KÍSÉRLETI FIZIKA 1.

Félév menete:

I. tömegpont
↓
pontrendszer
↓
merev testek
↓
deformálható testek
↓ rugalmas testek
↘ folyadékok, víz

II. rezgések
hullámok

Kinematika: mozgás leírása
|
Dinamika: mozgás oka, Newton-törvények, erők
|
Megmaradási törvények

TÖMEGPONT KINEMATIKÁJA

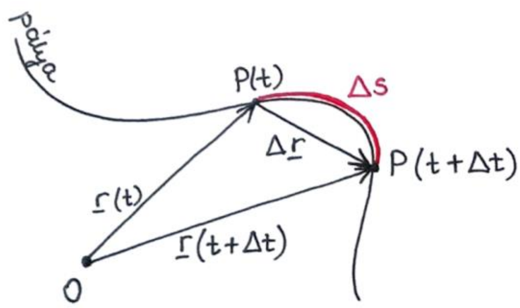
~ A pontszerű test mikor, hol található?

Tömegpont: kiterjedése sokkal kisebb, mint a mozgásának pályája, ill. a mozgásra jellemző távolságok.

A kérdésre adott válasz: $\underline{r}(t)$ függvény: test helyzetét adja meg az idő függvényében tetszőleges vonatkoztatási ponthoz viszonyítva

vektor $\quad$ skalár, független változó

Az $\underline{r}(t)$ vektor helyvektor: O vonatkoztatási pontból a test helyéhez mutat



referencia (viszonyítási) pont

pálya: általános esetben térgörbe

$\Delta\underline{r}$: elmozdulásvektor:

$$\Delta\underline{r} = \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$$

Δs: Δt alatt megtett út → skalár!

$$\Delta s \geq |\Delta\underline{r}|$$

SEBESSÉG

átlagsebesség definíciója: $\underline{v}_{átl} = \dfrac{\Delta\underline{r}}{\Delta t} = \dfrac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$ differenciahányados

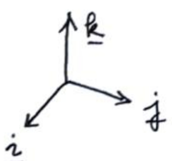
pillanatnyi sebesség: Δt csökkentésével határérték segítségével definiáljuk:

$$\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\underline{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \underline{v}_{átl}$$

$$\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$ differenciálhányados

=> Az $\underline{r}(t)$ függvényhez $\underline{v}(t)$ függvény rendelhető, mely megadja $\underline{r}(t)$ változási sebességét.

Descartes-féle koordináta-rendszerben:



$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$

$x(t), y(t), z(t)$ skalár függvények

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k} = v_x\underline{i} + v_y\underline{j} + v_z\underline{k}$$

$\dfrac{dx(t)}{dt}, \dfrac{dy(t)}{dt}, \dfrac{dz(t)}{dt}$ skalár fv-ek deriváltja

$v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}, \ldots$ sebességkomponensek

Sebesség nagysága: $v = |\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Sebességvektor iránya:

Általánosan igaz: $|\Delta\underline{r}| \leq \Delta s$. Ha $\Delta t \to 0$: $|\Delta\underline{r}| \to \Delta s$, azaz $|d\underline{r}| = ds$.

Ekkor $d\underline{r} = ds \cdot \underline{u}_T$, ahol $\underline{u}_T$: tangenciális (érintőirányú) egységvektor.

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\underline{r}}{ds} = v(t) \cdot \underline{u}_T$$

, azaz $\underline{v}(t)$ érintőirányú. (pálya érintőjének irányába mutat)

$\dfrac{ds}{ds}$-el bővítés

skalár seb.

GYORSULÁS – sebességvektor $\underline{v}(t)$ változási sebessége

$$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\underline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\underline{k} = a_x(t)\,\underline{i} + a_y(t)\,\underline{j} + a_z(t)\,\underline{k}$$

helyvektor idő szerinti második deriváltja

Gyorsulásvektor komponensei: $a_x(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$, ...

Nagysága: $a = |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Gyorsulásvektor iránya:

korábban volt: $\underline{v}(t) = v(t)\cdot \underline{u}_T(t)$

($\underline{u}_T(t)$: érintőirányú egységvektor – függhet az időtől!)

Ezzel a gyorsulás:

$$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(v(t)\cdot\underline{u}_T(t)\right)}{dt} \underset{\substack{\text{szorzat}\\\text{deriválása}}}{=} \underbrace{\frac{dv(t)}{dt}\cdot\underline{u}_T(t)}_{1.} + \underbrace{v(t)\cdot\frac{d\underline{u}_T(t)}{dt}}_{2} \qquad (1)$$

1. pálya érintőjének irányába ($\underline{u}_T(t)$) mutat
   nagysága: sebesség nagyságának idöderiváltja

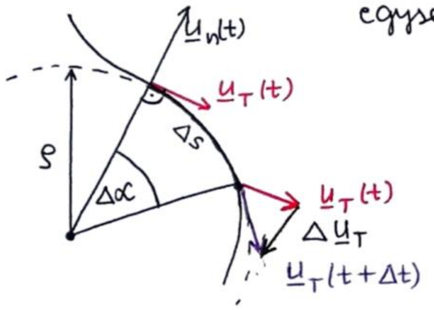
2. Ha a pálya nem egyenes, akkor $\underline{u}_T$ iránya változik az idő függvényében => $\underline{u}_T(t)$ idöderiváltja nem nulla

Számoljuk ki $\dfrac{d\underline{u}_T(t)}{dt}$-t!

$\underline{u}_T$ kicsi megváltozása: $\Delta\underline{u}_T \approx -\Delta\alpha\,\underline{u}_n$

$\Delta\alpha$: $\underline{u}_T$ elfordulása Δt alatt

$\underline{u}_n$: pálya simulósikjában lévő, pályaérintőre merőleges egységvektor



Δt alatt megtett út: $\Delta s \approx \varrho\cdot\Delta\alpha \longrightarrow \Delta\alpha = \dfrac{\Delta s}{\varrho}$

ϱ: pillanatnyi simulókör sugara

$\Rightarrow \Delta\underline{u}_T \approx -\Delta\alpha\cdot\underline{u}_n \approx -\dfrac{\Delta s}{\varrho}\underline{u}_n$

Ezzel $$\frac{d\underline{u}_T(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\underline{u}_T}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{1}{\varrho}\underline{u}_n = -\frac{v}{\varrho}\underline{u}_n$$

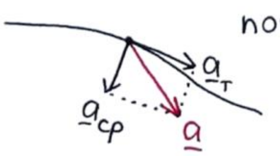
Ezt visszahelyettesítve (1)-be:

$$\underline{a}(t) = \frac{dv}{dt}\underline{u}_T - \frac{v^2}{\varrho}\underline{u}_n = a_T\,\underline{u}_T + a_n\,\underline{u}_n$$

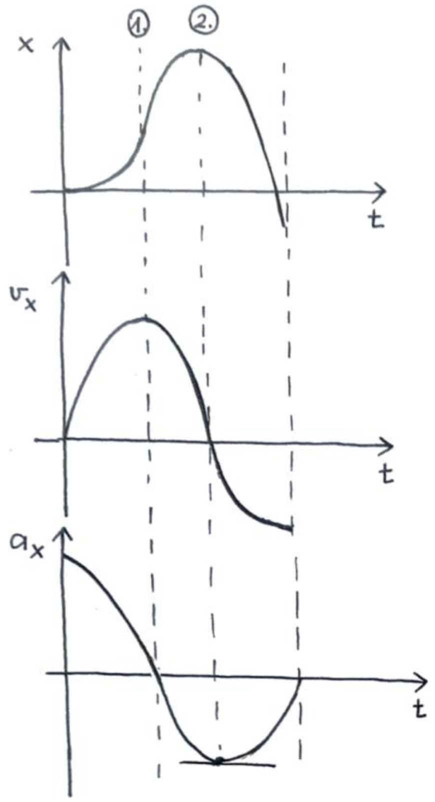
tangenciális komponens: $a_T = \dfrac{dv}{dt}$ (pálya érintő irányú)

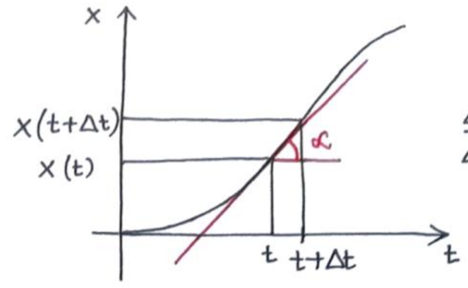
normális komponens: $a_n = -\dfrac{v^2}{\varrho}$ (pályára merőleges komponens)

($a_n = a_{cp}$ centripetális gyorsulás)



Függvény, deriváltfüggvény kapcsolata

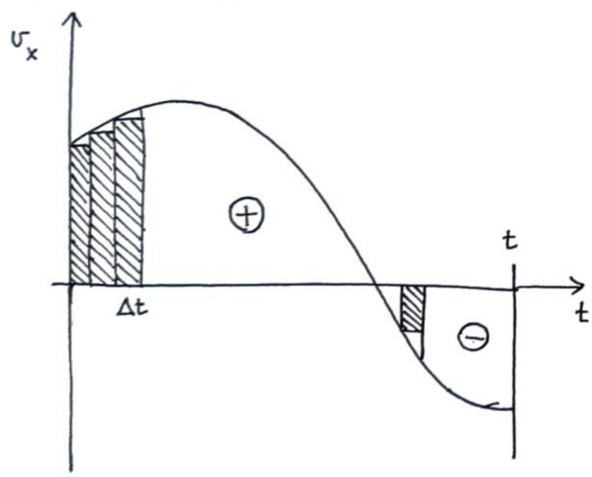




$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\alpha$$

1. $x(t)$ inflexiós pontja $\rightarrow$ $v_x(t)$ maximuma
   $\rightarrow$ $a_x(t)$ ott vált előjelet
2. $x(t)$ maximuma $\rightarrow$ $v_x(t)$ előjelet vált
   $\rightarrow$ $a_x(t)$ minimuma : v_x itt a legmeredekebb

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS



Közelítően: $x(t) \approx \sum_{0}^{t} v_x(t) \cdot \Delta t$

Finomítás: Δt -t egyre kisebbre veszem: $\Delta t \rightarrow 0$

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{0}^{t} v(t) \cdot \Delta t = \int_{0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

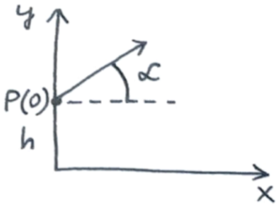
határozott integrál

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{a}^{b} f(x) \Delta x$$

$I = F(b) - F(a)$, ahol $F(x)$ az $f(x)$ primitív fv-e: $F'(x) = f(x)$

PÉLDÁK KÜLÖNBÖZŐ MOZGÁSOKRA – KINEMATIKAI LEÍRÁS

FERDE HAJÍTÁS



$P(0) = (0; h)$ $\qquad x(0)=0,\ y(0)=h$

$v(0) = v_0$ $\qquad v_x(0)=v_0\cdot\cos\alpha,\quad v_y(0)=v_0\cdot\sin\alpha$

$\underline{a} = -g\underline{j}$ $\qquad a_x(t)=0 \qquad a_y(t)=-g$

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t \underbrace{0}_{a_x(t)=0}\cdot\, dt = v_0\cdot\cos\alpha$$

$$v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t -g\, dt = v_0\cdot\sin\alpha - g\cdot t$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x\, dt = v_0\cos\alpha\cdot t \qquad (2)$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y\, dt = h + \int_0^t -gt\, dt + \int_0^t v_0\sin\alpha\, dt = -g\tfrac{1}{2}t^2 + v_0\sin\alpha\, t + h$$

pályaegyenlet: $y(t)$-be behelyettesítjük a t-re kifejezett (2) egyenletet

$$y(x) = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\cdot\mathrm{tg}\,\alpha + h \qquad \text{lefele nyitott parabola}$$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

Mikor lesz a legmagasabb ponton? Ha $v_y(t_t)=0 \rightarrow t_t$ tetőpont kifejezhető

$$v\cdot\sin\alpha - g t_t = 0 \rightarrow t_t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

Milyen magasra emelkedik?

$$y_{max} = y(t_t) = h + \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha$$

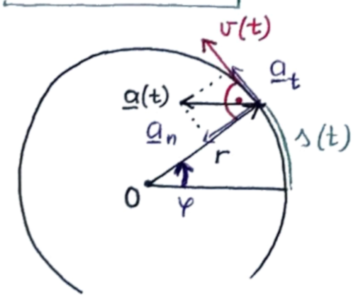
Mikor ér földet? $y(t)=0$

$$h + v\cdot\sin\alpha\, t_f - \frac{g}{2}t_f^2 = 0 \rightarrow t_f = \frac{v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

Hol ér földet? $x_f = x(t_f) = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$

↳ Ez rögz. v esetén $\alpha = 45°$ esetén maximális.

KÖRMOZGÁS – pálya: kör



φ: előjeles forgásszög, [radián]

mozgás leírása: $\varphi(t)$ függvénnyel

$s(t) = \varphi(t)\cdot r$

Szögsebesség: $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ időegység alatt mennyit fordul el

$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot r = \omega(t)\cdot r$ mindig érintőirányú!

Szöggyorsulás: $\beta(t) = \frac{d\omega}{dt}$

Gyorsulás: Tangenciális gyors.: $a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot r = \beta(t)\cdot r$

Centripetális gyors. : $a_n(t) = \frac{v^2}{r} = \omega^2\cdot r = v\cdot\omega$

↳ eredő: $a = \sqrt{\beta^2 r^2 + \omega^4 r^2}$

A DINAMIKA ALAPJAI

dinamika: test mozgása és a testet erő hatások kapcsolatát vizsgálja
ÓKOR: erő kell a test mozgásához, alaphelyzet: nyugalom

KÍSÉRLET: légpárnás sín 
↳ súrlódásmentes mozgás

MA:
- egy test megtartja mozgásállapotát, egyenes vonalú egyenletes mozgását
- a nyugalom mindig valamihez viszonyítva létezik
- erő kell a mozgásállapot megváltoztatásához

ERŐ

A testek közötti <u>kölcsönhatásokat</u> írja le
Vektoriális mennyiség (nagysága, iránya is van)

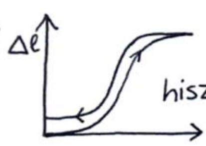
Hogyan mérjük a bevezetett új mennyiséget?

erő — mozgásállapot - változás
erő — deformáció → rugalmas alakváltozás
→ lineáris — " —

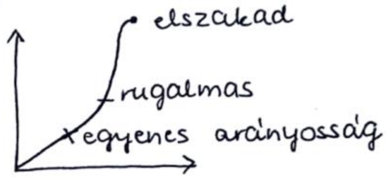
} ERŐMÉRŐ MŰSZERHEZ

 egyenes arányosság → kalibrációhoz

pl. <u>gumiszál</u>



<u>acél</u>



NEWTON - TÖRVÉNYEK

Tapasztalat: $\underline{a} \sim \underline{F}$ vektorok ⇒ irányuk is megegyezik
↳ hányadosuk: $\frac{F}{a}$ egységnyi $\underline{a}$ gyorsuláshoz mekkora $\underline{F}$ erőre van szükség
testre jellemző mennyiség!

