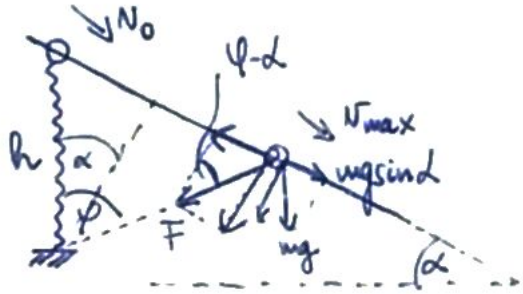
F1

$\alpha = 30°$

$\varphi = 70°$



a, Amikor a gyöngy sebessége maximális, az lejtőirányban sem gyorsul.

$$\left.\begin{array}{l} mg\sin\alpha = F\sin(\varphi-\alpha) \\ F = D\cdot\left[\frac{h\cdot\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)} - h\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{D}} = \frac{mg}{h}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}\cdot\frac{1}{\frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}-1} \approx$$

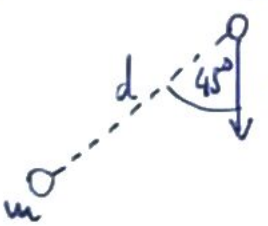
$$\approx \underline{\underline{6\frac{mg}{h}}}$$

b, Energiamegmaradás: ($v_{vég} = 0$)

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}D\cdot\left(\frac{h}{tg\alpha} - h\right)^2$$

$$\underline{\underline{v_0}} = \sqrt{\frac{Dh^2}{m}\left(\frac{1}{tg\alpha}-1\right)^2 - 2gh} \approx \underline{\underline{1{,}1\sqrt{gh}}}$$

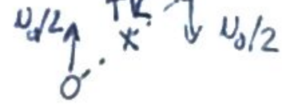
F2



$$v_0 = k\sqrt{\frac{\gamma m}{d}}$$

a, TK sebessége. $v_{TK} = \frac{v_0}{2}$. TK-ba ülve az energia:

$$E = 2\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{\gamma m^2}{d}$$



Ha $E \geq 0$, akkor nem záródik a pálya (parabola v. hiperbola):

$$k^2\frac{\gamma m}{4d}-\frac{\gamma m}{d}\geq 0$$

$$\underline{\underline{k\geq 2}}$$

<u>Megjegyzés:</u> Ür rendszerében nagyon távol az energia $2\,\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2$, ebben a rendszerben a TK mozog, nem $E\geq 0$ a feltétel (Nagyon távol már azonos $v_0/2$ sebességgel mozognak.)

b, Ismét ugrunk a TK-ba. Amikor a testek a legtávolabb vannak, sebességvektoruk merőleges a TK-t a testekkel összekötő szakaszra.

Perdület megmarad:

$$2\cdot m\frac{v_0}{2}\cdot\frac{d}{2}\sin 45^\circ=2m v\cdot\frac{d_{max}}{2}\rightarrow v d_{max}=\frac{v_0 d\cdot\sqrt{2}}{4}$$

Energia is megmarad:

$$2\,\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2-\frac{\gamma m^2}{d}=2\cdot\frac{1}{2}mv^2-\frac{\gamma m^2}{d_{max}}$$

$$\frac{v_0^2}{4}-\frac{\gamma m}{d}=\frac{v_0^2 d^2\,2}{16\cdot d_{max}^2}-\frac{\gamma m}{d_{max}}$$

$$\frac{\cancel{\gamma m}}{4d}-\frac{\cancel{\gamma m}}{d}=\frac{\cancel{\gamma m}}{\cancel{d}}\cdot\frac{d^{\cancel{2}}}{8\cdot d_{max}^2}-\frac{\cancel{\gamma m}}{d_{max}}$$

