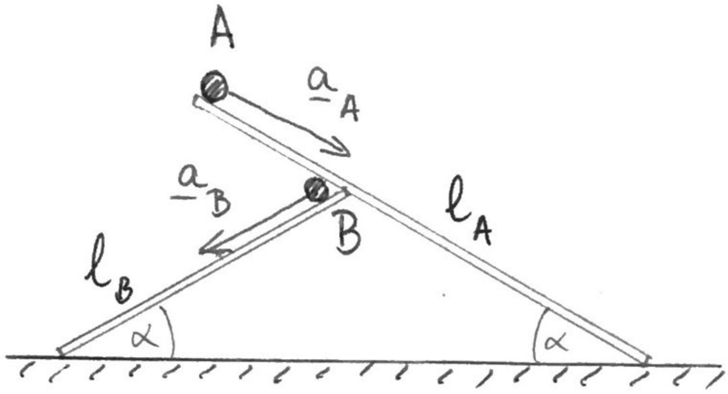
Kísérleti fizika I.

1. zárthelyi megoldásai

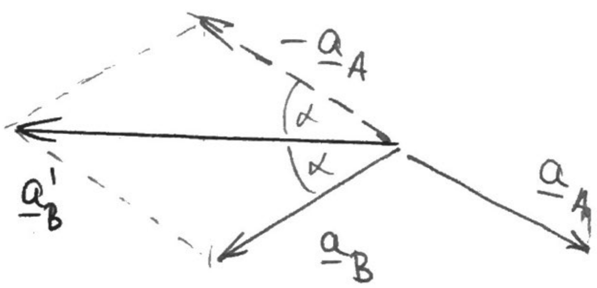
F1.



A két test gyorsulásának nagysága egyenlő és időben állandó:

$$|\underline{a}_A| = |\underline{a}_B| = g\sin\alpha .$$

Üljünk bele az „A" jelű testtel együtt mozgó (gyorsuló) vonatkoztatási rendszerbe! Ebben az „A" test áll, a „B" test pedig $\underline{a}_B - \underline{a}_A$ gyorsulással mozog:



$$\underline{a}_B' = \underline{a}_B - \underline{a}_A$$

$$|\underline{a}_B'| = 2|\underline{a}_B|\cos\alpha$$

$$|\underline{a}_B'| = 2g\sin\alpha\cos\alpha = g\sin 2\alpha .$$

Látható, hogy a „B" test vízszintesen mozog $g\sin 2\alpha$ gyorsulással az „A" testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben. A két test akkor lesz egymáshoz legközelebb, amikor éppen <u>egymás alatt</u> helyezkednek el.

Legyen a két lejtő hossza l_A, illetve l_B, ekkor

$$l_A = \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t_1^2 \quad , \quad l_B = \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t_2^2 .$$

A minimális távolság eléréséig a „B" jelű test az „A"-hoz képest $(\ell_A - \ell_B)\cos\alpha$ távolsággal mozdul el vízszintesen, ezért a keresett időpillanatra fennáll:

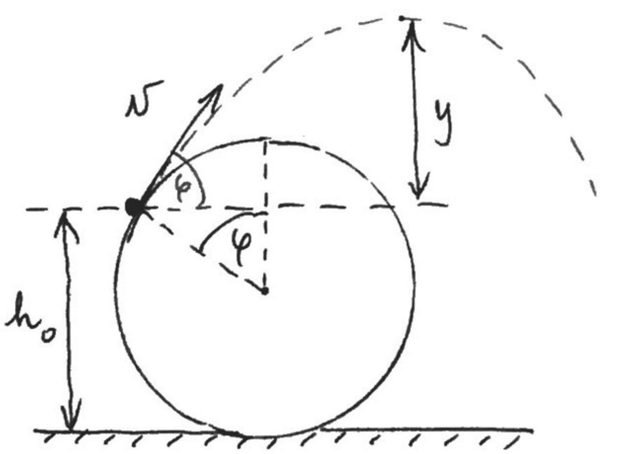
$$(\ell_A - \ell_B)\cancel{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \underbrace{2g\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}_{|\underline{a}'_B|} \cdot t_{min}^2$$

Az ℓ_A és ℓ_B távolságokra felírt korábbi két egyenlet felhasználásával:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{t_1^2 - t_2^2}{2}},$$

ennyi idő után lesz a testek távolsága minimális.