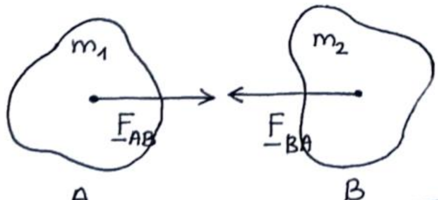
$\frac{F}{a} = m$ <u>tehetetlen tömeg</u>

Newton II törvénye: $\boxed{\underline{F} = m \cdot \underline{a}}$

test tulajdonsága

mozgásállapot - változásra jellemző

Az erő párkölcsönhatás:



Newton III törvénye (hatás - ellenhatás): $\boxed{\underline{F}_{AB} = -\underline{F}_{BA}}$

Megj.:
kivéve: kényszererő
↓
nem valódi erő,
segédfogalom
(gyorsuló koord. r.)
„nincs párja"

$\underline{F}_{AB} = m_1 \underline{a}_1$

$\underline{F}_{BA} = m_2 \underline{a}_2$

Ha a két test csak egymásra hat:

$$m_1 \underline{a}_1 = \underline{F}_{AB} = -\underline{F}_{BA} = -m_2 \underline{a}_2$$

$$m_1 \underline{a}_1 + m_2 \underline{a}_2 = 0$$

$$m_1 \frac{d\underline{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\underline{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1 \underline{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \underline{v}_2)}{dt} = 0$$ ha m nem változik! → relativisztikus sebesség ..

$$\frac{d(m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2)}{dt} = 0$$ Ha valaminek idő szerinti deriváltja 0, akkor az időben állandó

$\Rightarrow m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2 =$ állandó (=> ezt az erőhatás nem változtatja meg)

<u>Def</u> IMPULZUS: $\underline{p} = m\underline{v}$ jele: $\underline{p}$ ($\vec{p}$) (lendület, mozgásmennyiség) vektoriális mennyiség

$\boxed{\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{áll.}}$ <u>impulzusmegmaradás törvénye</u> 2 testre

↳ feltétel: ha a két test csak egymásra hat

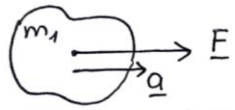
Newton II alternatív felírás: $\boxed{\underline{F} = m\underline{a} = m \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = \frac{d\underline{p}}{dt}}$

↳ Newton ezt jegyezte le

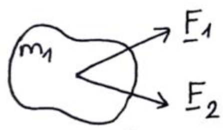
↳ eszerint: a testre ható erő = test impulzus változási sebessége

↳ spec. relativitáselméletben is igaz szemben az $\underline{F} = m\underline{a}$ -val

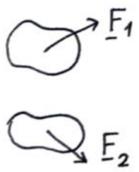
Eddig egy erő:



Ha egy testre több erő is hat:

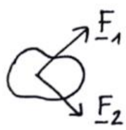


Newton IV tv: erőhatások függetlenségének elve
szuperpozíció elve (lineáris rendszer esetén)



$\underline{a}_1 = \frac{\underline{F}_1}{m}$

$\underline{a}_2 = \frac{\underline{F}_2}{m}$



$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \dots = \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\underline{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i}_{\underline{F}_e}$$

$\underline{F}_e$ eredő erő

$$\boxed{\underline{a} = \frac{\underline{F}_e}{m}}$$

INERCIARENDSZER, NEWTON I:

Newton I tv.: $\boxed{\sum \underline{F} = 0 \iff \underline{v} = \text{állandó}}$

$\underline{v} = 0$ áll a test

$\underline{v} \neq 0$ egyenes vonalú egyenletes mozgás

Azaz: ha a testre ható erők eredője nulla, akkor a test nyugalomban marad vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Azok a rendszerek, melyben ez a törvény teljesül, speciális rendszerek: ezek az <u>inerciarendszerek</u>.

=> Newton I ≡ inerciarendszer definíciója

Ha egy rendszer inerciar., akkor érvényes a többi Newton tv. is.
Ha nem inerciar., akkor nem minden N.-tv. érvényes => új segédfogalmak bevezetésére van szükség

Eddig láttuk: $\left.\begin{array}{l}\sum F \sim a \\ \sum F \sim m_t \\ \sum F \sim m_t \cdot a\end{array}\right\}$ tapasztalat alapján $\qquad \underline{F} \parallel \underline{a}$

$\sum F = k_t \, m_t \cdot a$ $\quad \rightarrow m_t$: a tehetetlen tömeg, a test tehetetlensége

$\uparrow$ mértékegységektől függő konstans

GRAVITÁCIÓS KÖLCSÖNHATÁS

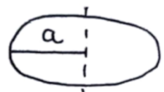
Előzmények

Ptolemaiosi tábl.
- Földközpontú világkép
- bonyolult leírás → hajózáshoz fontos volt

$\updownarrow$

Kopernikusz
- Napközéppontú világkép
- körpálya → pontatlan

Kepler
- ellipszis pálya
- I, II, III törvények



$\hookrightarrow \dfrac{a^3}{T^2} = \text{állandó}$ $\quad$ (T: keringési idő)

Távcső felfedezése

$\Downarrow$

Galilei - 4 Jupiterhold felfedezése

Newton - $\underline{F} \sim \dfrac{1}{r^2}$ kísérleti tapasztalat alapján

$\downarrow$

Általános tömegvonzás

$$\underbrace{F \sim \frac{1}{r^2}, \quad F \sim m_{1s}, \quad F \sim m_{2s}}$$

→ m_s: a test gravitáló képessége, a test súlyossága, súlyos tömeg

$$F_g = k_s \cdot \frac{m_{1s}\, m_{2s}}{r^2}$$

$$\boxed{\underline{F}_g = -k_s \frac{m_{1s}\, m_{2s}}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}}$$

Newton gravitációs törvénye

↳ az erő mindig vonzó

SÚLYOS ÉS TEHETETLEN TÖMEG

Newton II: $F = k_1 m_t \cdot a$

Grav. tv.: $F = k_2 \dfrac{m_{1s}\, m_{2s}}{r^2}$ $\qquad k_1, k_2$: mértékegységektől függő konstans

Tapasztalat: $m_t \sim m_s$

$\downarrow$

Szabadesés: csak a Föld gravitációs ereje hat a testre, és tapasztalati tény, hogy adott helyen minden test ugyanakkora g-vel gyorsul

Felírva: $k_1 m_t a = F = k_2 m_s \dfrac{m_{Fs}}{R_F^2}$

$$a = \frac{m_s}{m_t} \underbrace{\frac{k_2 m_{Fs}}{k_1 \cdot R_F^2}}_{\circledast} \underset{\text{tap.}}{\overset{}{=}} g$$

Mivel $\circledast$ állandó => $\dfrac{m_s}{m_t}$ is állandó => $m_t \sim m_s$

A kettő arányosságát pontosabban igazolta az Eötvös - inga.

MÉRTÉKEGYSÉG RENDSZER

2019-ben elfogadott új SI rendszer alapja:
A mértékegységeket univerzális állandókra vezeti vissza

Ezek: c - fénysebesség
k_B - Boltzmann-állandó
e - elemi töltés
N_A - Avogadro-szám
h - Plank-állandó

$\Delta\nu_{133Cs} = 9\,192\,631\,770\ \frac{1}{s}$
$K_{cd} = 683\ s^3 m^{-2} kg^{-1} cd \cdot sr$

IDŐ: • hagyományos mértékegység: természeti jelenségek alapján pl. nap
↳ nap hossza kicsit változik → a 24 óra az átlagos nap (két delelés közötti idők átlaga)
delelés ±15 percet ingadozik
• másodperc definíciója:
Δ ≡ alapállapotú Cs 133 izotóp hiperfinom átmenetének $\frac{1}{9\,192\,631\,770}$ része
$\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770\ Hz$ → atomórákkal mérhető

TÁVOLSÁG:
• régen: Földhöz (annak paramétereihez) kötött etalon
• ma: fénysebesség $c = 299\,792\,458\ \frac{m}{s}$ rögzítésével a másodperc definíciójával adható meg a méter.

TÖMEG:
• régi SI: 1 kg ≡ Pt - Ir etalon tömege (Párizs) (ez egyenlő $1\,dm^3$ 4°C víz tömegével)
• új SI: Planck-állandó rögzítésével $h = 6{,}625\,07015 \cdot 10^{-34}\ Js$

További mértékegységek az alábbi állandók rögzítésével:
e elemi töltés $e = 1{,}60217 \cdot 10^{-19}\ sA$ → A (amper)
k_B Boltzmann-állandó → K (kelvin)
N_A Avogadro-szám → mol
K_{cd} → cd

$\sum \underline{F} = m\underline{a}$

$\hookrightarrow k_t \overset{!}{=} 1$ definíció

$m_t = m_s$ így választjuk meg: $\frac{m_s}{m_t} = 1$ - nek választjuk az arányossági tényezőt

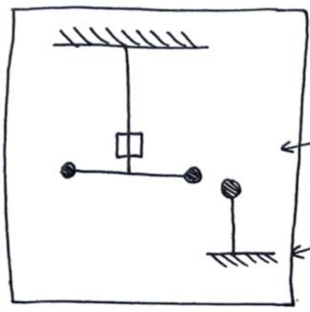
=> Ekkor a k_s állandót mérni kell!

$\underline{F}_g = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r}$ $\quad\gamma$-t mérni kell

↓

Cavendish

Cavendish



elcsavarható platinaszálon Pb golyók, tükör

ismert táv van a két gömb között

lezárt helyen

A két gömb elkezdi egymást vonzani → elcsavarodik a szál
A tükör miatt a fénysugár elmozdul, elmozdulás mérhető

$\gamma \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

Föld tömegének kiszámítása:

$F_g = m \cdot g$

$F_g = \gamma \cdot \frac{M_F}{R_F^2} \cdot m$

$\gamma \cdot \frac{M_F}{R_F^2} \equiv g$

meg- mértük

Föld sugarát megmértük

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{M_F \text{ kiszámítható}}$ (← nem direkt mérés)

KÖLCSÖNHATÁSOK ÁTTEKINTÉSE

<u>Nehézségi erő</u>: szabad erő (= iránya, nagysága más erőktől nem függ)
- Föld gravitációs vonzásától a Föld forgása miatt kissé eltér
- nagysága: mg
- iránya: függőlegesen lefele
- térfogati erő: térfogat minden pontjára hat

<u>Nyomóerő</u>: kényszererő → kényszer: két test nem hatolhat egymásba, nem léphetik át a felületet
- iránya: merőleges a felületre
- nagysága: testre ható egyéb erők határozzák meg a kényszerfeltételnek megfelelően (:= kényszererő)
- csak nyomni tud
- felületi erő: teljes érintkező felületen elosztva hat

<u>Kötélerő</u>: kényszererő → Kényszerfeltétel: a kötél nyújthatatlan
- iránya: párhuzamos a kötéllel
- csak húzni tud

<u>Súrlódás</u>
- súrl. erő iránya: felülettel párhuzamos
- OKA: felületek közti adhézió; felületek egyenetlensége
- kétféle súrl. erő:

1. <u>nyugalmi / tapadási súrl. erő</u>: kényszererő
   - iránya, nagysága pont akkora, hogy a két test egymáshoz képesti nyugalmát lehetőleg fenntartsa
   - $0 \leq F_s \leq \mu_0 \cdot F_N$ — F_s: súrl. erő, F_N: felületek közti nyomóerő, μ_0: tapadási súrlódási együttható

2. <u>Mozgási / csúszási súrl. erő</u>: szabaderő
   - két test egymáshoz képest mozog
   - iránya: olyan, hogy a két test egymáshoz képesti mozgását akadályozza
   - nagysága: $F_s = \mu F_N$ — μ: csúszási súrlódási együttható
   - általában $\mu \leq \mu_0$

<u>Közegellenállási erő</u>
- mozgást akadályozza
- kis sebességeknél: OKA: közeg viszkozitása (belső súrlódás)
  Ekkor: $F \sim v$
- nagy —— " ——: OKA: turbulencia (áramlásnál örvények)
  Ekkor: $F \sim v^2$
- mindkét esetben iránya: közeghez viszonyított sebességgel ellentétes

<u>Rugóerő</u>
- deformációval ellentétes irányú

$$F_r = -Dy$$

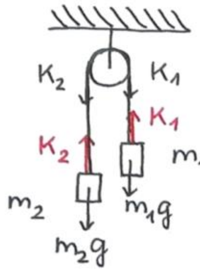
F_r: rugóerő
D: rugóállandó $[D] = N/m$
x: rugó deformációja

Gyorsuló rendszerekben további erők lépnek fel

FELADATMEGOLDÁS

Menete: erők felvétele $\rightarrow \sum \underline{F} \rightarrow \underline{a} \rightarrow \underline{v}(t) \rightarrow \underline{r}(t)$

① Két test csigán átvetett kötélen



- könnyű, súrlódásmentes csiga $\Rightarrow K_1 = K_2 = K$
- könnyű, nyújthatatlan kötél

$\Rightarrow m_k = 0$

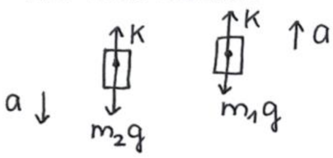
$\Rightarrow |\Delta x_1| = |\Delta x_2|$

$\downarrow$

$|v_1| = |v_2|$

$|a_1| = |a_2| = a$

két test külön:



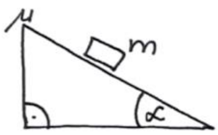
Newton tv a két testre:

$$m_2 g - K = m_2 a$$
$$K - m_1 g = m_1 a$$

$$(m_2 - m_1) g = (m_2 + m_1) a$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot g$$ /K hasonlóan kapható/

② Lejtő súrlódással

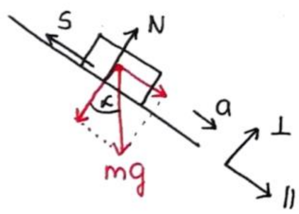


K.F.: $v(0) = 0$

Tfh. a test elindul.

$$\sum \underline{F} = m \underline{a}$$
$$\sum F_{\parallel} = m \cdot a_{\parallel} = m \cdot a$$
$$\sum F_{\perp} = m \cdot a_{\perp} = 0$$

két dimenziós probléma!



$$-S + mg \sin\alpha = m \cdot a$$
$$-mg\cos\alpha + N = 0 \rightarrow N$$
$$S = \mu \cdot N$$

mozog $\Rightarrow$ mozg. súrl. erő szabaderő

⇓

nagysága ismert

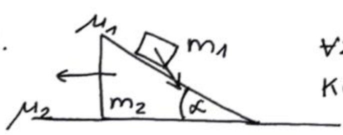
$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$\mathrm{tg}\,\alpha \geq \mu \rightarrow a \geq 0$

$\mathrm{tg}\,\alpha < \mu \rightarrow a < 0$ nem lehet! $\Rightarrow$ rossz a feltevés: nem indul el

$\Rightarrow a = 0 \rightarrow S$ kiszámolható

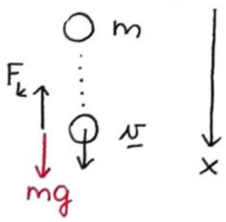
HF1.



