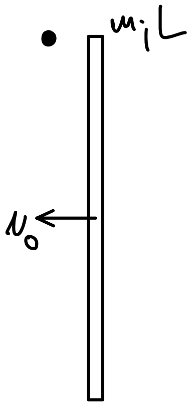
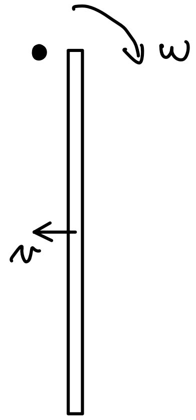
F1

a) ütközés előtt: ütközés után:





A belső erők forgatónyomatékai nullák, írjuk fel a perdületmegmaradást az ütközési pontra:

$$m v_0 \frac{L}{2} = m v \frac{L}{2} + \frac{1}{12} m L^2 \omega \quad \Rightarrow \quad v_0 = v + \frac{\omega L}{6} \quad (1)$$

Mechanikai energia megmarad:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m L^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = v^2 + \frac{\omega^2 L^2}{12} \quad (2)$$

---

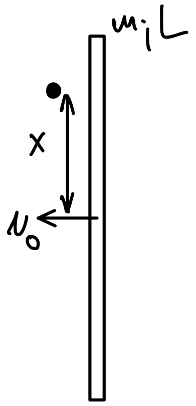
(2):

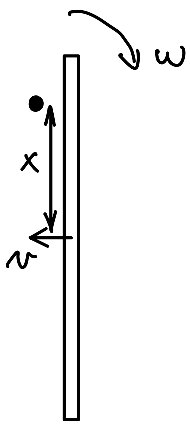
$$v_0^2 = \left(v_0 - \frac{\omega L}{6}\right)^2 + \frac{\omega^2 L^2}{12}$$

$$0 = -\frac{\omega L v_0}{3} + \frac{\omega^2 L^2}{36} + \frac{\omega^2 L^2}{12}$$

$$\frac{v_0}{3} = \frac{\omega L}{9} \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega = \frac{3 v_0}{L}} \; ; \; \underline{v} = v_0 - \frac{1}{6} \cdot 3 v_0 = \underline{\frac{v_0}{2}}$$

b) ütközés előtt: ütközés után:





$$mv_0 x = mvx + \frac{1}{12} mL^2\omega \quad\longrightarrow\quad v_0 x = vx + \frac{\omega L^2}{12} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} mL^2\omega^2 \quad\longrightarrow\quad v_0^2 = v^2 + \frac{\omega^2 L^2}{12}$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} mL^2\omega^2 \quad\longrightarrow\quad v^2 = \frac{\omega^2 L^2}{12}$$

$$v_0^2 = 2v^2 \Rightarrow v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

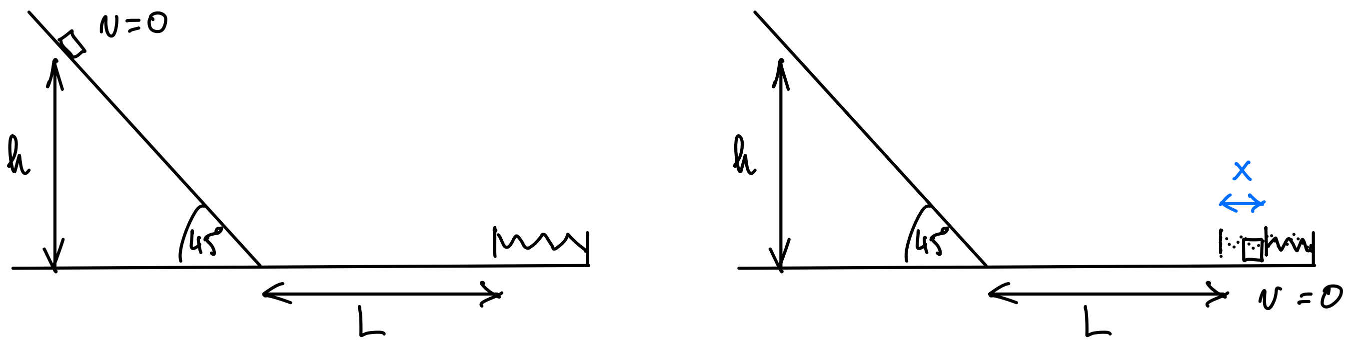
$$\omega^2 L = \frac{12v^2}{L} = \frac{6v_0^2}{L}$$

$$(1):\quad v_0\cdot x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\cdot x + \frac{L^2}{12}\cdot\frac{v_0}{L}\cdot\sqrt{6}$$

$$x = \frac{\frac{\sqrt{6}}{12}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} L \approx 0{,}7L$$