F2.



Tekintsük az ábrán látható, φ szögű helyzetben leváló sárdarabkát! Ez a talajtól mérve

$$h_0 = R + R\cos\varphi$$

magasságból indul, a vízszinteshez képest φ szögben.

A pálya tetőpontján a függőleges sebességkomponens eltűnik, eddig tehát

$$t = \frac{v\sin\varphi}{g}$$ idő telik el.

Ezen t idő alatt a függőleges emelkedés:

$$y = v\sin\varphi \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}\,\frac{v^2 \sin^2\varphi}{g}.$$

A talajhoz képest elért magasság:

$$h = h_0 + y = R + R\cos\varphi + \frac{v^2\sin^2\varphi}{2g}.$$

A $h(\varphi)$ függvény ott maximális, ahol φ szerinti deriváltja nulla:

$$\frac{dh}{d\varphi} = \emptyset + R(-\sin\varphi) + \frac{v^2 \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi}{2g}$$

$$\frac{dh}{d\varphi} = \emptyset, \text{ ha } \cos\varphi^* = \frac{gR}{v^2} < 1.$$

A legmagasabbra emelkedő sárdarab tehát $\arccos\left(\frac{gR}{v^2}\right)$ szöggel válik le. Ekkor:

$$h(\varphi^*) = R + R\cdot \underbrace{\frac{gR}{v^2}}_{\cos\varphi^*} + \frac{v^2}{2g}\underbrace{\left(1 - \frac{g^2R^2}{v^4}\right)}_{1-\cos^2\varphi^*}$$

Egyszerűsítés után:

$$h_{max} = h(\varphi^*) = R + \frac{gR^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g}.$$

F3

a lánc szabadon esik

Az asztal megállítja a láncszemeket:

$$N_1 = \frac{\Delta m \cdot v(t)}{\Delta t} = \frac{m}{L}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot v(t) = \frac{m}{L} v^2(t) = \frac{m}{L} g^2 t^2$$

Az asztalon nyugvó láncszemek:

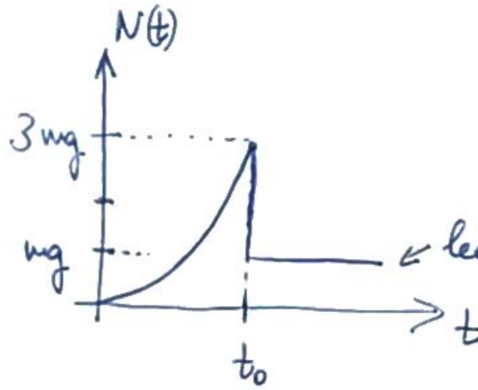
$$N_2 = \left(m - m(t)\right) g = \left(m - \frac{m}{L}\cdot \ell(t)\right) g = mg\left(1 - \frac{L - \frac{g}{2}t^2}{L}\right) =$$

$$= \frac{m}{2L}\cdot g^2 t^2$$

Teljes erő: $N(t) = \frac{3}{2}\frac{m}{L} g^2 t^2$

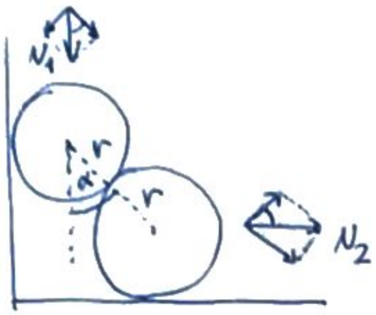
leérés ideje: $t_0 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$

$$N(t_0) = \frac{3}{2}\frac{m}{\cancel{L}}\cdot g^{\cancel{2}}\cdot\frac{2\cancel{L}}{\cancel{g}} = 3mg$$



← leérés után a teljes lánc az asztalon nyugszik.