∀2 mozog

Kényszerfelt.: rajtamarad a lejtőn

③ Esés közegellenállással



$v(0) = 0$, $x(0) = 0$

$\underline{F}_k = -k\underline{v}$

$$ma = mg - kv$$
$$a(t) = g - \frac{k}{m} v(t)$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{k}{m} v(t)$$ differenciál egyenlet

↳ megoldása egy függvény

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v$$ változók szeparálása

$$\frac{1}{g - \frac{k}{m} v} \, dv = dt$$

$$\int_{v(0)=0}^{v(t)=v} \frac{dv}{g - \frac{k}{m} v} = \int_0^t dt$$

$$\left[-\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)\right]_0^v = t$$

$$t = -\frac{m}{k}\left(\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right) - \ln\left(g-\frac{k}{m}\cdot 0\right)\right)$$

$$t = -\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{k}{mg}v\right)$$

$$-\frac{k}{m}t = \ln\left(1-\frac{k}{m}v\right)$$

$$e^{-\frac{k}{m}t} = 1-\frac{k}{mg}v$$

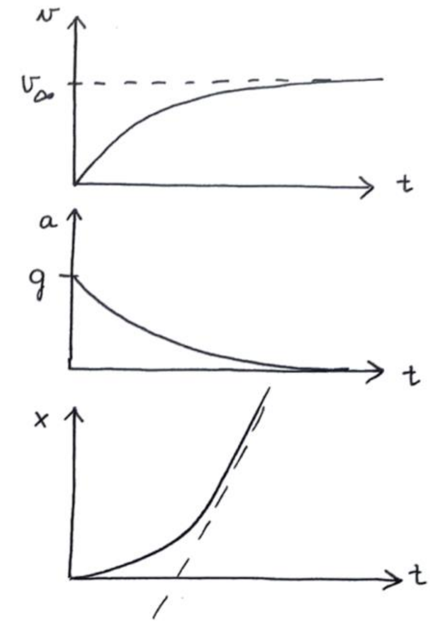
$$\frac{k}{mg}v = 1-e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

$$v(t) = v_\infty\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad v_\infty = \frac{mg}{k} \qquad \tau = \frac{m}{k}$$

$$a(t) = \frac{mg}{k}\cdot\frac{k}{m}e^{-t/\tau} = g\cdot e^{-t/\tau}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-t/\tau}$$

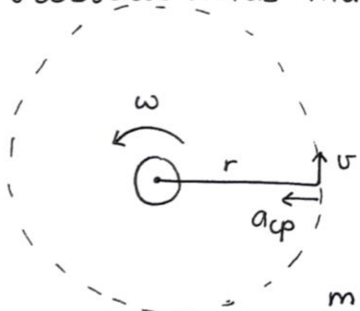


HF2. $F_k = -kv^2$ ...

④ Geostacionárius műhold : forgó földhöz képest áll, nyugalomban van

$\Downarrow$

- Egyenlítő körüli körpálya
- $\omega_F = \omega_{\text{műhold}}$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$



$$F = \gamma\frac{m\cdot m_F}{r^2}$$

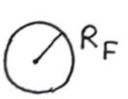
$$m\cdot a_{cp} = \gamma\frac{m\cdot m_F}{r^2}$$

$$\cancel{m}\cdot\omega^2 r = \gamma\frac{\cancel{m}\, m_F}{r^2}$$

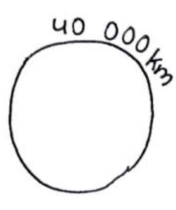
$$r^3 = \gamma m_F\frac{1}{\omega^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\gamma m_F\frac{1}{\omega^2}} = 4{,}2\cdot 10^7\,m = 42 \text{ ezer km}$$

Mekkora a γm_F konstans?



$$\cancel{m}g \approx \gamma\frac{\cancel{m}\, m_F}{R_F^2}$$

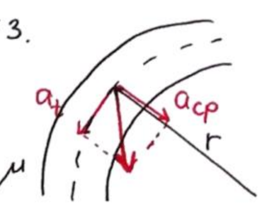


$$R_F = \frac{4\cdot 10^7}{2\pi}$$

$$\gamma m_F = g\cdot R_F^2 = 10\cdot\left(\frac{4\cdot 10^7}{2\pi}\right)^2$$

$T = 24\cdot 3600\,s \rightarrow h = r - R_F \approx 36$ ezer km

HF3.



a, $v_{max} = ?$ hogy egyenletes sebességgel végigérjen

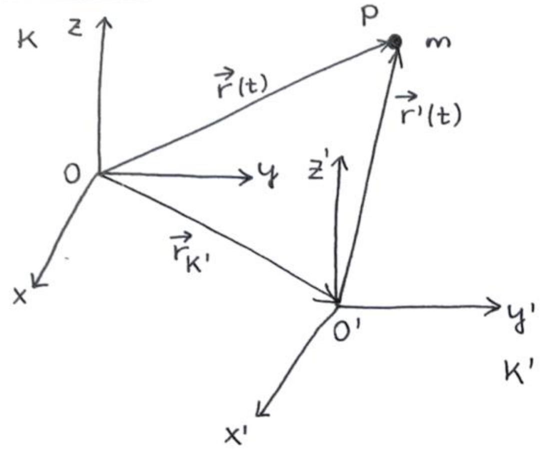
b, ha $v < v_{max}$

$\hookrightarrow |a_{max}| = ?$ maximális lassulás

Súrl. erőnek van maximuma!

MOZGÁSOK LEÍRÁSA KÜLÖNBÖZŐ VONATKOZTATÁSI RENDSZEREKBEN

GALILEI-TRANSZFORMÁCIÓ



K: inerciarendszer → Newton-tv-ek teljesülnek

K' vonatkoztatási rendszer:
$\vec{w}$ sebességgel ~~eo~~ EVEM mozog K-hoz képest

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{K'} + \vec{r}\,'(t)$$

$$\vec{r}_{K'}(t) = \vec{r}_0 + \vec{w}\cdot t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{r}_0 + \vec{w}\cdot t$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{w}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t)$$ gyorsulásuk megegyezik

K inerciarendszer, így: $\sum \vec{F} = m\cdot\vec{a}(t) = m\cdot\vec{a}\,'(t)$

⇒ K'-ben is teljesülnek a Newton-tv-ek ⇒ K' is INERCIARENDSZER!

Ha $\vec{w} \parallel \vec{i}$ ($\vec{i}$: x tengely egységvektora), és $\vec{r}_0 = 0$:

$$x' = x - wt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$
$$v_x' = v_x - w$$ ⇒ $c = c' + w$?? Maxwell-egy. ↯ (Newton törvények ✓)

FÉNYSEBESSÉG: minden rendszerben ugyanannyi!

$c' = c$!!!

(Römer: Jupiterholdak, Fizeau, Michelson)

LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ

→ kielégíti a $c' = c$ feltételt

→ Ha $w_x = w$, $\vec{r}_0 = 0$:

$$x' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{w}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

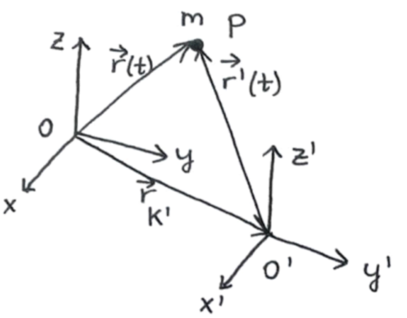
⇒ Newton törvények ↯, Maxwell-egy. ✓

Korrespondencia-elv ⇒ Ha $w \ll c$: Lorentz-tr. ⟶ Galilei-tr.
határesetben visszaadja a Galilei-transzformációt.

GYORSULÓ VONATKOZTATÁSI RENDSZER

K inerciarendszer, K' rendszer K-hoz képest egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgással mozog ($\vec{a}_0$)

Tfh. $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{w}_0 = 0$, $\vec{a}_0$ = állandó



$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{K'}(t)$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{v}_{K'}(t)$$
$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{a}_0$$

a 2 rendszerben a gyorsulás különböző!

$/ \cdot m$

$$\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \vec{a}'(t) + m \cdot \vec{a}_0$$

$\Rightarrow m\vec{a}'(t) \neq \Sigma\vec{F} \Rightarrow$ K'-ban nem teljesülnek a Newton-törvények, így K' NEM INERCIARENDSZER

$$m\vec{a}'(t) = \Sigma\vec{F} \underbrace{- m\vec{a}_0}$$

állandó, erő dimenziójú

$\vec{F}_t = -m\vec{a}_0$ tehetetlenségi erő (fiktív)

Nem inerciarendszerben: $\vec{a}_0$ gyorsuló rendszer esetén

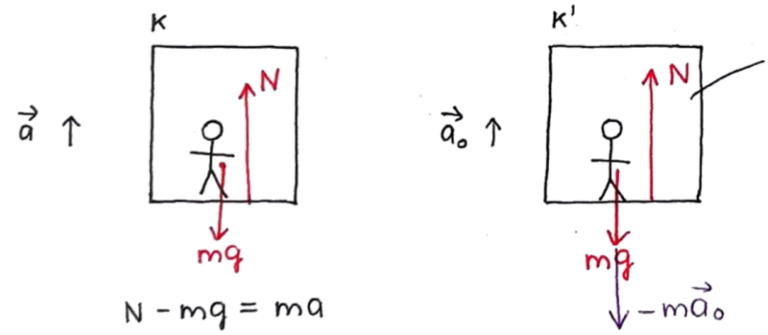
!! $\vec{F}_t = -m\vec{a}_0$

$$\Sigma\vec{F}' = \underbrace{\Sigma\vec{F}}_{\text{valódi erők}} + \underbrace{\vec{F}_t}_{\text{tehetetlenségi erő}}$$

$\rightarrow m\vec{a}'(t) = \Sigma\vec{F}'$ olyan, mintha a Newton-törvények igazak lennének

Tehetetlenségi erő $[F_t] = N$

- nincs ellenereje, nem kölcsönhatásból származik (nem lehet megtalálni azt a testet, amelyik ezt az erőt kifejti)
- fiktív erő



$N - mg = ma$

$N - mg - m\vec{a}_0 = 0$

nyugalomban vagyunk, de hat ránk N erő ⇒ nagyobb erővel kell nyomnunk a padlót

(∵ ált. rel. elm. miatt belülről nézve nem dönthető el, hogy gyorsul-e)

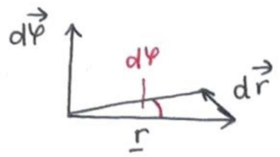
FORGÓ VONATKOZTATÁSI RENDSZER

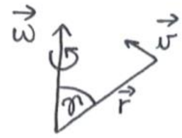
Fogalmak:

- $d\vec{\varphi}$ elemi elfordulás vektor
  nagysága: elfordulás szöge (rad), iránya:
- $\vec{\omega}$ szögsebesség vektor: $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$ $\left(\frac{1}{s}\right)$
- $\vec{\beta}$ szöggyorsulás vektor: $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\beta}$ $\left(\frac{1}{s^2}\right)$

axiálvektor

Körpályán mozgó test:

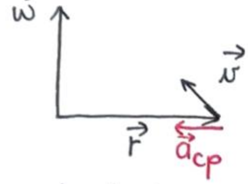




elemi elmozdulás: $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$

ezt deriválva: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

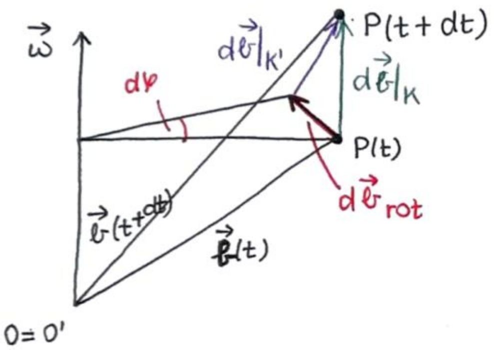
tangenciális gyors. $\rightarrow$ $\vec{a}_t = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \times \vec{r} = \vec{\beta} \times \vec{r}$



centripetális gyorsulás: $\vec{a}_{cp} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

<u>Segédtétel</u>: K, K' origója megegyezik, K' $\vec{\omega}$-val forog K-hoz képest. Ekkor tetszőleges $\vec{b}$ vektorra:

$$\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$



Biz:

$$d\vec{b}|_K = d\vec{b}|_{K'} + d\vec{b}_{rot}$$

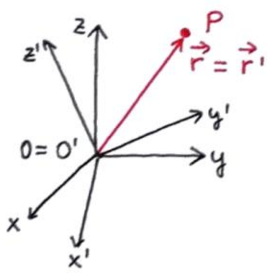
$$d\vec{b}_{rot} = d\vec{\varphi} \times \vec{b}$$

$$\Rightarrow d\vec{b}|_K = d\vec{b}|_{K'} + d\vec{\varphi} \times \vec{b} \qquad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{K'} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{b}$$

$$\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

K, K' rendszer, K' $\vec{\omega}$-val forog, K-hoz képest, $0 = 0'$. Ekkor:



$$\vec{r} = \vec{r}\,'$$

$$\vec{v} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_K + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_K \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_K =$$

$$= \left.\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\left.\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \right) =$$

$$= \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') =$$

$$= \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'$$

gyorsulástagok:

$\vec{a}\,'$: P pont K'-ben megfigyelt gyorsulása

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \vec{a}_{cp}$ centripetális gyorsulás: mindig van, ha P pont nem esik a forgástengelyre

$2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_C$ Coriolis-gyorsulás: akkor van, ha $\vec{v}\,' \neq 0$ és $\vec{v}\,' \nparallel \vec{\omega}$

$\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'$ Euler-féle gyorsulás: csak akkor van, ha $\vec{\omega}$ változik (azaz $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \neq 0$)

K inercia r.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + m \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

átrendezve: $m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$

K' nem inerciarendszer => tehetetlenségi erőket kell felvenni, h. akként kezeljük

$\vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ centrifugális erő: tengelytől kifele mutat

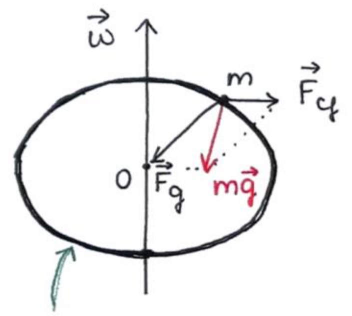
$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ coriolis erő

$\vec{F}_E = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$ Euler erő

$$\Rightarrow m\vec{a} = \sum \vec{F} + \underbrace{\vec{F}_{cf} + \vec{F}_C + \vec{F}_E}_{\text{tehetetlenségi erők}}$$

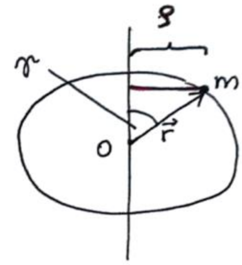
$\boxed{\text{CENTRIFUGÁLIS ERŐ}}$ – térfogati erő, arányos a test tömegével

1. Nehézségi erő: a gravitációs erő és a centrifugális erő eredője



- $\vec{F}_g = -\gamma \frac{m \cdot m_F}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Föld középpontja fele mutat



