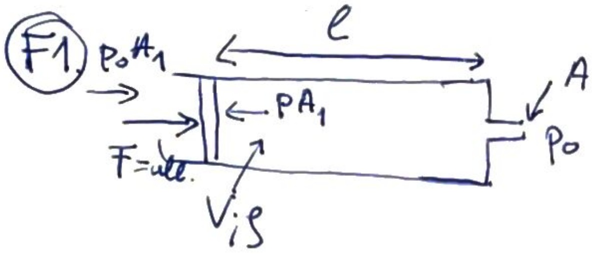
F1




$$W = F \cdot \ell$$

$A_1$: dugattyú keresztmetszetének területe

Bernoulli-egyenlet:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h + \overbrace{(p_0 + p')}^{=p}}_{\text{csőr előtt}} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p_0}_{\text{csőr után}}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + p' = \frac{1}{2}\rho v^2$$

dugattyú állandó sebességgel mozog: $p = p_0 + \frac{F}{A_1} = p_0 + p'$

tehát:

$$\frac{F}{A_1} = \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho v_0^2 \quad (1)$$

Kontinuitás: $\rho A_1 v_0 \Delta t = \rho A v \Delta t \rightarrow A_1 v_0 = A v \rightarrow A_1 v_0 t = A v t = V$ (2)

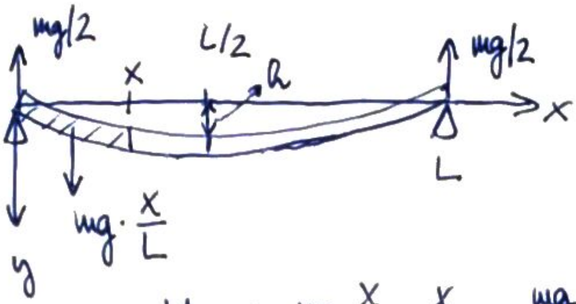
$$\underline{\underline{W}} = F \cdot \ell = F \cdot \frac{V}{A_1} \underset{(1)}{=} V\left(\frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho v_0^2\right) \underset{v_0 \ll v}{\approx} \frac{V}{2}\rho v^2 \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{\rho V}{2} \cdot \left(\frac{V}{A t}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{\rho V^3}{2 A^2 t^2}}}$$

<u>megjegyzés:</u> Munkatétellel is megkaphatjuk az eredményt:

$$W = \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\rho V \cdot \left(\frac{V}{A t}\right)^2 = \frac{\rho V^3}{2 A^2 t^2}$$

F2.




$$M_h = mg\frac{x}{L}\cdot\frac{x}{2} - \frac{mg}{2}\cdot x = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{mg}{2LEI}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{mg}{2EI}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{dy}{dx}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} = 0 : \quad \frac{mg}{6LEI}\cdot\frac{L^3}{8} - \frac{mg}{4EI}\cdot\frac{L^2}{4} + C = 0$$

$$C = \frac{1}{24}\,\frac{mgL^2}{EI}$$

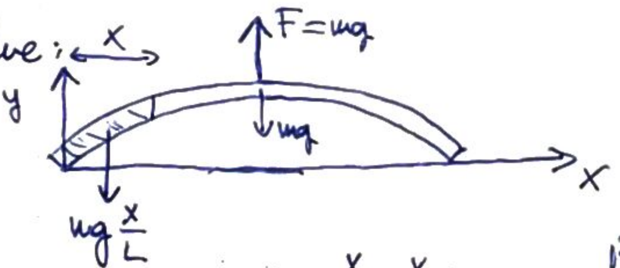
$$\frac{mg}{6LEI}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{mg}{4EI}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{mgL^2}{24EI}\cdot x + D = y(x)$$

$$y(x=0) = 0 : \quad D = 0$$

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = h = \frac{mg}{24LEI}\cdot\frac{L^4}{16} - \frac{mg}{12EI}\cdot\frac{L^3}{8} + \frac{mgL^2}{24EI}\,\frac{L}{2} =$$

$$= \frac{5}{384}\,\frac{mgL^3}{EI} \quad\Rightarrow\quad \frac{mgL^3}{EI} = \frac{384}{5}h$$

Felemelve:




A rúd végei éppen nem érintik a támaszokat

$$-mg\cdot\frac{x}{L}\cdot\frac{x}{2} = EI\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$-\frac{mg}{2LEI}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{dy}{dx}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} = 0 \qquad C = \frac{mg}{6LEI}\cdot\frac{L^3}{8} = \frac{mgL^2}{48EI}$$

$$-\frac{mg}{6LEI}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{mgL^2}{48EI}\cdot x + D = y(x)$$