F2

a)



Munkatétel: $W_{neh} + W_{súrl} + W_{rug} = \Delta E_{kin} = 0$

$$mgh - \underbrace{\mu mg\cos\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}}_{\text{lejtőn}} - \underbrace{\mu mg(L+x)}_{\text{vízszintes talajon}} - \frac{1}{2} Dx^2 = 0$$

$$mgh - \mu mgh - \mu mg(L+x) - \frac{1}{2} Dx^2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D}{2mg}\cdot x^2 + \mu\cdot x + \mu(h+L) - h = 0$$

behelyettesítve az adatokat:

$$12{,}5x^2 + 0{,}3\cdot x - 0{,}55 = 0$$

$$x = 0{,}198\,m \approx 0{,}20\,m$$

($Dx > \mu mg$, a test elindul visszafele) b, munkatétel a visszafelé útra:

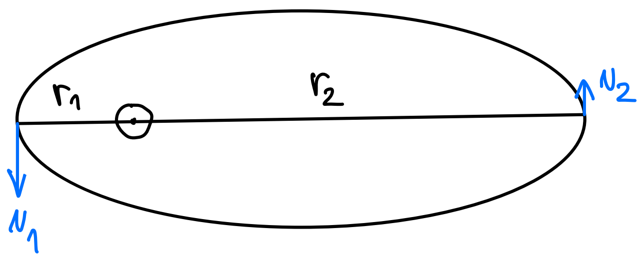
$$-mgh' - \mu mg\cos\alpha \cdot \frac{h'}{\sin\alpha} - \mu mg(L+x) + \frac{1}{2}Dx^2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -mgh' - \mu mgh' - \mu mg(L+x) + \frac{1}{2}Dx^2 = 0 \\ (1):\ mgh - \mu mgh - \mu mg(L+x) - \frac{1}{2}Dx^2 = 0 \end{array}\right\} \oplus$$

$$h - \mu h - 2\mu(L+x) - h' - \mu h' = 0$$

$$h' = \frac{h(1-\mu) - 2\mu(L+x)}{1+\mu} = 0{,}215\,m \approx 0{,}22\,m$$

F3



a, – b,

perdületmegmaradás: $mv_1r_1 = mv_2r_2$ (1) $\rightarrow$ $v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2}$

energiamegmaradás: $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{\gamma mM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{\gamma mM}{r_2}$ (2)

$$v_1^2 - \frac{2\gamma M}{r_1} = \frac{v_1^2 r_1^2}{r_2^2} - \frac{2\gamma M}{r_2}$$

$$v_1^2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = 2\gamma M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

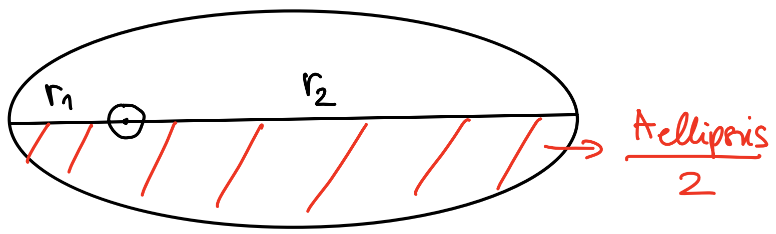
$$v_1^2\,\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^{\cancel{2}}} = 2\gamma M \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cancel{r_2}}$$

$$v_1^2 \cdot \frac{\cancel{(r_2 - r_1)}(r_2 + r_1)}{r_2} = 2\gamma M\,\frac{\cancel{r_2 - r_1}}{r_1}$$

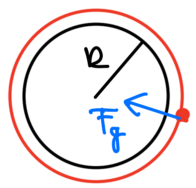
$$1+\frac{r_1}{r_2}=\frac{2\gamma M}{v_1^2 r_1} \Rightarrow r_2=\frac{r_1}{\frac{2\gamma M}{v_1^2 r_1}-1}\approx 40300\ \text{km}$$

$$v_2=v_1\cdot\frac{r_1}{r_2}=v_1\cdot\left(\frac{2\gamma M}{v_1^2 r_1}-1\right)\approx 1{,}7\ \text{km/s}$$

c) Kepler II. törvénye értelmében az eltelt idő a keringési idő fele lesz.