- $|\vec{F}_{cf}| = |m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = m\omega^2 \varrho$

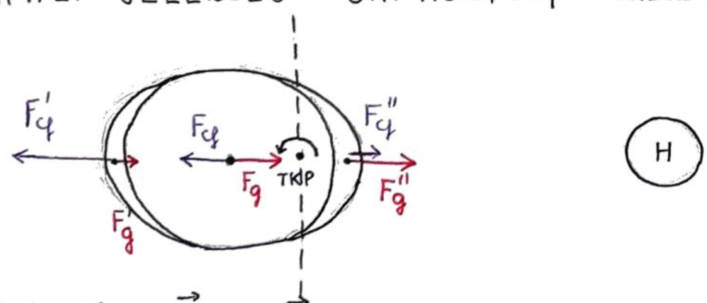
$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin\gamma = \omega \cdot \varrho$

forgás tengelyre merőleges

- eredőjük: $m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{cf}$

nehézségi erő; gravitációs erő VALÓDI; centrifugális erő TEHETETLENSÉGI

2. ÁRAPÁLY JELENSÉG – OK: Hold, Nap vonzása



Föld–Hold rendszerrel együtt mozgó, közös TKP körül forgó rendszerből nézzük

- Föld kp-jára $\vec{F}_g$ és $\vec{F}_{cf}$ hat, ezek eredője 0, ebben a rendszerben nyugalomban van
- Holddal átellenes oldal: F_{cf}' nagyobb, F_g' kisebb => kifele mutató eredő (mert messzebb van a tengelytől)
- Közelebbi oldal: F_g'', F_{cf}'' is a Hold fele => kifele mutató eredő

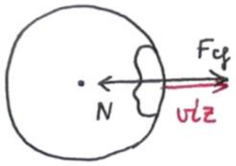
Nap is okoz ilyet: Telihold és Újhold esetén erősíti a másik hatást
Első és utolsó negyedben gyengíti

3. Centrifuga

K inerciar.-ben:

- a ruhára hat a fal nyomóereje ⇒ a_{cp} gyorsulással körmozgást végez.
- a vízre nem hat erő, mert a lyukacsos fal nem tudja nyomni ⇒ evem-et végez, kerületi sebesség irányában kimegy

K' forgó r.-ben:



- a ruhára N nyomóerő, F_{cf} centrifugális erő hat, kiejtik egymást, nyugalomban van
  - a vízre csak F_{cf} hat, annak irányában gyorsulva távozik

4. Kanyarodó autó

F_{cf} megemeli az autót kis íven kanyarodva

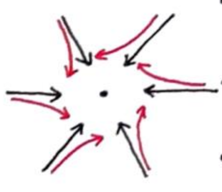
$\boxed{\text{CORIOLIS ERŐ}}$ – forgó rendszerhez képest mozgó testeknél $\vec{v}' \neq 0$

1. Foucault-inga
   - nagy periódusidejű, kis csillapítású inga → tapasztalat: az inga lengési síkja elfordul
   - Magyarázat: inerciarendszerben: inga síkja nem fordul el, hanem a Föld elfordul alóla
     forgó r.-ben: F_c Coriolis-erő eltéríti az ingát

2. Eötvös - effektus
   - keletről nyugatra mozgó testek súlya nő
   - egyenlítőn legerősebb, sarkokon nincs

3. Lövedék : eltérülhet ⇒ a ballisztikában a Coriolis-erő is számít

4. Ciklonok kialakulása

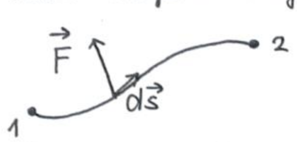


- kicsi légnyomás irányába induló légtömegeket a Coriolis erő eltéríti ⇒ forgó légtömeg, stabil körmozgás
- Északi féltekén:
  mindig jobbra téríti ⇒ óramutatóval ellentétes ir. mozgás
- Délen: fordítva

MUNKA ÉS ENERGIA

elemi mechanikai munka: $dW = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{s}}_{\text{skaláris szorzat}}$

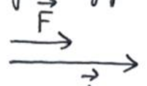
test által végzett teljes munka: vonalmenti integrál:



$$W_{1,2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Speciális eset: pálya egyenes vonalú, $\vec{F}$ állandó:

$\vec{F} \parallel d\vec{s}$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\gamma$$

Ha γ tompaszög, akkor W negatív, azaz a másik test végez munkát

HOZGÁSI ENERGIA, MUNKATÉTEL

Egy m tömegű pontszerű testre ható erők eredője $\vec{F}_e$

Ekkor Newton II: $F_e = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

sebesség: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$

Eredő erő munkája:

$$W_{1,2} = \int_1^2 \vec{F}_e \, d\vec{r} = \int_1^2 m \cdot \frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}} \cdot \vec{v} \, \cancel{dt} = m \int_1 \vec{v} \, d\vec{v} = m \left[\frac{1}{2} (\vec{v})^2 \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

gyorsítási munka: úttól és a gyorsítás idejétől független

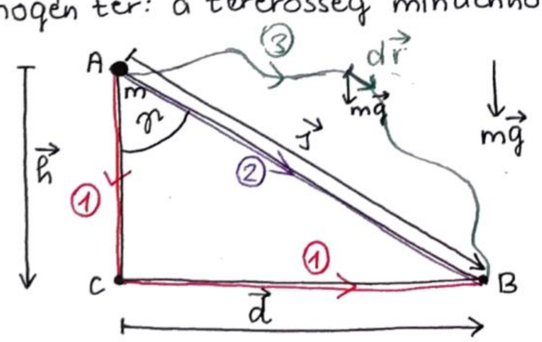
Mozgási energia: $E_m = \frac{1}{2} m v^2$

↳ az m tömegű v sebességű test ekkora munkavégző képességgel rendelkezik,
↳ ez az energia mozgásállapotot jellemez.

Munkatétel: $W_e = \Delta E_m$

KONZERVATÍV ERŐTÉR, HELYZETI ENERGIA

erőtér: a tér minden pontjában az erő nagysága és iránya adott.
homogén tér: a térerősség mindenhol ugyanolyan nagyságú és irányú.



① $W_{A,B} = m\vec{g} \cdot \vec{h} + m\vec{g} \cdot \vec{d} = m \cdot g \cdot h + 0 = m \cdot g \cdot h$

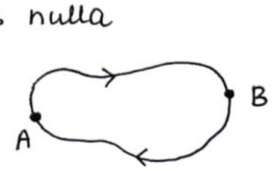
② $W_{A,B} = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s} = m \cdot g \cdot \underbrace{s \cdot \cos\gamma}_{h} = m \cdot g \cdot h$

③ $W_{A,B} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{g} \int_A^B d\vec{r} = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s} = m \cdot g \cdot h$

Itt az $\vec{F}(\vec{r})$ erőtér konzervatív: az $\vec{F}$ erő által végzett munka ($W_{A,B}$) nem függ az útvonaltól, csak az A, B kezdő és végponttól.

Megj.: konzervatív erőtér esetén zárt görbe mentén a munkavégzés nulla

$$\oint_g \vec{F}_k \, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_k \, d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}_k \, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}_k \, d\vec{r} - \int_A^B \vec{F}_k \, d\vec{r} = 0$$



$\vec{F}_k(\vec{r})$ konzervatív erőtér esetén: minden P ponthoz rendelhető helyzeti (potenciális) energia:

$$E_h(P) = -\int_0^P \vec{F}_k \, d\vec{r} = -W_{k,OP}$$

azaz az $\vec{F}_k$ erő ekkora munkát végezne a testen, ha az bármilyen úton P-ből az O origóba jutna.

E_m koordinátafüggő – E_h origófüggő (analógia)

De a helyzeti energia megváltozása független az origó megválasztásától

$E_h(A)$

$E_h(B)$

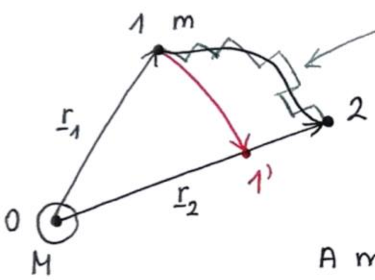
$$\Delta E_h = E_h(B) - E_h(A) =$$

$$= \underbrace{-\int_0^B \vec{F}_k \, d\vec{r} + \int_0^A \vec{F}_k \, d\vec{r}}_{} =$$

$$= \cancel{-\int_0^A \vec{F}_k \, d\vec{r}} - \int_A^B \vec{F}_k \, d\vec{r} + \cancel{\int_0^A \vec{F}_k \, d\vec{r}} = -\int_A^B \vec{F}_k \, d\vec{r} = -W_{k,AB}$$

Pl. Gravitációs erőtér

ha $r > R$: $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$



mozgást felbontjuk tangenciális és radiális szakaszokra

tangenciális irányú munka zérus: $dW_t = 0$

radiális: $W_{12} = W_{1'2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \, d\vec{r}$

↓

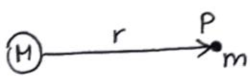
A munka csak a radiális irányú elmozdulástól függ
⇒ az erőtér konzervatív

Mivel konzervatív ⇒ E_h helyzeti energia minden ponthoz rendelhető:

$$E_h(r) = -W_{12} = -W_{1'2} = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \, d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} -\gamma \frac{Mm}{r^2} \, dr = +\gamma Mm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} =$$

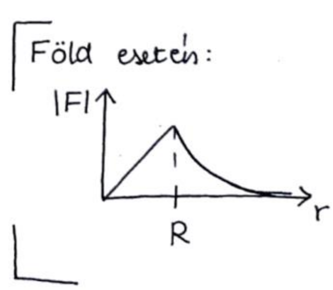
$$= -\gamma Mm \left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = -\gamma Mm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

r_1-et ∞ messze választva:



$$E_h(P) = -\int_0^P \vec{F} \, d\vec{r} = -\frac{\gamma Mm}{r}$$

Föld esetén:



MECHANIKAI ENERGIA

Test mozgási energiájának megváltozása:

$$\Delta E_m = W_e = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konzervatív erők} \\ \text{munkája}}}{\sum W_k} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nem konzervatív} \\ \text{erők munkája}}}{\sum W_{nk}} = -\Delta E_h + \sum W_{nk}$$

$$\Rightarrow \Delta E_m + \Delta E_h = W_{nk}$$

$$\Delta \underbrace{(E_m + E_h)}_{E\text{ : mechanikai energia}} = W_{nk}$$

Mechanikai energia: $E = E_m + E_h$

$\boxed{\Delta E = W_{nk}}$ ← munkatétel másik alakja

Mechanikai energia megmaradási törvénye tömegpontra: $\boxed{W_{nk} = 0 \iff E = \text{áll.}}$

↳ csak akkor marad meg a mech. energia, ha a nemkonzervatív erők munkája nulla!

EGYENSÚLYI HELYZETEK

$\vec{F}(\vec{r})$ erőtér ismert $\Rightarrow$ $E_h(\vec{r})$ meghatározható: $E_h(\vec{r}) = -\int_0^P \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$

Általánosan: $dE_h = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Egy dimenzióban: $dE_h = -F_x \cdot dx$ helyzeti energia elemi megváltozása dx elmozdulás esetén.

dE_h így is felírható: $dE_h = \frac{dE_h}{dx}dx$

Az előbbi 2 kifejezésből következik: $F_x = -\frac{dE_h}{dx}$

Három dimenzióban: $dE_h = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$

és $dE_h = \frac{\partial E_h}{\partial x}dx + \frac{\partial E_h}{\partial y}dy + \frac{\partial E_h}{\partial z}dz$ parciális deriváltak

$\Rightarrow$ az erő komponensei: $F_x = -\frac{\partial E_h}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial E_h}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial E_h}{\partial z}$

vektoros alakban:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_h}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial E_h}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial E_h}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\,E_h = -\nabla E_h$$

Megj.: Konzervatív erőtér esetén az $\vec{F}$ erő alakja nem lehet bármilyen, hanem $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,E_h$ alakú. (skalár fv.-ből (E_h) egy vektor fv. ($\vec{F}$) előállítása)

Egyensúly feltétele:

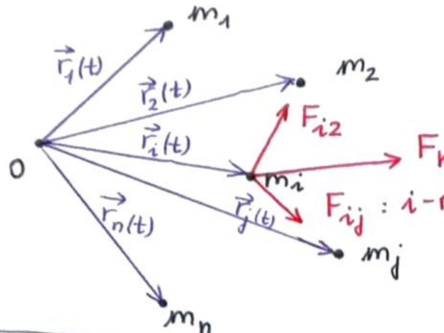
testre ható erők eredője zérus: $\vec{F_e} = 0$ $\Rightarrow$ azaz E_h hely szerinti deriváltjai nullák $\Rightarrow$ $\boxed{E_h \text{ -nak szélsőértéke van}}$

- maximum: instabil
- minimum: stabil

PONTRENDSZEREK

n db pont : $1, 2, \dots, i, \dots, n$

A pontokról külön-külön nem beszélünk, hanem a rendszerről teszünk általános megállapításokat.



F_{K_i} : külső testek hatása m_i-re (K - mint külső /jelölés/)

F_{ij} : i-re j által kifejtett erő

A TÖMEGKÖZÉPPONT

a pontrendszer össztömege: $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

TKP-ba mutató helyvektor: egyes helyvektorok tömeggel súlyozott középértéke:

$$\vec{r}_{TKP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}$$

ált.: időfüggő (mozog) $\vec{r}_{TKP}(t)$

n db Newton II tv.: $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{K_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}$ → 3 ismeretlenes, n dimenziós egyenletr.

n db egyenlet összege:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{K_i}}_{\vec{F}_K} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{ij}}_{\text{NIII miatt belső erők eredője nulla mert } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_K + 0$$

rendezve: $\vec{F}_K = \frac{1}{dt^2} \cdot d^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{d^2(m \cdot \vec{r}_{TKP})}{dt^2} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}_{TKP}}{dt^2} = m \cdot \vec{a}_{TKP}$

Azaz: $\boxed{m \cdot \vec{a}_{TKP} = \vec{F}_K}$ csak a külső erőktől függ a TKP gyorsulása, a pontrendszer úgy mozog, mintha egy tömegpont lenne

Tömegközépponti tétel.

