(F1.)

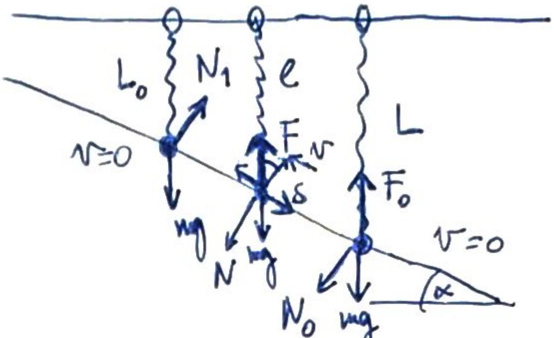
$\alpha = 20^\circ$

$m = 0{,}5\ \mathrm{kg}$

$D = 150\ \mathrm{N/m}$

$L_0 = 0{,}2\ \mathrm{m}$

$L = 0{,}3\ \mathrm{m}$



A rugó mozgás során függőleges marad, csúszásmentesen mozoghat. Látható, hogy a mozgás során a ferde rúd által kifejtett nyomóerő előjelet vált.

Mozduljon el a gyöngy a rúdon x távolságot, amíg az ábrán jelölt közbülső helyzetbe ér. Lejtőre merőlegesen:

$$N = F\cdot\cos\alpha - mg\cdot\cos\alpha = D(\ell - L_0)\cos\alpha - mg\cos\alpha$$

$$x\cdot\sin\alpha = L - \ell \ : \ N = \left[D\left(L - x\cdot\sin\alpha - L_0\right) - mg\right]\cdot\cos\alpha$$

Ahol N irányt vált: $N \leq 0$:

$$D\left(L - L_0 - x\sin\alpha\right) \leq mg$$

$$x \geq \frac{D(L-L_0) - mg}{D\sin\alpha} \cong 0{,}20\ \mathrm{m} = x_0$$

A maximális elmozdulás:

$$x_{max} = \frac{L - L_0}{\sin\alpha} \cong 0{,}29\ \mathrm{m}$$

Habár a nyomóerő irányt vált, a súrlódási erő ugyanabba az irányba mutat. Ezért a munkatétel felírásakor a súrlódási erő munkáját kettébontjuk.

A teljes folyamatra: $W_{súrl} + W_{rug} + W_{mg} = 0.$

$$W_{neh} = -mg(L-L_0)\ ;\quad W_{rug} = \frac{1}{2}D(L-L_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{súrl.} = mg(L-L_0) - \frac{1}{2}D(L-L_0)^2 = -0{,}25\,J$$

$$W_{súrl} = -\int \mu N\,dx = -\int_0^{x_0} \mu N\,dx - \int_{x_0}^{x_{max}} \mu N'\,dx =$$

$$= -\mu \int_0^{x_0} \left(\left[D(L-L_0) - mg\right]\cos\alpha - Dx\sin\alpha\cos\alpha\right)dx - \mu \int_{x_0}^{x_{max}} \left(\left[mg - D(L-L_0)\right]\cos\alpha + Dx\sin\alpha\cos\alpha\right)dx =$$

$$= -\mu\left[D(L-L_0) - mg\right]\cos\alpha\cdot x_0 + \mu D\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{x_0^2}{2} - \mu\left[mg - D(L-L_0)\right]\cos\alpha \times (x_{max}-x_0) - \mu D\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\left(x_{max}^2 - x_0^2\right) =$$

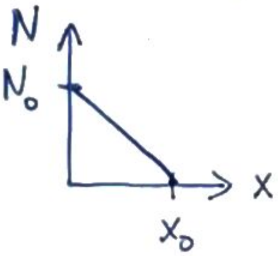
$$= \mu\left[D(L-L_0) - mg\right]\cos\alpha\cdot(x_{max} - 2x_0) + \mu D\sin\alpha\cos\alpha\left(x_0^2 - \frac{x_{max}^2}{2}\right) =$$

$$= \mu\cdot(-1{,}13\,J)$$

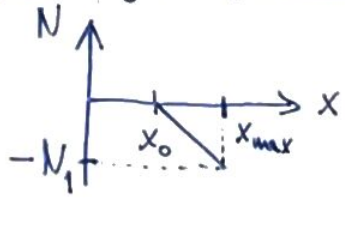
A munkatételből kapott eredménnyel: $\underline{\underline{\mu}} = \frac{0{,}25}{1{,}13} = \underline{\underline{0{,}22}}$

<u>Megjegyzés:</u> A súrlódási erő munkája integrálás nélkül is megadható. Természetesen figyelni kell arra, hogy a nyomóerő irányt vált. Lineáris $N(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ átlagos nyomóerő

1, ha $0 \le x < x_0$:



2, ha $x_0 \le x \le x_{max}$:

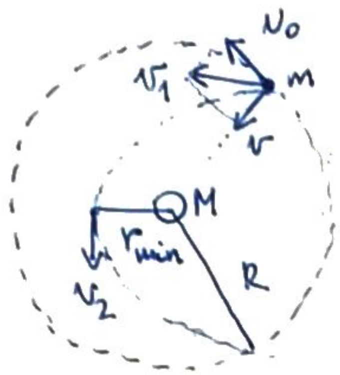


$$\to W_{súrl} = -\mu\bar{N}_1\cdot x_0 - \mu\bar{N}_2\cdot(x_{max} - x_0) = \mu\cdot(-1{,}15\,J)$$

↳ ugyanaz

átlagos nyomóerő: $\bar{N}_1 = \frac{N_0}{2} = \frac{D(L-L_0) - mg}{2}\cos\alpha$; $\bar{N}_2 = \frac{N_1}{2} = \frac{mg\cos\alpha}{2}$

F2.



a) A körpályán történő mozgásra:

$$\frac{\gamma m M}{R^2} = m\frac{v_0^2}{R} \Rightarrow \underline{v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}}$$

(első kozmikus sebesség)

Az erőlökést követően másik pályára tér át az űrhajó (teljes energiájától függően ellipszis, parabola vagy hiperbola).

Energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}m v_1^2 - \frac{\gamma m M}{R} = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{\gamma m M}{r_{min}}$$

$r_{min} = \frac{2}{3}R$:

$$v_1^2 - \frac{2\gamma M}{R} = v_2^2 - \frac{2\gamma M}{2R}\cdot 3$$

Perdületmegmaradás: $m v_0 R = m v_2 r_{min} \Rightarrow v_2 = \frac{3}{2}v_0$

Tehát:

$$v_1^2 = \frac{9}{4}v_0^2 + \frac{\gamma M}{R}(2-3) = \left(\frac{9}{4}-1\right)\frac{\gamma M}{R} = \frac{5}{4}\frac{\gamma M}{R} = \frac{5}{4}v_0^2$$

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{\gamma M}{R}}}}$$

b) Az űrhajó energiája:

$$E = \frac{1}{2}m v_1^2 - \frac{\gamma m M}{R} = \frac{1}{2}m\cdot\frac{5}{4}\frac{\gamma M}{R} - \frac{\gamma M m}{R} = -\frac{3}{8}\frac{\gamma M m}{R} < 0 \rightarrow$$

$\rightarrow$ ellipszispályára tér át.

Mivel $E = -\frac{\gamma M m}{2a}$, ezért $a = \frac{4}{3}R = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max})$

$\underline{\underline{r_{max}}} = 2a - r_{min} = \underline{\underline{2R}}$

c)

körpálya esetén:

$$v_0 = \frac{2R\pi}{T} \Rightarrow \frac{\gamma M}{R} = \frac{4R^2\pi^2}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{áll.}$$

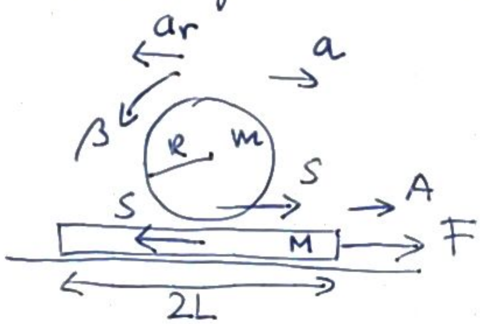
ellipszispályára:

$$\frac{T_e^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \quad \text{(Kepler III. törvénye)}$$

$$\underline{\underline{\frac{T_e}{T}}} = \sqrt{\frac{a^3}{R^3}} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2} \simeq 2{,}8}}$$

<u>megjegyzés:</u> Ha $r_{min} = R/2$, akkor $v_1 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$. Ebben az esetben $E = 0$, tehát az űrhajó parabolapályára tér át, azaz a Földtől legtávolabbi pont a végtelenben van, a keringési idő végtelenszer nagyobb lett, hiszen az űrhajó nem tér vissza.

F3.



a_r: henger deszkához képesti relatív gyorsulása

a) deszkára: $F - S = MA$ (1)

hengerre: $S = ma$ (2) $\qquad a = A - a_r$ (5)

$$\left.\begin{array}{l} a_r = \beta R \quad (3) \\ SR = \frac{1}{2} mR^2\beta \quad (4) \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2} m a_r \overset{(2)}{=} ma \Rightarrow a = \frac{a_r}{2}$$

Ezzel (5): $a = A - 2a \Rightarrow 3a = A$

(1): $F - ma = MA$

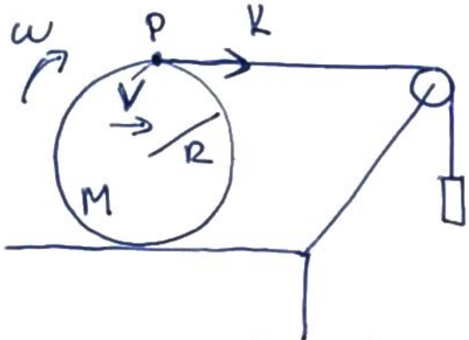
$$F - ma = 3Ma \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{F}{m+3M}}} \; ; \quad \underline{\underline{A = \frac{3F}{m+3M}}}$$

b) L utat tesz meg a henger középpontja a deszkán, amíg le nem esik:

$$L = \frac{a_r}{2} t^2$$

$$\underline{\underline{t}} = \sqrt{\frac{2L}{a_r}} = \sqrt{\frac{2L}{2a}} = \sqrt{\frac{L}{a}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{L(m+3M)}{F}}}}$$

F4.



$\downarrow v_0$; majd megrándulás után $v = 0$.

A megrándulás után a henger tömegközéppontja V-vel indul el, szögsebessége ω lesz. Mivel nincs súrlódás, a henger perdülete P-re vonatkoztatva megmarad:

$$0 = MVR - \frac{1}{2} MR^2 \omega \Rightarrow V = \frac{R\omega}{2}$$

A kötélerő belső erő, így a henger + test rendszer lendülete megmarad:

$$m v_0 = MV \Rightarrow v_0 = \frac{M}{m} V$$

Rugalmas ütközés (energiamegmaradás):

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

Felhasználva a korábbi eredményeket:

$$m \cdot \frac{M^2}{m^2} V^2 = M V^2 + \frac{1}{2} M \cdot 4 V^2$$

$$\underline{\underline{\frac{M}{m} = 3}}$$