A Föld körül, a felszínhez közel keringő műhold:



$$\frac{\gamma m M}{R^2}=m\frac{4\pi^2}{T_0^2}R \Rightarrow \frac{T_0^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{\gamma M}$$

Kepler III. törvénye szerint:

$$\frac{T_{ellipszis}^2}{a^3}=\frac{T_0^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{\gamma M} \Rightarrow T_{ellipszis}=9{,}97\ \text{óra}$$

esetünkben: $a=\frac{r_1+r_2}{2}\approx 23585\ \text{km}$

A kérdéses idő:

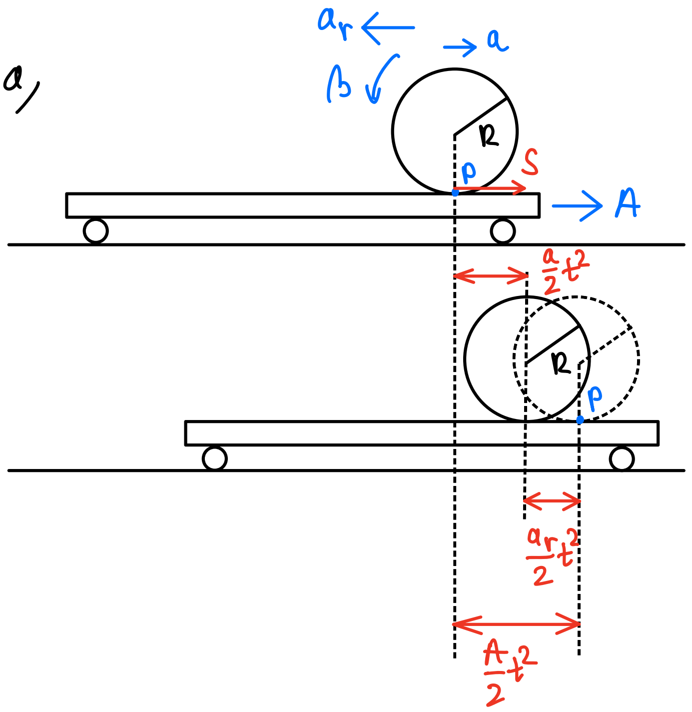
$$\Delta t=\frac{T_{ellipszis}}{2}\approx 5\ \text{óra}$$

d) A legközelebbi pontban:

$$\frac{\gamma m M}{r_1^2}=m\frac{v_1^2}{r_g} \Rightarrow r_g=\frac{v_1^2 r_1^2}{\gamma M}\approx 11700\ \text{km}$$

F4

a)



a_r: henger TK-jának kocsihoz képesti gyorsulása

t idejű elmozdulásokat vizsgálva:

$$\frac{A}{2}t^2 = \frac{a}{2}t^2 + \frac{a_r}{2}t^2 \Rightarrow a = A - a_r$$

A kocsin a henger tisztán gördül, így

$$a_r = \beta \cdot R$$

Másik módon:

sebességek: $v = V - v_r \Rightarrow a = A - a_r$

Tehát: $a = A - \beta R$ (1)

b) haladás: $S = m \cdot a$ (2)

TK körüli forgás: $S \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \beta$ (3)

c)

(3): $S = \frac{1}{2} m R \beta \underset{(1)}{=} \frac{1}{2} m (A - a)$

(2)-vel: $S = \frac{1}{2} m A - \frac{1}{2} S \Rightarrow S = \frac{mA}{3}$

A tapadási súrlódási erő:

$$S \le \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot mg \Rightarrow \frac{mA}{3} \le \mu_0 mg \Rightarrow \mu_0 \ge \frac{A}{3g} = 0{,}1$$

c) Mivel most $\mu_0 > \mu_{krit} = 0{,}1$, így a henger tisztán gördül.

A henger L utat a_r gyorsulással ($v_0 = 0$ kezdősebességgel indulva) tesz meg:

$$L = \frac{a_r}{2} t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a_r}} = \sqrt{\frac{2L}{A - a}} = \sqrt{\frac{2L}{A - \frac{S}{m}}} = \sqrt{\frac{2L}{\frac{2A}{3}}} = \sqrt{\frac{3L}{A}} \approx 1{,}7 s$$