LENDÜLET (IMPULZUS)

$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{dt} d \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{d(m \vec{r}_{TKP})}{dt} = m \frac{d\vec{r}_{TKP}}{dt} = m \cdot \vec{v}_{TKP}$$

Azaz $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}_{TKP}}$

$$\vec{F}_K = m \cdot \vec{a}_{TKP} = m \cdot \frac{d\vec{v}_{TKP}}{dt} = \frac{d(m\vec{v}_{TKP})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_K = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Ha a pontrendszerre nem hat külső erő, akkor a teljes impulzus állandó:

$\boxed{\vec{F}_K = 0 \iff \vec{p} \text{ állandó}}$ impulzusmegmaradás törvénye pontrendszerre

Megj.:
- feltételhez van kötve a megmaradási tv: $\vec{F}_K = 0$
- belső erőkről nincs szó, azoktól nem függ az impulzus

MECHANIKAI ENERGIA

n db munkatétel: $W_i = \Delta E_{mi}$

ezek összeadva: $W = \Delta E_m$ $\quad$ W: pontrendszeren végzett összes munka

Felbontjuk W-t B - belső, K - külső, k - konzervatív, nk - nem konzervatív:

$$W_{Bk} + W_{Bnk} + W_{Kk} + W_{Knk} = \Delta E_m$$

Konzervatív erők munkája helyzeti energiával helyettesíthető:

$$W_{Bk} = -\Delta E_{hB}$$

$$W_{Kk} = -\Delta E_{hK}$$

$$\Rightarrow W_{Bnk} + W_{Knk} = \Delta E_m + \Delta E_{hB} + \Delta E_{hK} = \Delta \underbrace{(E_m + E_{hB} + E_{hK})}_{E \text{ mechanikai energia}} = \Delta E$$

$$\boxed{W_{Bnk} + W_{Knk} = \Delta E}$$

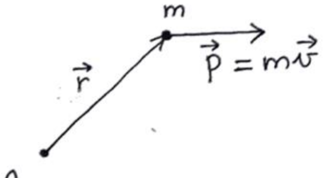
Mechanikai energiamegmaradás pontrendszerre:

$\boxed{\text{Ha } W_{Bnk} + W_{Knk} = 0, \text{ akkor } E = \text{állandó}}$

Megj.:
- megmaradás feltétele: munkavégzések összege nulla!
- belső nem konzervatív erők munkája is megváltoztathatja a mech. energiát

PERDÜLET - IMPULZUSMOMENTUM

EGY TÖMEGPONTRA



Test O-ra vonatkoztatott perdületvektora:

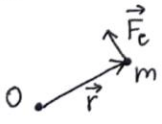
$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{p}$ keresztszorzat

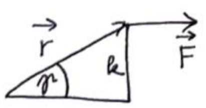
axiálvektor

Idő szerint deriválva:
$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{0, \text{ mert } \vec{v} \parallel \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_e$$

$\vec{F}_e$ ↑ tömegpontra ható eredő erő

Az $\vec{r} \times \vec{F}$ szorzat a forgatónyomaték-vektor: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ - axiálvektor





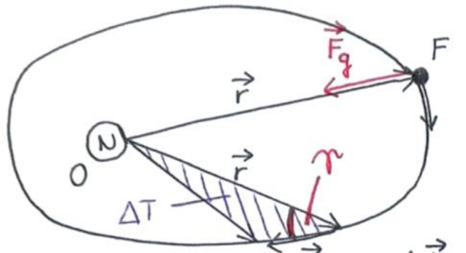
$$|\vec{M}| = \underbrace{r \cdot \sin\gamma}_{k} \cdot F = k \cdot F$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}}$$

Perdületmegmaradás tömegpontra: ha $\vec{M} = 0 \iff \vec{N} = \text{áll.}$

KEPLER II TÖRVÉNYE

Bolygóra ható gravitációs erő centrális: mindig O-ba (Napba) mutat



$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F_g} = 0$, mert $\vec{r} \parallel \vec{F_g}$, azaz a Földre nem hat forgatónyomaték

$\Downarrow$

$\vec{N} =$ állandó

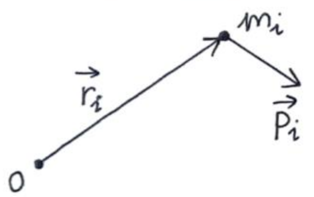
$\vec{N} = m\cdot(\vec{r} \times \vec{v})$, $N = m\cdot r\cdot v\cdot \sin\gamma =$ állandó

Δt alatt súrolt terület: $\Delta T = \frac{1}{2} r\cdot v\cdot \Delta t \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\frac{N}{m}\cdot \Delta t$

$\uparrow$ kis Δt esetén a háromszög területe

$\Rightarrow$ Δt alatt súrolt ΔT terület a perdülettel (N) arányos, így Kepler II a perdületmegmaradási törvénnyel indokolható.

PERDÜLET PONTRENDSZERRE



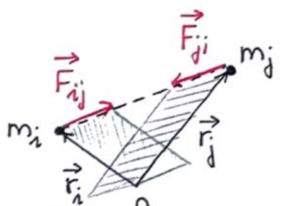
i. tag: $\vec{N_i} = \vec{r_i} \times \vec{p_i}$

$\frac{d\vec{N_i}}{dt} = \vec{M_i}$ n db ilyen egyenlet

$\downarrow$ az egyenleteket összeadjuk

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{N_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{M}_{ik} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{M}_{ij} \right)$$

$\uparrow$ külső erők által kifejtett forg. nyom.



$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}_K + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{M}_{ij}}_{0}$$

$F_{ij} = -\vec{F_{ji}}$, $|\vec{F_{ij}}| = |\vec{F_{ji}}|$ $\Rightarrow$ $\vec{M_{ij}} = -\vec{M_{ji}}$ páronként kiejtik egymást

paralelogrammák területe egyenlő a forgatónyomatékok nagyságával.
A két paralelogramma egyenlő, mert:
az alapjuk megegyezik ($|\vec{F_{ij}}| = |\vec{F_{ji}}|$), ill. magasságuk is

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}_K}$$

Perdületmegmaradás törvénye pontrendszerre:

$$\boxed{\text{Ha } \vec{M}_K = 0, \text{ akkor } \vec{N} = \text{állandó}}$$

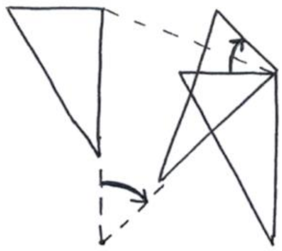
Megj.:
- perdület független a belső erők forgatónyomatékától
- megmaradás feltétele: $\vec{M}_K = 0$!

A MEREV TEST

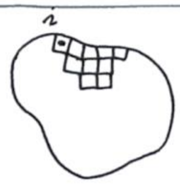
merev test: két pontjának a távolsága időben állandó. (bármely 2 pont)
Mozgása leírható elemi haladó és forgó mozgásokkal

$$\text{haladó} = \text{transzláció} \qquad \text{forgó} = \text{rotáció}$$

VAGY TKP haladó mozgásával + a TKP körüli forgással
Merev test helyzete 6 független adattal megadható



A MEREV TEST, MINT PONTRENDSZER



teljes térfogat: $V = \sum_i \Delta V_i$

teljes tömeg: $m = \sum_i \Delta m_i = \sum \varrho_i \Delta V_i = \int_V \varrho(\vec{r})\, dV$

ϱ_i: sűrűség

TKP-ba mutató helyvektor:

$$\vec{r}_{TKP} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\int_V \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dV}{\int_V \varrho(\vec{r})\, dV} = \frac{\int_V \varrho(\vec{r})\, \vec{r}\, dV}{m}$$

STATIKA

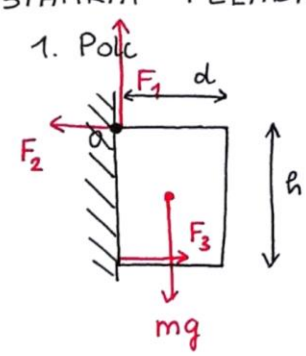
csak külső erőkkel foglalkozunk

$\sum \vec{F} = 0$, $\sum \vec{M} = 0$: egyensúly feltétele

Ha $\sum \vec{F} = 0$ és $\sum \vec{M}_P = 0$ => $\sum \vec{M}_{P'} = 0$ (P, P' a merev test 2 pontja)

STATIKAI FELADATOK

1. Polc



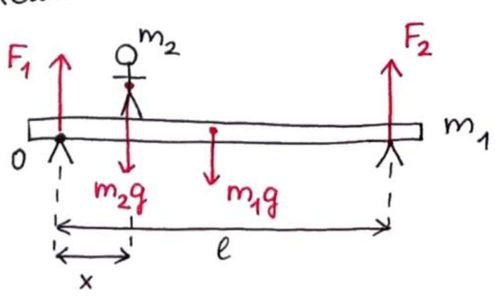
$mg = F_1$

$F_2 = F_3$

$\sum M_O$: $mg \cdot \frac{d}{2} = F_3 \cdot h$

$$F_2 = F_3 = \frac{mgd}{2h}$$

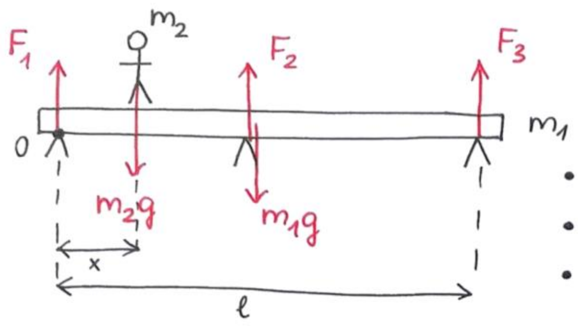
2. Kéttámaszú tartó



$F_1 + F_2 = m_1 g + m_2 g$

$m_2 g \cdot x + m_1 g \frac{\ell}{2} = F_2 \cdot \ell$

3. Háromtámaszú tartó

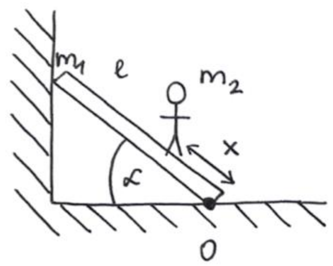


$$F_1 + F_2 + F_3 = m_1 g + m_2 g$$

$$m_2 g x + m_1 g \frac{\ell}{2} = F_2 \frac{\ell}{2} + F_3 \ell$$

- merev test modellben nem lehet megoldani
- elrendezés statikailag határozatlan
- rugalmas alakváltozás figyelembe vételével oldható meg

4. Létra



$x_{max} = ?$ hogy ne csússzon meg a létra

1. erők felvétele
2. egyenletek $\sum F_x = 0$

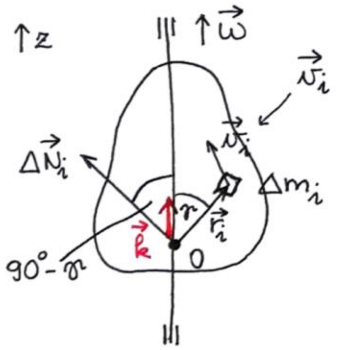
$$\left.\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \\ F_s \le \mu F_{NY} \end{array}\right\} \text{HF} \ldots$$

MEREV TEST DINAMIKÁJA

- TKP haladó mozgása : $m \vec{a}_{TKP} = \sum \vec{F}$ ld. tömegpont dinamikája
- TKP körüli forgás

$\downarrow$

RÖGZÍTETT TENGELY KÖRÜLI FORGÁS $\rightarrow$ szabadsági fokok száma kevesebb



$\vec{v}_i$ lap síkjára merőlegesen befele mutat

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \sum \vec{M} \quad \text{általánosan}$$

$$\Delta \vec{N}_i = \vec{r}_i \times (\Delta m_i \cdot \vec{v}_i)$$

$$\frac{dN_z}{dt} = \sum M_z$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$R_i = r_i \cdot \sin\vartheta \qquad v_i = \omega \cdot r_i \cdot \sin\vartheta$

$$\Delta N_{iz} = \Delta \vec{N}_i \cdot \vec{k} = \left(\vec{r}_i \times (\Delta m_i \vec{v}_i)\right)\vec{k} = r_i \Delta m_i v_i \sin\vartheta = \Delta m_i v_i R_i = \Delta m_i \omega R_i^2$$

$$N_z = \sum_i \Delta N_{iz} = \sum_i \Delta m_i \omega R_i^2 = \omega \underbrace{\sum_i \Delta m_i R_i^2}_{\text{csak a testre jellemző adatoktól függ}}$$

$\Rightarrow$ z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\boxed{\Theta_z = \sum_i \Delta m_i R_i^2}$$

$\Rightarrow N_z = \omega_z \cdot \Theta_z$

Forgó mozgás alapegyenlete: (rögz. tengely esetén)

$$M_z = \frac{dN_z}{dt} = \frac{d(\Theta_z \omega_z)}{dt} = \Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_z \beta_z \quad \rightarrow \quad \boxed{M_z = \Theta_z \beta_z}$$

Ha $M_z = 0 \Rightarrow N_z = \text{áll.}$ azaz $\Theta_z \omega_z = \text{áll.}$

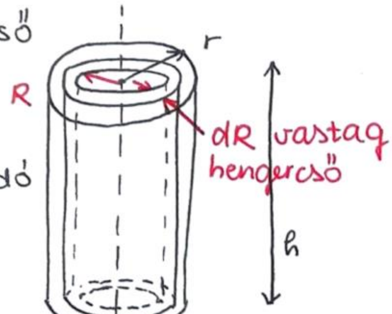
Θ MEGHATÁROZÁSA

Tömegpontokból álló test: $\Theta_z = \sum_i \Delta m_i R_i^2$

Homogén test: $\Theta_z = \int_V \varrho(\vec{r})\, R_i^2\, dV$ térfogati integrál

Pl. hengercső

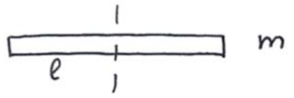
ϱ = állandó



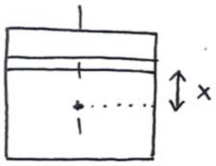
$$d\Theta = \overbrace{2R\pi \cdot dR \cdot h}^{dV} \cdot \varrho \cdot R^2$$

$$\Theta = \int_0^r 2\pi h \cdot \varrho \cdot R^3 \cdot dR = 2\pi \cdot h \varrho \frac{r^4}{4} =$$

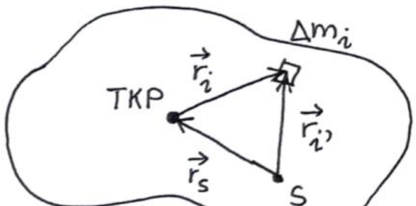
$$= \frac{r^2 \pi h \varrho}{2} \cdot r^2 = \frac{1}{2} m r^2$$



Pl négyzetlap



STEINER - TÉTEL



TKP-n átmenő tengelyre Θ_{TKP} ismert:

$$\Theta_{TKP} = \sum_i \Delta m_i\, r_i^2$$

Ekkor egy S ponton átmenő, előző tengellyel párhuzamos tengelyre Θ_S könnyen meghatározható:

$$\Theta_S = \sum_i \Delta m_i\, r_i'^2 = \sum_i \Delta m_i \left(\vec{r}_S + \vec{r}_i\right)^2 = \sum_i \Delta m_i r_S^2 + \sum_i \Delta m_i r_i^2 + \sum_i 2\Delta m_i \vec{r}_S \cdot \vec{r}_i =$$

$$= m \cdot r_S^2 + \Theta_{TKP} + 2\vec{r}_S \cdot \underbrace{\cancel{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}}_{0}$$

0, mert ez a TKP-ból TKP-ba mutató helyvektor m-szerese, ami nulla

$\Rightarrow$ Steiner - tétel: $\boxed{\Theta_S = m \cdot r_S^2 + \Theta_{TKP}}$, ahol r_S a két párhuzamos tengely távolsága

Következmény:

