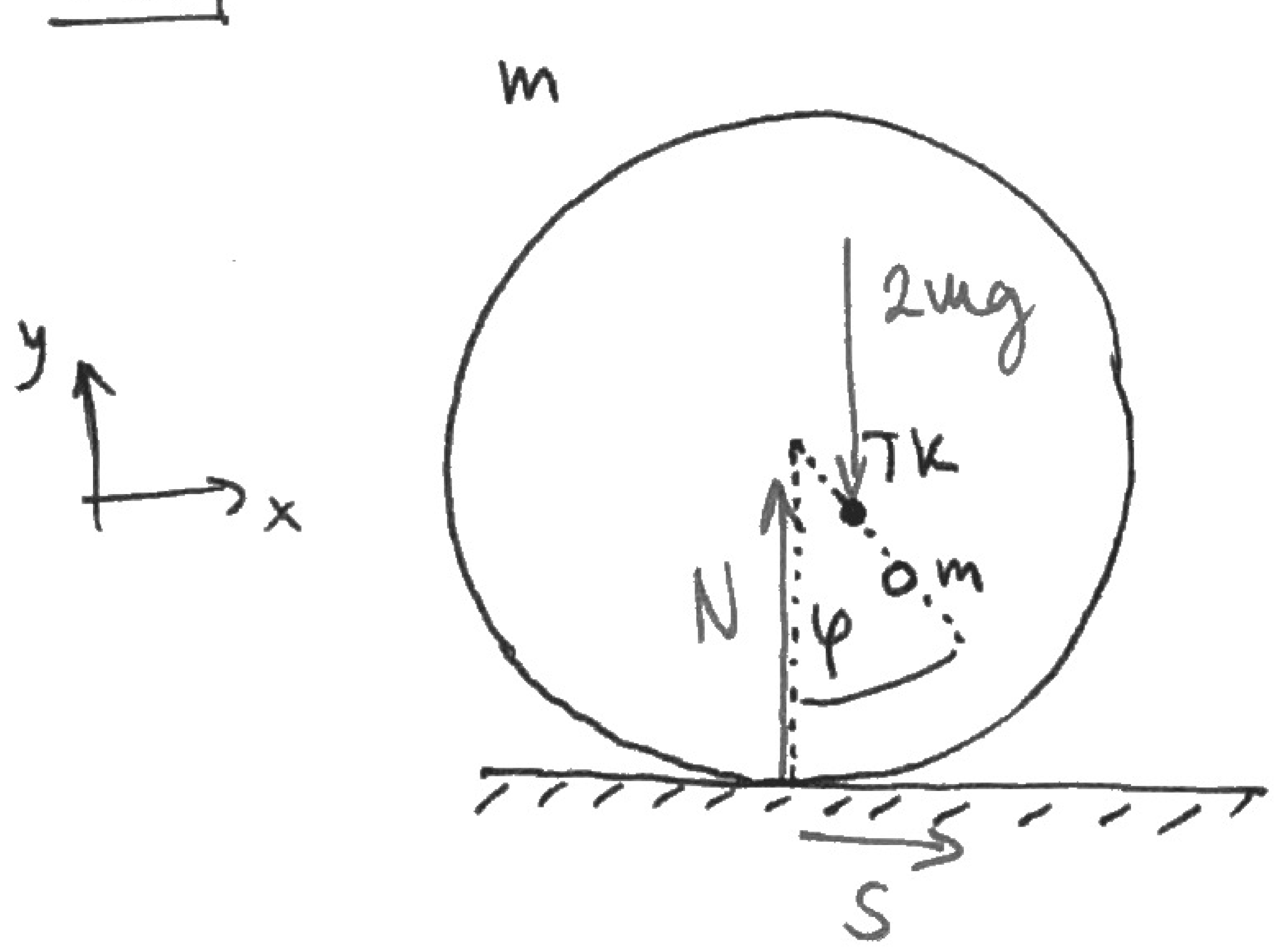
integrálva:
$$y'(x) = \frac{F}{2EI}\left(\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$y(x) = \frac{F}{2EI}\cdot\left(\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Behelyettesítve $x = \frac{L}{2}$ és $I = \frac{\pi R^4}{4}$-et:

$$h = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{12}\,\frac{FL^3}{\pi R^4 E}.$$

F3.



A tömegközéppont $s = \frac{R}{4}$ távolságra van a gömb középpontjától.

Mozgásegyenletek:

(1) $N \approx 2mg$

(2) $S = 2m\,a_{TK,x}$

Forgómozgás:

(3) $S(R-s) - Ns\varphi \approx \Theta_{TK}\,\ddot{\varphi}$,

ahol $\Theta_{TK} = \underbrace{\frac{2}{5}mR^2 + ms^2}_{\text{gömb}} + \underbrace{ms^2}_{\text{kis test}}$

Kényszerfeltétel: $\quad a_{tk,x} = -(R-s)\ddot{\varphi} \qquad (4)$

Az (1)-(4) egyenletekből:

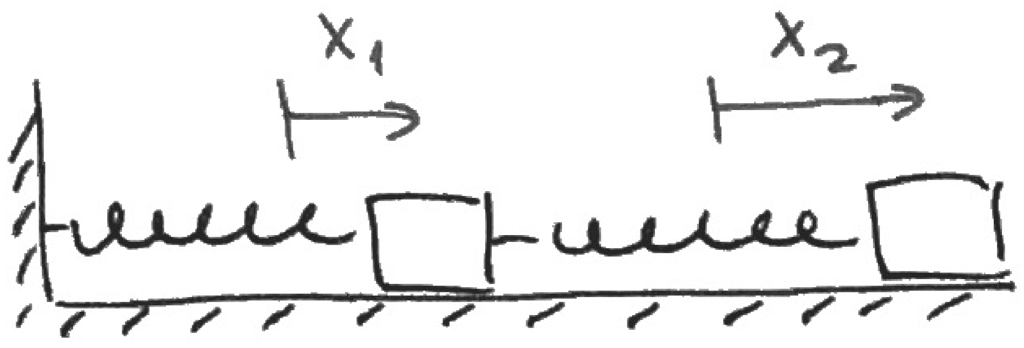
$$-2\cancel{m}(R-s)^2\ddot{\varphi} - 2\cancel{m}gs\varphi = \cancel{m}\left(\frac{2}{5}R^2+2s^2\right)\ddot{\varphi},$$

rendezve:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2gs}{2(R-s)^2+\frac{2}{5}R^2+2s^2}\cdot\varphi = -\underbrace{\frac{10}{33}\frac{g}{R}}_{\omega^2}\varphi$$

Tehát a körfrekvencia: $\quad \omega = \sqrt{\frac{10}{33}\frac{g}{R}}$.

F4.



x_1, x_2: egyensúlyi helyzettől kitérések

Mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + D(x_2-x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -D(x_2-x_1)$$

Bevezetve $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$-et:

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\omega_0^2 & \omega_0^2\\ \omega_0^2 & -\omega_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\det\begin{pmatrix}\omega^2-2\omega_0^2 & \omega_0^2\\ \omega_0^2 & \omega^2-\omega_0^2\end{pmatrix} = (\omega^2-2\omega_0^2)(\omega^2-\omega_0^2)-\omega_0^4 = 0.$$

Rendezve:

$$(\omega^2)^2 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0 \quad\rightarrow\quad (\omega^2)_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\omega_0^2$$

A sajátfrekvenciák:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,\omega_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\omega_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{\frac{D}{m}}.$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,\omega_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\omega_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{D}{m}}.$$