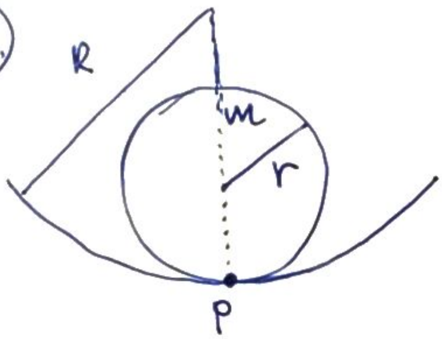
$$y(x=0) = 0 \ : \ D = 0$$

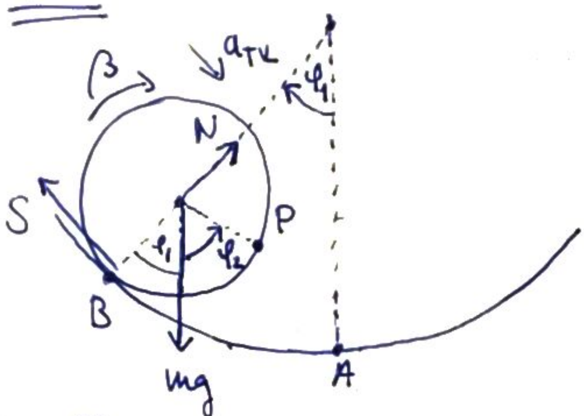
$$y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{mg}{24LEI}\cdot\frac{L^4}{16} + \frac{mgL^2}{48EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{128}\frac{mgL^3}{EI} = \frac{3}{5}h$$

Tehát a felemelés mértéke:

$$\underline{\underline{\Delta h}} = h + \frac{3}{5}h = \underline{\underline{\frac{8}{5}h}}$$

F3.




Tiszta gördülés miatt: $\widehat{AB} = \widehat{BP}$

$$R\varphi_1 = r(\varphi_1+\varphi_2) \rightarrow \varphi_2 = \frac{R-r}{r}\varphi_1 \quad (*)$$

$\varphi_1; \varphi_2$ kis szögek, ezért $a_{TK}$ jó közelítéssel vízszintes irányú, a mozgás sebessége elhanyagolhatóan kicsi.

$$mg\sin\varphi_1 - S = ma_{TK}$$

$$mg\cdot\varphi_1 - S = ma_{TK} \quad (1)$$

Bár nem használjuk fel: $N \approx mg$.

A TK-ra: $Sr = \frac{1}{2}mr^2\beta = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_2 \rightarrow S = \frac{1}{2}mr\ddot{\varphi}_2$ (2)

A tisztán gördülés miatt: $\beta r = a_{TK} = r\ddot{\varphi}_2$ (3)

VAGY: $v_{TK} = (R-r)\cdot\dot{\varphi}_1 \rightarrow a_{TK} = (R-r)\ddot{\varphi}_1 \xrightarrow[(*)]{} a_{TK} = r\ddot{\varphi}_2$

(1) egyenlet (2) és (3) segítségével:

$$mg\varphi_1 - \frac{1}{2}mr\ddot{\varphi}_2 = mr\ddot{\varphi}_2$$

$$g\varphi_1 = \frac{3}{2}r\ddot{\varphi}_2 \xrightarrow[(*)]{} g\varphi_1 = \frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi}_1$$

A kitérés iránya ellentétes a szöggyorsulás irányával

$$\ddot{\varphi}_1 = \underbrace{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}_{\omega^2}\varphi_1$$

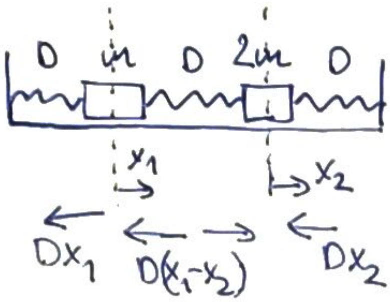
$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{R-r}{g}}$$

megjegyzés:

1, ha $r \rightarrow R$, akkor $\omega \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$: TK elmozdulása nagyon kicsi, gyors rezgés alakul ki, határesetben TK nem mozdul el, periódusidő nullává válik

2, ha $r \rightarrow 0$, kicsiny golyó rezeg a vájatban, mégsem kapjuk vissza az $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ formulát, mert bármilyen kicsi hengerről beszélünk, az is gördülni fog.

F4.




$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 - D(x_1-x_2)$$

$$2m\ddot{x}_2 = -Dx_2 + D(x_1-x_2)$$

Legyen $\frac{D}{m} = \omega_0^2$:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2\\ \ddot{x}_2 &= \frac{\omega_0^2}{2} x_1 - \omega_0^2 x_2\end{aligned}\right\} \begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\omega_0^2 & \omega_0^2\\ \frac{\omega_0^2}{2} & -\omega_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -\Omega^2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-2\omega_0^2+\Omega^2 & \omega_0^2\\ \frac{\omega_0^2}{2} & -\omega_0^2+\Omega^2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Omega^4 - 3\omega_0^2\Omega^2 + 2\omega_0^4 - \frac{\omega_0^4}{2} = 0$$

$$\Omega^4 - 3\omega_0^2\Omega^2 + \frac{3}{2}\omega_0^4 = 0$$

$$\Omega_{1;2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot \frac{3}{2}}}{2\cdot 1}\omega_0^2 = \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}\omega_0^2$$

$$\underline{\underline{\Omega_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}\,\omega_0}}\ ;\quad \underline{\underline{\Omega_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}\,\omega_0}}$$