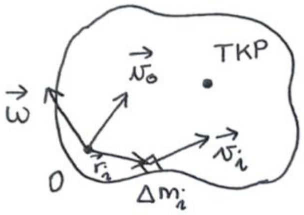
TKP-n átmenő tengelyre minimális a teh. nyomaték

FORGÓ MEREV TEST MOZGÁSI ENERGIÁJA

TKP-n átmenő tengely körüli forgás esetén:

$$E_f = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i (\omega R_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum_i \Delta m_i R_i^2}_{\Theta} = \frac{1}{2}\omega^2\Theta$$

Ha a test halad és forog is:



általánosan: $E_m = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$

Most a sebesség: $\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_i$

$$E_m = \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i v_0^2 + \sum_i 2\,\frac{1}{2}\Delta m_i \vec{v}_0(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) + \sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m v_0^2 + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i \omega^2 R_i^2}_{\frac{1}{2}\Theta_0\omega^2} + \underbrace{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i(\vec{v}_0\times\vec{\omega})}_{m\cdot\vec{r}_{TKP}(\vec{v}_0\times\vec{\omega})}$$

Első tag: „haladó mozg. energia"
Második: „forgási energia"
Harmadik vegyes tag csak speciális esetekben nulla:

- Ha $\vec{r}_{TKP} = 0$, Ekkor a TKP az origó
- Ha $\vec{v}_0 = 0$ csak forog
- Ha $\vec{\omega} = 0$ csak halad
- Ha $\vec{r}_{TKP} \parallel \vec{\omega}$ forgástengely átmegy a TKP-n
- Ha $\vec{r}_{TKP} \parallel \vec{v}_0$
- Ha $\vec{v}_0 \parallel \vec{\omega}$ csavarvonal mentén halad

A MEREV TEST SÍKMOZGÁSA

Ingamozgás – torziós inga

Elfordulás (φ) hatására visszatérítő forg. nyomaték:

$M = -D^*\varphi$ $\quad$ D^*: torziós szál rugóállandója

Alapegyenlet: $M = \Theta\beta$ $\quad$ $[M] = Nm$

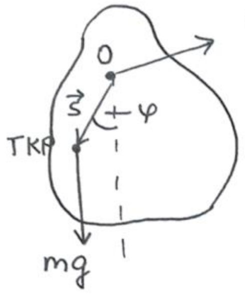
$\Rightarrow$ mozgásegyenlet: $\Theta\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -D^*\varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D^*}{\Theta}\varphi \qquad / \text{ analógia: } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{D}{m}x \;/$$

Általános megoldás: $\varphi(t) = \varphi_{max}\cdot\sin(\omega t + \varepsilon)$

ahol $\omega = \sqrt{\dfrac{D^*}{\Theta}}$

Fizikai inga



F - forgató nyomatéka 0

Kitérítés esetén nehézségi erő hatására fellépő visszatérítő nyomaték:

$$\vec{M} = \vec{s} \times (m\vec{g}) \rightarrow \left.\begin{matrix} M = -smg\sin\varphi \\ M = \Theta_0 \beta \end{matrix}\right\} \quad \Theta_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -smg\sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{smg}{\Theta_0}\sin\varphi$$

Nincs általános megoldás, konkrét esettől függ

- sorfejtés (Taylor-sor)
- numerikus (táblázat)
- $\varphi \ll 1$ esetén (kis kitérés): $\sin\varphi \approx \varphi$

Kis kitérés esetén linearizált diff. egyenlet:

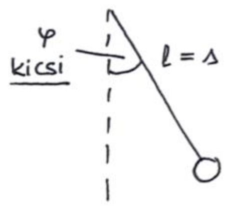
$$-\frac{smg}{\Theta_0}\sin\varphi \approx -\frac{smg}{\Theta_0}\varphi \rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{smg}{\Theta_0}\varphi$$

megoldás: $\varphi(t) = \varphi_{max} \cdot \sin(\omega t + \alpha)$

$$\omega = \sqrt{\frac{smg}{\Theta_0}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Steiner-t.}}}{=} \sqrt{\frac{smg}{\Theta_{TKP} + ms^2}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_{TKP} + ms^2}{mgs}}$$

Matematikai inga

→ speciális fizikai inga



$\Theta_{TKP} = 0$

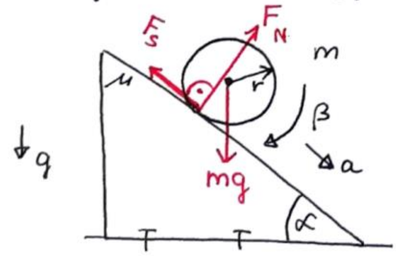
$$\omega = \sqrt{\frac{mlg}{\underbrace{\Theta_{TKP}}_{0} + ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_{TKP} + ml^2}{mlg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Gördülés

↗ Nem csúszik meg - tiszta gördülés: mindenkori érintkezési pont nyugalomban van a talajhoz képest, tapadási súrl. erő lép fel

↘ Megcsúszik és/vagy forog is



(1) $mg\sin\alpha - F_s = m \cdot a$ /N. II/

(2) $mg\cos\alpha - F_N = 0$ /N II/

(3) $F_s \cdot r = \Theta\beta = M$ /forgó mozg. alapegy./

(4) $\Theta = k \cdot m \cdot r^2$ forgástest teh. nyom.-a

Megj.: F_N, mg hatásvonala átmegy a TKP-n ⇒ nincs forgatónyomatékuk

Tegyük fel, hogy tisztán gördül - alsó pont nyugalomban van

(5) $a = \beta \cdot r$

(6) $F_s \leq \mu F_N$ F_s: tapadási súrl.

Az egyenletrendszer megoldása:

(3), (5) → $F_s = \frac{\Theta}{r^2} \cdot a$ (7)

(1), (4), (7) → $mg\sin\alpha = \left(m + \frac{\Theta}{r^2}\right)a = ma(1 + k)$

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1+k}$$

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{g \sin\alpha}{r(1+k)}$$

Teljesül-e az $F_s \leq \mu F_N$ egyenlőtlenség /feltétel/ ?

$$k \cancel{m} \frac{g \sin\alpha}{1+k} \leq \mu \cancel{m} \cancel{g} \cos\alpha$$

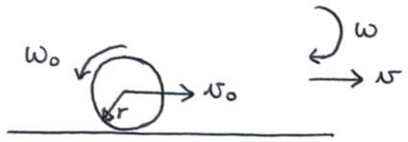
$$\mu \geq \frac{k \operatorname{tg}\alpha}{1+k}$$ ← ennek kell teljesülnie tiszta gördülés esetén

Ha csúszva gurul:

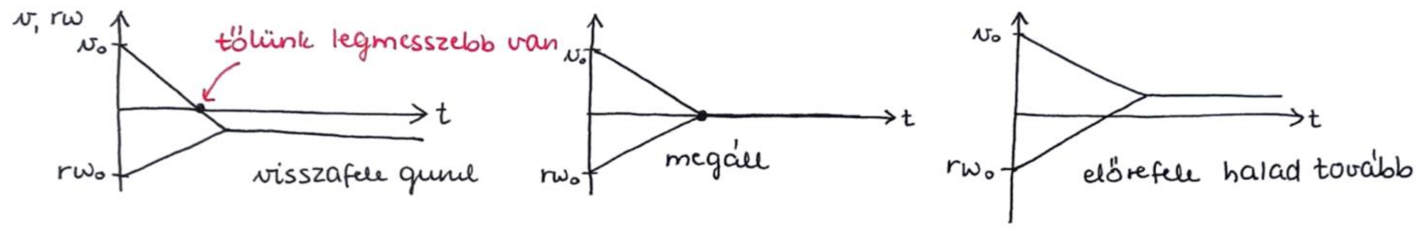
$F_s = \mu F_N$ $\qquad$ $(a \neq \beta r\ !)$

ezzel az egyenletrendszer megoldható

Kísérlet - pingpong labda



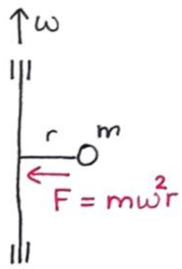
$v_0 > 0$	$v_0 = v(0)$	a	$v(t)$
$\omega_0 < 0$	$r \cdot \omega_0 = \omega(0) \cdot r$	$r \cdot \beta$	$r \cdot \omega(t)$



SZABAD FORGÁS

Tengelyt érő erőhatások

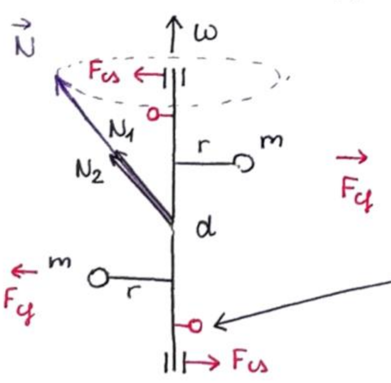
1. Statikusan kiegyensúlyozatlan test



tengely nem megy át a TKP-n

tömegpont körpályán tartásához $F = m\omega^2 r$ erőt fejtenek ki a csapágyak

2. Dinamikusan kiegyensúlyozatlan test



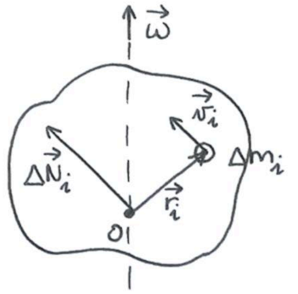
tengely átmegy a TKP-n, de a tömegeloszlás nem szimmetrikus

tömegpontok körpályán tartásához $M = Fd = m\omega^2 rd$ forgató ny.-t fejtenek ki a csapágyak

↳ $\vec{N}$ kúppalást mentén forog

kis tömegek felhelyezésével kiegyensúlyozható

Perdület és szögsebesség kapcsolata



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\Delta\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \Delta\vec{p}_i = \Delta m_i \, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Descartes-koordinátákkal:

$$\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i)\vec{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)\vec{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)\vec{k}$$

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \omega_y z_i - \omega_z y_i & \omega_z x_i - \omega_x z_i & \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(\omega_x y_i^2 - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i + \omega_x z_i^2)\vec{i} \\ &+ (\omega_y z_i^2 - \omega_z y_i z_i - \omega_x x_i y_i + \omega_y x_i^2)\vec{j} \\ &+ (\omega_z x_i^2 - \omega_x z_i x_i - \omega_y y_i z_i + \omega_z y_i^2)\vec{k} \end{aligned}$$

Teljes perdületvektor:

$$\begin{aligned} N = \sum \Big\{ & \left[\omega_x (y_i^2 + z_i^2)\Delta m_i - \omega_y x_i y_i \Delta m_i - \omega_z x_i z_i \Delta m_i\right]\vec{i} + \\ & + \left[-\omega_x x_i y_i \Delta m_i + \omega_y (x_i^2 + z_i^2)\Delta m_i - \omega_z y_i z_i \Delta m_i\right]\vec{j} + \\ & + \left[-\omega_x x_i z_i \Delta m_i - \omega_y y_i z_i \Delta m_i + \omega_z (x_i^2 + y_i^2)\Delta m_i\right]\vec{k} \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \Big[\omega_x \overbrace{\sum (y_i^2 + z_i^2)\Delta m_i}^{\Theta_{xx}} + \omega_y \overbrace{\sum(-x_i y_i \Delta m_i)}^{\Theta_{xy}} + \omega_z \overbrace{\sum(-x_i z_i \Delta m_i)}^{\Theta_{xz}}\Big]\vec{i} + \\ & \Big[\omega_x \overbrace{\sum(-x_i y_i \Delta m_i)}^{\Theta_{yx}} + \omega_y \overbrace{\sum(x_i^2 + z_i^2)\Delta m_i}^{\Theta_{yy}} + \omega_z \overbrace{\sum(-y_i z_i \Delta m_i)}^{\Theta_{yz}}\Big]\vec{j} + \\ & \Big[\omega_x \overbrace{\sum(-x_i z_i \Delta m_i)}^{\Theta_{zx}} + \omega_y \overbrace{\sum(-y_i z_i \Delta m_i)}^{\Theta_{zy}} + \omega_z \overbrace{\sum(x_i^2 + y_i^2)\Delta m_i}^{\Theta_{zz}}\Big]\vec{k} \end{aligned}$$

$$N_x = \Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z$$
$$N_y = \Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z$$
$$N_z = \Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{N} = \underline{\underline{\Theta}}\,\vec{\omega}$$

tenzor: itt szimmetrikus $\Rightarrow$ létezik olyan i, j, k bázis, ahol diagonális lesz (DIAGONALIZÁLHATÓ)

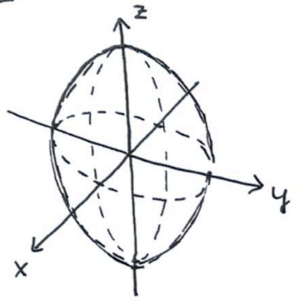
„Megfelelő" bázis = <u>főtehetetlenségi rendszer</u>,
Ezek a tengelyek a főtehetetlenségi tengelyek
Ekkor az alábbi alakot kapjuk:

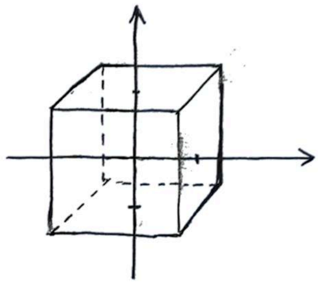
$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$N_x = \Theta_{xx}\omega_x$
$N_y = \Theta_{yy}\omega_y$
$N_z = \Theta_{zz}\omega_z$

↑
diagonális a tenzor, (csak a főátlóban vannak elemek)
→ deviációs nyomatékok nullák

Tehetetlenségi tenzor meghatározza a <u>tehetetlenségi ellipszoidot</u>
Ennek tengelyei a főtehetetl. tengelyek





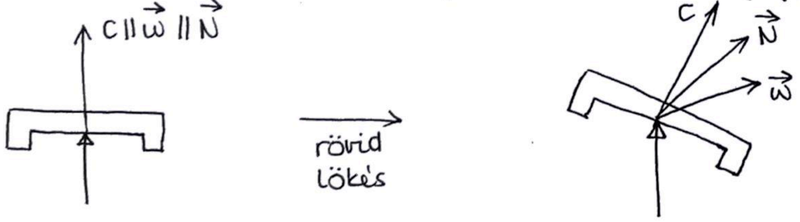
<u>Szabad forgás</u>:

- főtehetetlenségi tengely körül forgás → $\vec{N} \parallel \vec{\omega}$, ha $\vec{\omega}$ = áll. ⇒ $\vec{N}$ is áll., így egyenletesen foroghat
- TKP-n átmenő forgástengely
- stabil forgás csak max. vagy min. Θ-jú tengely körül

$\boxed{\text{Erőmentes, szimmetrikus pörgettyű}}$

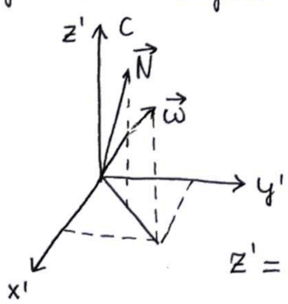
pörgettyű
- egy pontja rögzített
- bármely tengely körül foroghat

erőmentes: nem hat rá erő, forgató nyomaték $\vec{F} = 0$; $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{N}$ = áll.
szimmetrikus: két főtehetetlenségi nyomatéka megegyezik