$$-\frac{3}{4d}=\frac{d}{8d_{max}^2}-\frac{1}{d_{max}}$$

$$6d_{max}^2-8\,d\cdot d_{max}+d^2=0$$

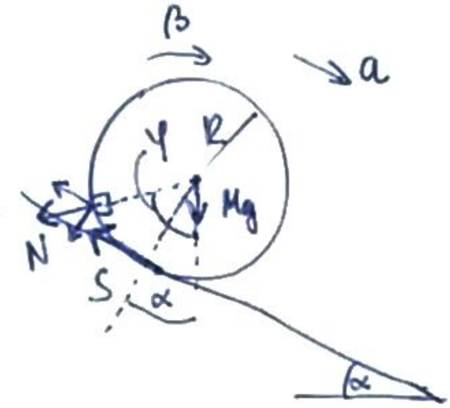
$$d_{max} = \frac{8 \pm \sqrt{64-4\cdot 6\cdot 1}}{2\cdot 6}\,d \;\rightarrow\; \underline{\underline{d_{max}}} = \frac{8+\sqrt{40}}{12}\,d \approx \underline{\underline{1{,}19\,d}}$$

(A másik megoldás a minimális távolságot adja)

F3.

$\alpha = 20°$

$\underline{M = 2m}$



test:

$$mg\sin\alpha + N\sin(\varphi-\alpha) = ma \quad (1)$$

cső:

$$Mg\sin\alpha - S - N\sin(\varphi-\alpha) = Ma \quad (2)$$

$$SR = MR^2\cdot\beta \quad (3)$$

$$a = \beta R \quad (4)$$

a, (1) és (2):

$$(M+m)g\sin\alpha - S = (m+M)a$$

(Ezt a teljes rendszerre azonnal is felírhatjuk.)

(3) és (4)-gyel:

$$(M+m)g\sin\alpha - Ma = (m+M)a$$

$$a = g\cdot\frac{(M+m)\sin\alpha}{m+2M} = \underline{\underline{\frac{3}{5}g\sin\alpha = 0{,}21g}}$$

b, A test csak lejtőirányba gyorsul

$$mg\cos\alpha = N\cdot\cos(\varphi-\alpha) \rightarrow N = mg\frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

(1)-gyel:

$$\cancel{m}g\sin\alpha + \cancel{m}g\cos\alpha\cdot tg(\varphi-\alpha) = \cancel{m}a$$

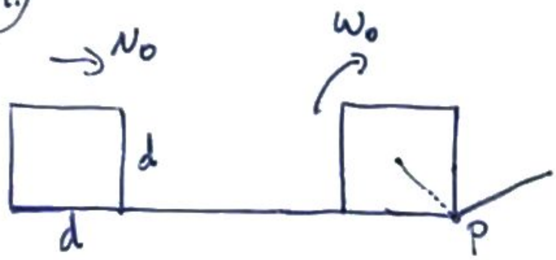
$$tg(\varphi-\alpha) = \frac{a-g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{(M+m)\sin\alpha-(m+2M)\sin\alpha}{(m+2M)\cos\alpha} =$$

$$= -\frac{M}{m+2M}\cdot tg\alpha$$

Negatív előjel azt jelzi, hogy $\alpha > \varphi$.

$$\underline{\underline{\varphi}} = \alpha - \mathrm{arctg}\left(\frac{M\,tg\alpha}{m+2M}\right) = \underline{\underline{11{,}7^\circ}}$$

F4.



a, A P-re vonatkoztatva a kocka perdülete megmarad. A P körül kezd el forogni

$$m v_0 \frac{d}{2} = \Theta_P \omega_0$$

$$\Theta_P = \frac{1}{6}md^2 + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}d\right)^2 = \frac{2}{3}md^2$$

Tehát:
$$\frac{v_0 \cancel{d}}{2} = \frac{2}{3}d^{\cancel{2}}\omega_0 \rightarrow \underline{\underline{\omega_0 = \frac{3v_0}{4d}}}$$

b) Határesetben a kocka tömegközéppontjának legmagasabb helyzetében a TK sebessége nulla:

ütközés után:
$$\frac{1}{2}\Theta_p\omega_0^2 + mg\frac{d}{2} = mg\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}d$$

$$\frac{2}{3}\cancel{m}d^{\cancel{2}}\,\frac{9v_0^2}{16d^{\cancel{2}}} = (\sqrt{2}-1)\cancel{m}gd$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{8(\sqrt{2}-1)}{3}gd} \approx 1{,}05\sqrt{gd}$$