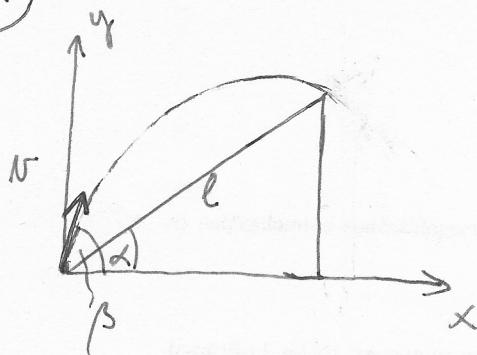


F1.



$$\left. \begin{aligned} x &= v \cdot \cos \beta \cdot t \\ y &= v \cdot \sin \beta \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$y(x) = \tan \beta \cdot x - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \beta} \cdot x^2$$

Felhasználva, hogy $\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \tan^2 \beta$:

$$y(x) = x \cdot \tan \beta - \frac{g x^2}{2v^2} (1 + \tan^2 \beta)$$

A legkisebb pontba eljut, ha $x = l \cdot \cos \alpha$ esetén $y = l \cdot \sin \alpha$:

$$l \cdot \sin \alpha = l \cdot \cos \alpha \cdot \tan \beta - \frac{g l^2 \cos^2 \alpha}{2v^2} (1 + \tan^2 \beta)$$

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{g l \cos \alpha}{2v^2} (1 + \tan^2 \beta) \Rightarrow v^2 = \frac{g l \cos \alpha}{2} \cdot \frac{1 + \tan^2 \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

Ennek a kifejezésnek a minimumát keressük:

$$\frac{d(v^2)}{d\beta} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \tan \beta \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} (\tan \beta - \tan \alpha) - (1 + \tan^2 \beta) \frac{1}{\cos^2 \beta} = 0$$

$$2 \tan^2 \beta - 2 \tan \alpha \cdot \tan \beta - 1 - \tan^2 \beta = 0$$

$$\tan^2 \beta - 2 \tan \alpha \cdot \tan \beta - 1 = 0$$

$$\tan \beta = \frac{2 \tan \alpha \pm \sqrt{4 \tan^2 \alpha - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \tan \alpha \pm \sqrt{\tan^2 \alpha + 1} \quad (\text{belátható, hogy itt tényleg minimum van})$$

Mivel $\tan \beta > \tan \alpha$ kell legyen (különben a „lejtőben” kellene elhajítani):

$$\tan \beta = \tan \alpha + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$$

Telát a minimális sebesség:

$$\underline{\underline{v_{\min}}} = \sqrt{\frac{gl \cdot \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha})^2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{gl \cdot \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{gl \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} =$$

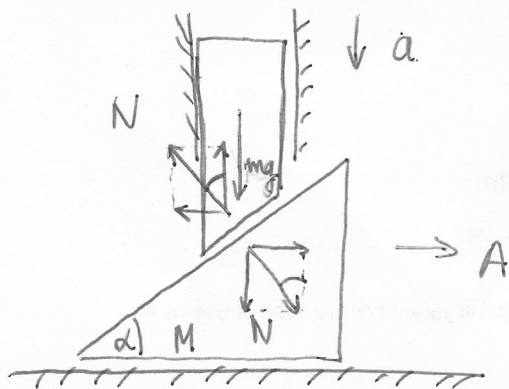
$$= \sqrt{gl \cos \alpha} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}_{1/\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{gl \cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}} =$$

$$\underline{\underline{= \sqrt{gl (1 + \sin \alpha)}}}$$

- ha $l = L$: $v_{\min} = \sqrt{gL (1 + \sin \alpha)}$

- ha $l = \frac{L}{\cos \alpha}$: $v_{\min} = \sqrt{gL \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}}$

72.



$$mg - N \cdot \cos \alpha = ma$$

$$N \cdot \sin \alpha = MA \rightarrow N = \frac{MA}{\sin \alpha}$$

A lejtőhöz képest az m tömegű test a lejtőn lefelé mozog a_r relatív gyorsulással:



$$a = A \cdot \tan \alpha$$

Tehát a fenti egyenletekből:

$$mg - \frac{MA}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = mA \cdot \tan \alpha$$

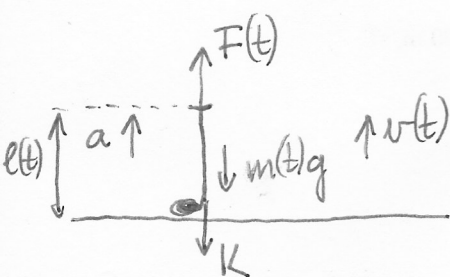
$$mg = A \left(m \cdot \tan \alpha + \frac{M}{\tan \alpha} \right)$$

$$A = g \cdot \frac{m \cdot \tan \alpha}{m \cdot \tan^2 \alpha + M} = g \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + \frac{M}{m}}$$

Valamint:

$$a = g \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + \frac{M}{m}}$$

73.



$$F(t) - m(t)g - K(t) = m(t) \cdot a$$

$$F(t) = K(t) + m(t) \cdot g + m(t) \cdot a$$

A láncszemek megmozdításához szükséges a'' : $K(t) = \frac{m}{L} \cdot v(t)^2$

Egyszerűsítően gyorsuló mozgás: $v(t) = a \cdot t$, és a mozgásban lévő láncszemek:

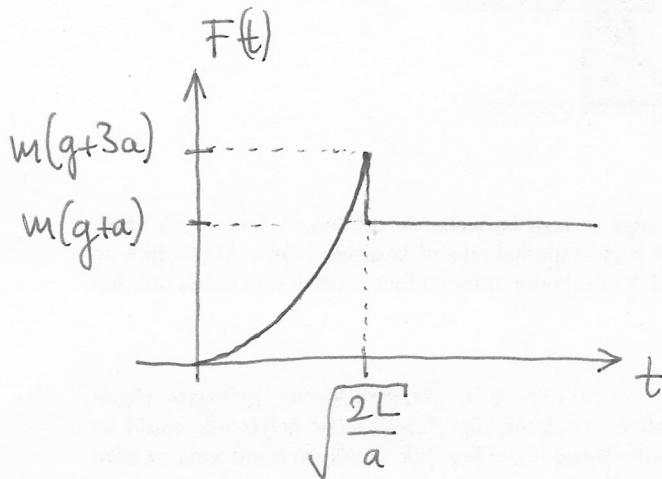
$$l(t) = \frac{a}{2} t^2 \rightarrow m(t) = \frac{m}{L} \cdot l(t)$$

Tehát: $F(t) = \frac{m}{L} \cdot a^2 t^2 + \frac{m}{L} \frac{a}{2} t^2 (a+g) = \frac{3}{2} \frac{ma^2}{L} t^2 + \frac{1}{2} \frac{ma \cdot g}{L} t^2$

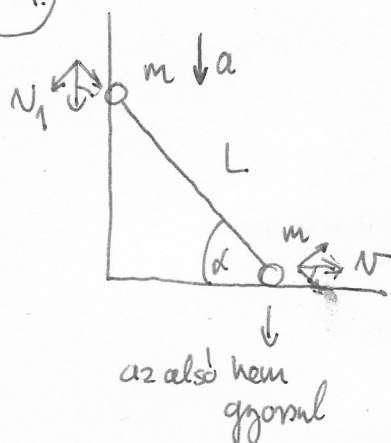
Ez addig érvényes, amíg a teljes láncot fel nem emeljük. Ezt követően:

$$F(t) - mg = ma \rightarrow F(t) = m(g+a)$$

A felemelési idő: $t_0 = \sqrt{\frac{2L}{a}} \rightarrow F(t_0) = \frac{3}{2} \frac{ma^2}{L} \cdot \frac{2L}{a} + \frac{1}{2} \frac{ma \cdot g}{L} \cdot \frac{2L}{a} =$
 $= 3ma + mg = m(g+3a)$

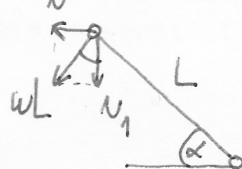


¶4. a) Rúdcsúcs sebesség aránya:

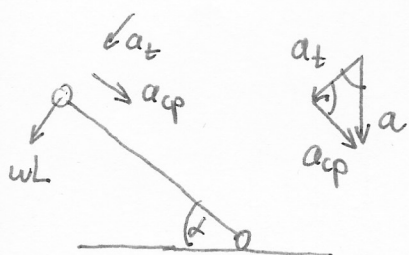


$$v \cdot \cos \alpha = N_1 \cdot \sin \alpha \rightarrow N_1 = \frac{v}{\tan \alpha}$$

vagy pl.: alsó gyöngyre ülve a felső akciónál végez körmozgást:



$$\frac{v}{N_1} = \tan \alpha \rightarrow N_1 = \frac{v}{\tan \alpha}$$

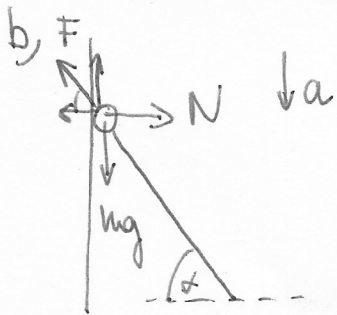


$$a = \frac{a_{cp}}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{(vL)^2}{L} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{v^2}{\sin^2 \alpha \cdot L} = \frac{v^2}{L} \cdot \frac{1}{\sin^3 \alpha}$$

$$vL = \frac{v}{\sin \alpha}$$

ismét az alsón ülve

(mivel az nem gyorsul, ugyanazt a gyorsulást látjuk a talaj rendszerében is)



A nyélben működő rugó lép fel, mert a nyél súfrol

$$\left. \begin{aligned} mg - F \sin \alpha &= ma \\ N - F \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$mg - N \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = ma$$

$$N(\alpha) = (mg - ma) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ a, \text{ redukciójával}}}{=} m \left(g - \frac{v^2}{L \sin^3 \alpha} \right) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

g) Az elváláskor: $N=0$:

$$\frac{v^2}{L} \cdot \frac{1}{\sin^3 \alpha} = g \rightarrow \sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{v^2}{gL}} \rightarrow \alpha \approx 9,2^\circ$$