F4



a, sugárirányban:

$$v_1 \cdot \cos\alpha = v_2 \sin\alpha \Rightarrow v_1 = v_2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Energiamegmaradás:

$$3mgr = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mg\left(r + 2r \cdot \cos\alpha\right)$$

$$4gr\left(1-\cos\alpha\right) = v_2^2 \underbrace{\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1\right)}_{1/\cos^2\alpha}$$

$$v_2 = \sqrt{2gr}\cos\alpha \cdot \sqrt{1-\cos\alpha}$$

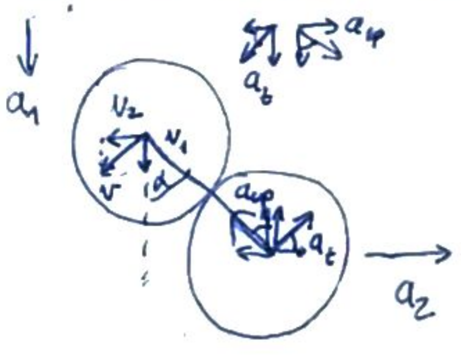
$$v_1 = \sqrt{2gr}\sin\alpha\sqrt{1-\cos\alpha}$$

b, Elváláskor v_2 maximális lesz:

$$\frac{dv_2^2}{d\alpha} = 0 = \left(\cos^2\alpha - \cos^3\alpha\right)' = 2\cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) - 3\cos^2\alpha(-\sin\alpha)$$

- $\sin\alpha = 0$: $v_2 = 0$ (min.)
- $\cos\alpha = 0$ ($\alpha = \pi/2$) (eddig már megtörténik az elválás)
- $\cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 48{,}2^\circ$

Dinamikai megfontolással



Beírva az alsó hengerre:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{2r} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2r} = 2g\left(1-\cos\alpha\right)$$

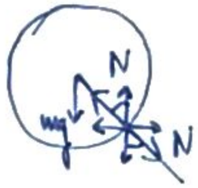
$$a_1 = a_t \cdot \sin\alpha + a_{cp}\cos\alpha$$

$$a_2 = a_t\cos\alpha - a_{cp}\sin\alpha$$

$$a_t = \frac{a_1 - a_{cp}\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a_2 + a_{cp}\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$a_1\cos\alpha - a_{cp}\cos^2\alpha = a_2\sin\alpha + a_{cp}\sin^2\alpha$$

$$a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha = a_{cp} = 2g(1-\cos\alpha)$$



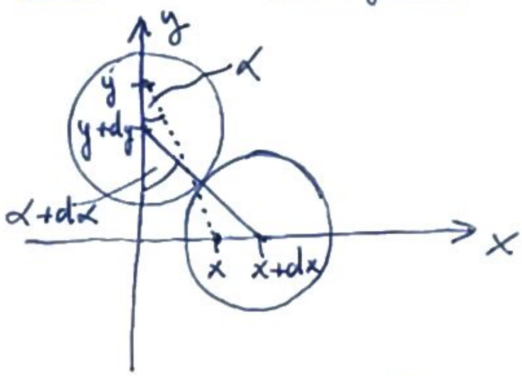
$$mg - N\cos\alpha = ma_1$$
$$N\sin\alpha = ma_2$$

$$g\cos\alpha - \frac{N}{m}\cos^2\alpha - \frac{N}{m}\sin^2\alpha = 2g - 2g\cos\alpha$$

$$N(\alpha) = mg\,(3\cos\alpha - 2) \geq 0$$

$N(\alpha) = 0$: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

Elmozdulások vizsgálata



$$x = 2r\sin\alpha$$
$$y = 2r\cos\alpha$$

$dx > 0$ $\quad d\alpha > 0$

$dy < 0$

$$\dot{x} = 2r\cos\alpha \cdot \dot{\alpha}$$
$$\dot{y} = 2r(-\sin\alpha)\cdot\dot{\alpha}$$

$$\ddot{x} = 2r\left(-\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}^2 + \cos\alpha\cdot\ddot{\alpha}\right) \rightarrow a_2 = 2r\left(\beta\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha\right)$$

$$\ddot{y} = 2r\left(-\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}^2 - \sin\alpha\cdot\ddot{\alpha}\right) \rightarrow a_1 = 2r\left(\beta\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha\right)$$