$C \nparallel \vec{\omega} \nparallel \vec{N}$

Forgó testhez rögzített K' rendszer: főtehetetlenségi rendszer



$N'_x = \Theta_x \omega'_x = \Theta_{min}\, \omega'_x$
$N'_y = \Theta_y \omega'_y = \Theta_{min}\, \omega'_y$
$N'_z = \Theta_z \omega'_z = \Theta_{max}\, \omega'_z$

ugyanakkorák
⇒ $\vec{N} \parallel \vec{\omega}$ egy síkba esik

$z' = C$ szimmetria tengely

$$\Theta_{min} = \Theta'_x = \Theta'_y < \Theta'_z = \Theta_{max}$$

↑
test forgásszimmetrikus

Segédtétel (volt): $\left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{b}}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega}\times\vec{b}$

Most $\vec{b} : \vec{N}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ M=0}}{0} = \left.\frac{d\vec{N}}{dt}\right|_K = \left.\frac{d\vec{N}}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega}\times\vec{N} \rightarrow \left.\frac{d\vec{N}}{dt}\right|_{K'} = -\vec{\omega}\times\vec{N}$$

$$\left.\frac{d\vec{N}}{dt}\right|_{K'} = -\vec{\omega}\times\vec{N} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x' & \omega_y' & \omega_k' \\ N_x' & N_y' & N_k' \end{vmatrix} = -(\omega_y' N_z' - \omega_z' N_y')\vec{i} - (\omega_z' N_x' - \omega_x' N_z')\vec{j} - (\omega_x' N_y' - \omega_y' N_x')\vec{k} =$$

$$= \underbrace{-(\omega_y'\omega_z'\Theta_{max} - \omega_z'\omega_y'\Theta_{min})\vec{i}}_{\mathrm{I}} \underbrace{-(\omega_z'\omega_x'\Theta_{min} - \omega_x'\omega_z'\Theta_{max})\vec{j}}_{\mathrm{II}} \underbrace{-(\omega_x'\omega_y'\Theta_{min} - \omega_y'\omega_x'\Theta_{min})}_{0}\vec{k}$$

$\frac{dN_z'}{dt} = 0 \rightarrow N_z'$ állandó $\downarrow$ ω_z' állandó

$$\mathrm{I}: \quad \Theta_{min}\left.\frac{d\omega_x'}{dt}\right|_{K'} = \left.\frac{dN_x'}{dt}\right|_{K'} = -\omega_y'\omega_z'(\Theta_{max} - \Theta_{min})$$

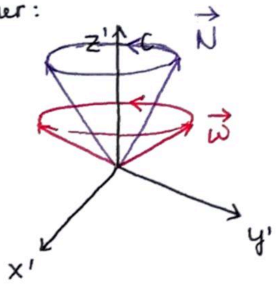
$$\mathrm{II}: \quad \Theta_{min}\left.\frac{d\omega_y'}{dt}\right|_{K'} = \left.\frac{dN_y'}{dt}\right|_{K'} = -\omega_x'\omega_z'(\Theta_{max} - \Theta_{min}) \qquad /:\Theta_{min}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega_x'}{dt} &= \underbrace{\frac{\Theta_{max} - \Theta_{min}}{\Theta_{min}} \cdot \omega_z'}_{:=\Omega_N} \omega_y' = -\Omega_N \cdot \omega_y' \\ \frac{d\omega_y'}{dt} &= \frac{\Theta_{max} - \Theta_{min}}{\Theta_{min}} \cdot \omega_z' \cdot \omega_x' = -\Omega_N \cdot \omega_x' \end{aligned}\right\} \text{ csatolt differenciálegyenlet-rendszer}$$

Megoldása:
$$\omega_x' = a \cdot \cos(\Omega_N t + \varphi)$$
$$\omega_y' = a \cdot \sin(\Omega_N t + \varphi)$$

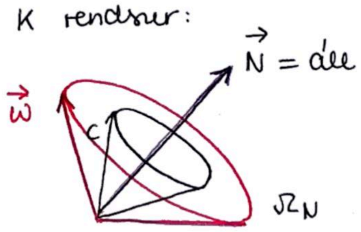
Behelyettesítéssel:
$$\frac{d\omega_x'}{dt} = -a\Omega_N \sin(\Omega_N t + \varphi) = -\Omega_N \omega_y'$$
$$\frac{d\omega_y'}{dt} = a\Omega_N \cos(\Omega_N t + \varphi) = \Omega_N \omega_x'$$

K' rendszer:



↳ z' = C szimmetria-tengely körül $\vec{N}$ és $\vec{\omega}$ $-\Omega_N$ szögsebességgel forog

K rendszer:



nutáció: $\vec{\omega}$ és C forog Ω_N szögsebességgel az állandó $\vec{N}$ körül

nutáció szögsebessége:
$$\Omega_N = \frac{\Theta_{max} - \Theta_{min}}{\Theta_{min}}\omega_z'$$

$\boxed{\text{Föld nutációja}}$

sugár: egyenlítői $R_e = 6378$ km, poláris $R_p = 6357$ km

$\Theta_{max} = \frac{2}{5} m R_e^2$, $\Theta_{min} = \frac{1}{5} m (R_e^2 + R_p^2)$

↳ $\frac{\Theta_{max} - \Theta_{min}}{\Theta_{min}} \approx \frac{1}{300}$

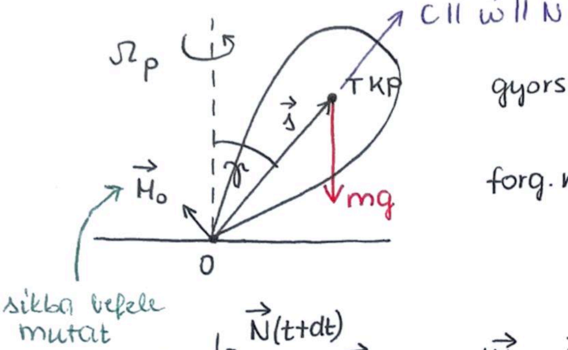
szögsebessége: $\omega_{z'} \approx \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ 1/nap

nutáció periódusideje: $T_N = \frac{2\pi}{\Omega_N} \approx 300$ nap (430 nap)

↑ a Föld Chandler-féle periódus (rugalmas test)

Súlyos, szimmetrikus, gyors pörgettyű

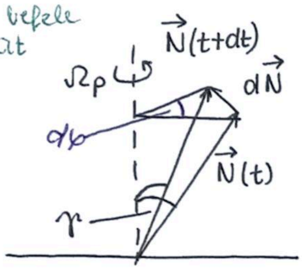
súlyos pörgettyű: hat rá külső forgatónyomaték
↳ súlypont alatt alátámasztásnál a nehézségi erő fejt ki forgató nyom-t
precesszió: gyors forgásnál a pörgettyű forgástengelye kúppalást mentén körbejár



gyors : $\boxed{\omega \gg \Omega_p} \Rightarrow \vec{N} \approx \Theta \vec{\omega} \Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{\omega} \parallel C$
jó közelítéssel párhuzamos

forg. nyom: $\vec{M} = \vec{s} \times m\vec{g}$ vízszintes irányú

$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt} \rightarrow d\vec{N} = \vec{M}\,dt$
↑ ez is vízszintes



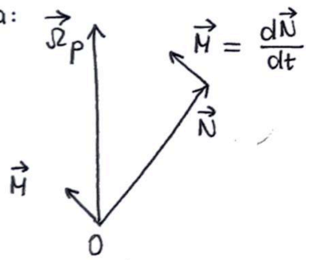
$d\vec{N} = \vec{M}\,dt$
$dN = M\,dt = mgs \cdot \sin(\gamma)\,dt$ (1)
$dN = N \cdot \sin\gamma\, d\varphi$ ábra alapján (2)

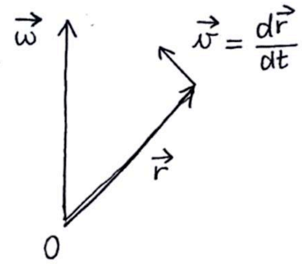
(1),(2) → $mgs \cdot \cancel{\sin\gamma}\,dt = N \cdot \cancel{\sin\gamma}\,d\varphi$

$$\boxed{\Omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgs}{N} = \frac{mgs}{\Theta\omega}}$$

Megj.:
- ha $s=0 \rightarrow \Omega_p = 0$: tengely mentén alátámasztás, erőmentes eset
- $\Omega_p \sim \frac{1}{\omega}$
- $mgs = N \cdot \Omega_p \rightarrow |\vec{M}| = |\vec{N} \times \vec{\Omega}_p|$

Analógia:





$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}$ $\qquad$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{M} = \vec{\Omega}_p \times \vec{N}$ $\qquad$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Pörgettyű ellenhatása a környezetre: pörgettyű nyomaték
$\vec{M}^* = -\vec{M} = -\vec{\Omega}_p \times \vec{N} = \vec{N} \times \vec{\Omega}_p$

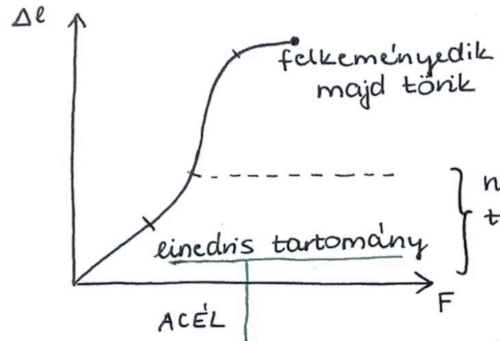
Példák
- giroszkóp: külső forg. nyom. nem vihető át a belső tengelyre
- diszkosz, frizbi: megfelelő pörgetéssel megtartja az irányát
- lövedék: forgó lövedék pályája kiszámíthatóbb
- bicikli: utánfutás stabilizálja + kerék tömegéből pörgettyűnyomaték

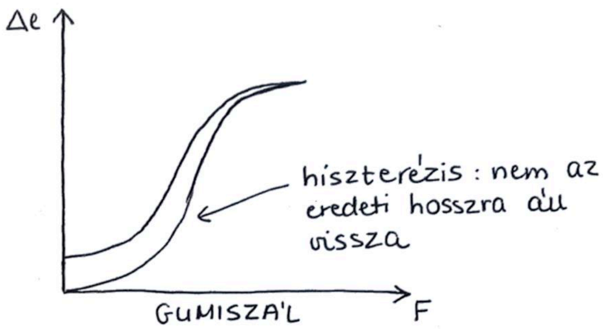
SZILÁRD TESTEK ALAKVÁLTOZÁSAI

↗ képlékeny : alakvált. után úgy marad
↘ <u>rugalmas</u>: visszaáll eredeti alakjára

↗ atomi
↘ <u>kontinuum</u> - folyamatos

↗ <u>izotrop, homogén</u> : nincs kitüntetett irány; hely szerinti azonosság
↘ anizotróp, inhomogén : van kitüntetett irány, nem homogén





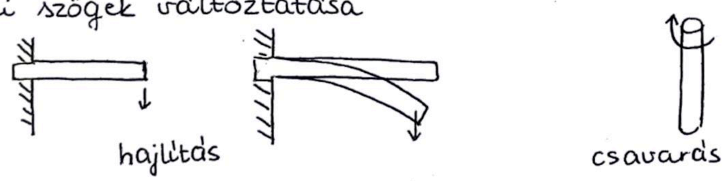
Hooke - törvény : $\boxed{\Delta l \sim F}$ rugalmas tart. lineáris részére jó közelítéssel

Erő típusok:

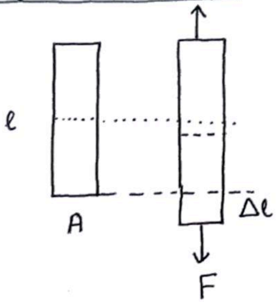
ELEMI DEFORMÁCIÓK

- nyújtás, összenyomás (1D) → harántirányú összehúzódás / kitágulás
- kompresszió (3D összenyomás)
- nyírás: testen belüli szögek változtatása

Ezekkel összerakható:



Nyújtás (lineáris)



- relatív megnyúlás (deformáció): $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (szám)
- húzó/nyomófeszültség (mechanikai fesz.) $\sigma = \frac{F}{A}$ $[\sigma] = \frac{N}{m^2} = Pa$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta l \sim F \\ \Delta l \sim l \\ \Delta l \sim \frac{1}{A} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta l \sim \frac{l}{A} F \\ \boxed{\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{F}{A}} \end{array} \rightarrow \boxed{\varepsilon \sim \sigma}$$

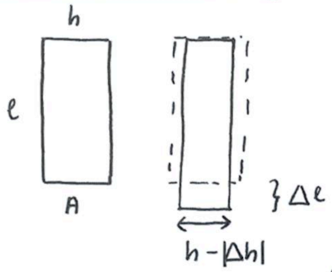
$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$, $\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$

ahol E: Young - modulusz (anyagállandó)

$[E] = \frac{N}{m^2} = Pa$

acélra: $2 \cdot 10^{11}$ Pa

Harántösszehúzódás



$\Delta l > 0$

$\Delta h < 0$

$\Delta h \sim \frac{\Delta l}{l} \cdot h$

$\Delta h = -\mu \frac{\Delta l}{l} \cdot h$

$$\boxed{\frac{\Delta h}{h} = -\mu \varepsilon}$$

ahol μ: Poisson-állandó / Poisson-szám
adott anyagra jellemző

Eredeti térfogat: $V = l \cdot h^2$

Új: $V + \Delta V = (l+\Delta l)(h+\Delta h)^2$

$\Rightarrow \Delta V = l(1+\varepsilon)h^2(1-\mu\varepsilon)^2 - lh^2 \approx lh^2(1+\varepsilon-2\mu\varepsilon-1) = V\varepsilon(1-2\mu)$

$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu) > 0 \rightarrow$ Poisson-számra feltétel: $\boxed{0 < \mu < \frac{1}{2}}$

acélra: $\mu \approx \frac{1}{3}$

Elsőrendű közelítés: $\varepsilon \ll 1$ esetén $(1+\varepsilon)^n$ alakúakra:

$(1+\varepsilon)^2 = 1+2\varepsilon+\varepsilon^2 \approx 1+2\varepsilon$

$(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$

$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\frac{\varepsilon}{2}$

$(1+\varepsilon)(1+\delta) \approx 1+\varepsilon+\delta$

Kompresszió

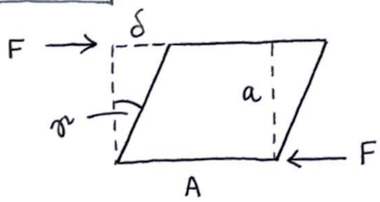
$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot p = -\frac{1}{K} \cdot p = +3\varepsilon(1-2\mu)$$

κ: kompresszivitás

p: rá ható nyomás $p = -\sigma$

$3\varepsilon(1-2\mu) = -\frac{1}{K}p = \frac{1}{K}E\varepsilon \longrightarrow \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\mu)}}$ K: kompressziómodulus

Nyírás



- nyírási szög: $\gamma = \frac{\delta}{a}$
- nyírófeszültség: $\tau = \frac{F}{A}$ $[\tau] = \frac{N}{m^2} = Pa$

$$\left.\begin{matrix} \delta \sim F \\ \delta \sim a \\ \delta \sim \frac{1}{A} \end{matrix}\right\} \frac{\delta}{a} \sim \frac{F}{A} \rightarrow \boxed{\gamma \sim \tau}$$

$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{G}\tau$, $\boxed{\tau = G \cdot \gamma}$

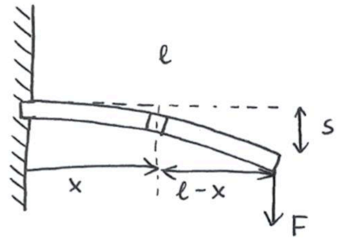
ahol G: nyírási modulus, $[G] = \frac{N}{m^2} = Pa$

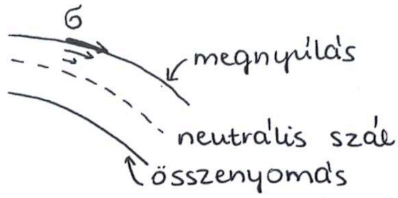
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

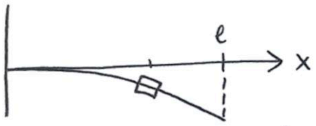
Feltétel G-re: $\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$

acélra: $8 \cdot 10^{10}$ Pa

Összetett deformációk – Lehajlás







Külső erő forgatónyomatéka:

$M = F(l-x)$

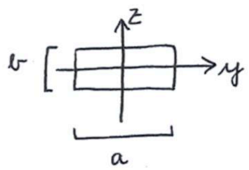
Ezzel tart egyensúlyt a rúd belsejében fellépő húzó- és nyomófesz.-ek forg. nyom-a:

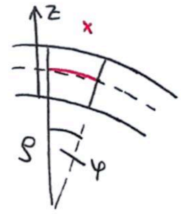
$$M = \int_A \sigma \cdot z \, dA = \int_A E \cdot \frac{z^2}{\rho} \, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{b/2} \frac{Ea}{\rho} z^2 dz = \frac{E \cdot a}{3\rho} \frac{b^3}{4} = \frac{E}{\rho} \frac{ab^3}{12} = \frac{E}{\rho} I$$

keresztmetszeti nyomaték: keresztmetszettől függ:

$I = \int_A z^2 dA$

$I_{\square} = \frac{ab^3}{12}$





$x = \rho\varphi$

$x + \Delta x = (\rho + z)\varphi$

$\Delta x = z\varphi$

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} = \frac{z}{\rho}$

Jó közelítéssel: $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$

Egyensúly a forg. nyom-okra:

$$F \cdot (l-x) = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$d^2y = \frac{F}{EI}(l-x)\,dx^2$$

$$dy = \frac{F}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)dx$$

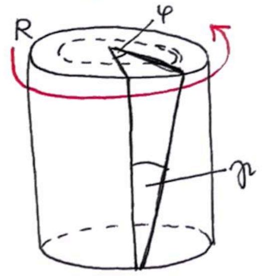
$$y(x) = \frac{F}{EI}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$ görbe egyenlete

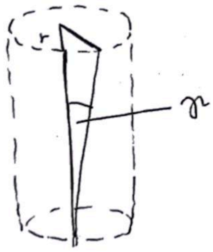
A rúd lehajlása: $x = l$ helyen $s = \frac{Fl^3}{3EI} = y(l)$

Téglalap keresztmetszet esetén: $s_{\square} = \frac{4Fl^3}{Eab^3}$ $\left(I = \frac{ab^3}{12}\right)$

Csavarás

$M \sim \varphi$





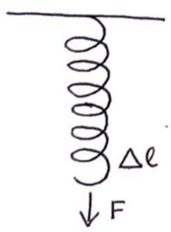
körgyűrűkre osztjuk fel

Csavaró forgatónyomaték:

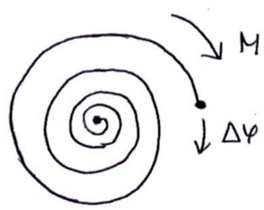
$$M = \underbrace{\frac{\pi G R^4}{2l}}_{D^*} \varphi$$

D^* torziós szál visszatérítő nyomatéka

Példák: csavarrugó és spirálrugó



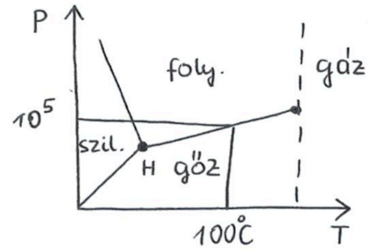
CSAVARÁS
G, csavarodik, nyírófeszültség lép fel



forgatónyomatékkal hatunk rá

HAJLÍTÁS
E, húzó-, nyomófeszültség lép fel

FOLYADÉKOK ÉS GÁZOK

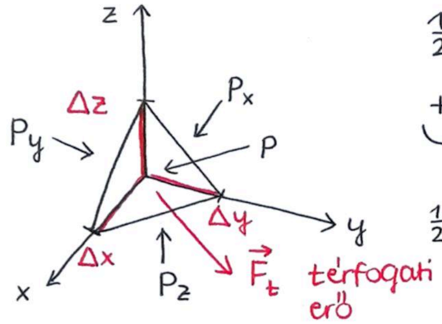


folyadék } közeg
gáz

foly.: nagyobb ϱ, van szabad felszíne → felületi jelenségek
gáz: kisebb ϱ

HIDROSZTATIKA

A nyomás irányfüggetlensége



$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\Delta y \Delta z\, p_x \vec{i} + \tfrac{1}{2}\Delta x \Delta z\, p_y \vec{j} + \tfrac{1}{2}\Delta x \Delta y\, p_z \vec{k} + \tfrac{1}{2}(\Delta z \vec{k} - \Delta x \vec{i}) \times (\Delta y \vec{j} - \Delta x \vec{i})\, p}_{\text{felületi erők}} + \underbrace{\vec{F}_t}_{\text{térfogati erő}} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta y \Delta z (p_x - p)\vec{i} + \tfrac{1}{2}\Delta x \Delta z (p_y - p)\vec{j} + \tfrac{1}{2}\Delta x \Delta y (p_z - p)\vec{k} + \cancel{\vec{F}_t} = 0$$

$\Delta x \to 0$
$\Delta y \to 0$
$\Delta z \to 0$

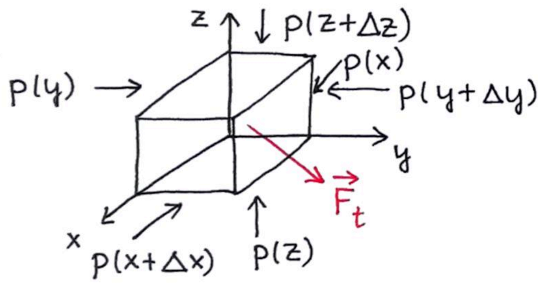
elhanyagolható, gyorsabban tart 0-hoz (harmadrendű)

A baloldal csak akkor lehet nulla, ha minden tagja nulla, így

$$p_x - p = 0 = p_y - p = p_z - p \Rightarrow \boxed{p_x = p_y = p_z = p}$$

térfogatdarab egyensúlya: hidrosztatika

A nyomás helyfüggetlensége



$$\big(p(x) - p(x+\Delta x)\big)\Delta y \Delta z\, \vec{i} + \big(p(y) - p(y+\Delta y)\big)\Delta x \Delta z\, \vec{j} + \big(p(z) - p(z+\Delta z)\big)\Delta x \Delta y\, \vec{k} + \vec{F}_t = 0$$

$$-\left[\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dV \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\cdot dV \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot dV \vec{k}\right] + \vec{F}_t = 0$$

$$\frac{d\vec{F}_t}{dV} = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} p = \vec{\nabla} p$$

Azaz a nyomásgradiens egyenlő az egységnyi térfogatra eső térfogati erővel.

Pascal-törvény: $\boxed{\text{ha } \vec{F}_t = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} p = 0 \text{ azaz } p = \text{állandó}}$

↳ alkalmazás: hidraulikus emelő
hidraulikus fék

Hidrosztatikai nyomás

A folyadékra a nehézségi erő hat. Elemi ΔV térfogatra ható térf.-i erő:

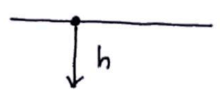
$$\vec{F}_t = -\varrho \Delta V \cdot g \cdot \vec{k} \qquad m = \varrho \Delta V$$

$$\frac{d\vec{F}_t}{dV} = -\varrho g \vec{k} = \operatorname{grad} p = \frac{dp}{dz}\vec{k}\,; \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$-\varrho g = \frac{dp}{dz} \to p(z) = p_0 - \varrho g z$$

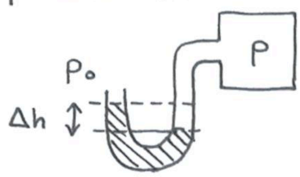
p_0: $z=0$ helyen lévő nyomás

$h=-z$ jelöléssel: (h: felszíntől a mélység)



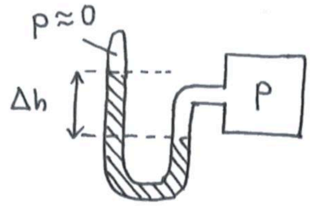
$$p(h) = p_0 + \underbrace{\varrho g h}_{p_h \text{ hidrosztatikai nyomás}}$$

Nyomásmérés:



nyitottcsöves

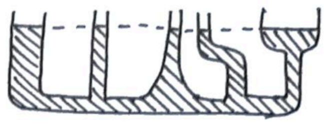
$\Delta p = \rho g \Delta h$



zárt csöves

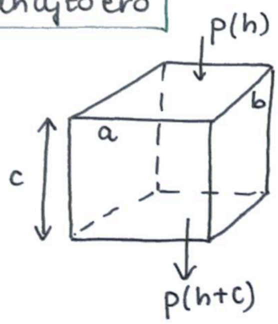
abszolút nyomást mér

Közlekedő edény:



- üvegedény - foly. között ϕ kölcsönhatás
- csövek ne legyenek túl vékonyak

$\boxed{\text{Felhajtóerő}}$

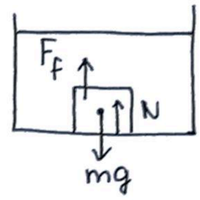


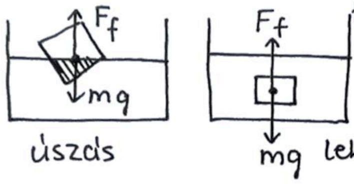
$p(h+c)\cdot ab - p(h)ab =$

$= (p_0 + \rho g (h+c))\, ab - (p_0 + \rho g h)\, ab = \rho g V$

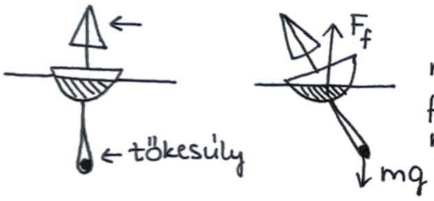
$\Rightarrow F_f$ felhajtóerő: $F_f = \rho_f g V$

ρ_f: foly. sűrűsége

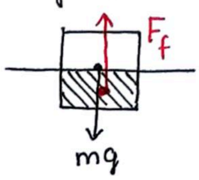


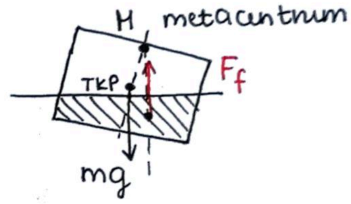


úszás   mg lebegés



megfelelő forgató-nyomaték
↓
egyensúlyba visszaállítja





TKP feletti metacentrum esetén stabil a hajó

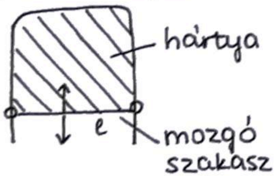
$\boxed{\text{FELÜLETI JELENSÉGEK}}$

A felület lassabban csökken, mint a térfogat → kisebb méreteknél felületi jelenségek fontosabbá, jelentősebbé válnak

Pl.

rovar lába a vízen

Folyadékhártya:



hártya által a mozgó részre kifejtett erő:

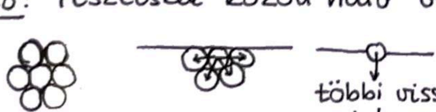
$F_h = 2l\sigma$, ahol σ: felületi feszültség $\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta l}$

$[\sigma] = \frac{N}{m}$

$\boxed{\sigma = \frac{F}{2l}}$

2-es szorzó: hártyának 2 felülete van

Kohézió: részecskék között ható vonzerő → rövidtávú erő, „csak a szomszédjára"



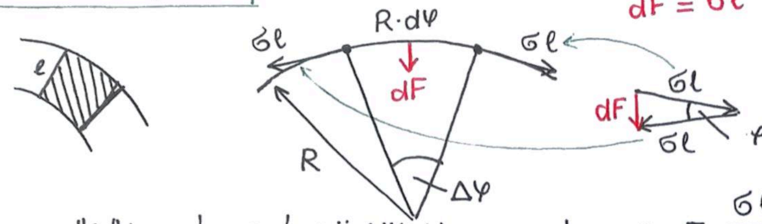
felület minimális legyen (energetikailag legkedvezőbb)

Felületi energia: $W = F\cdot\Delta x = 2l\cdot\sigma\cdot\Delta x = \sigma\cdot\Delta A = \Delta E$

→ felületi energiasűrűség: $\boxed{\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}}$

Görbületi nyomás

$dF = \sigma l \varphi$ eredő erő hat a felületdarabra



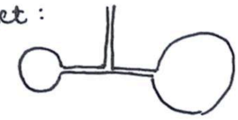
dF erőből származó görbületi nyomás: $p_g = \dfrac{\sigma l \Delta\varphi}{l R \Delta\varphi} = \dfrac{\sigma}{R}$

általánosan: $\boxed{p_g = \sigma\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)}$ R_1, R_2 : max. ill. min görbülethez tartozó fő görbületi sugarak

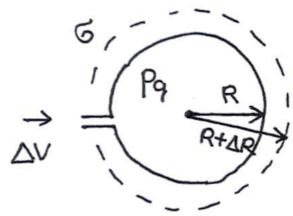
gömb: $R_1 = R_2 = R$ $\quad p_g = \dfrac{2\sigma}{R}$

szappanbuborék: mindkét folyadékfelszín okoz p_g-t: $\Rightarrow p_g = \dfrac{4\sigma}{R}$

Megj. / kísérlet:

-  kisebb buborékban (kisebb R) nagyobb a nyomás, így a levegő a nagyobba áramlik
- Tűlevél, fa $\quad p_0 + p_g < 0$  negatív nyomás alakul ki, a fa felszívja a vizet magasra is

Görbületi nyomás másik levezetése:



térfogatnöveléshez szükséges munka:

$$W = p_g \cdot \Delta V = p_g \cdot A \cdot \Delta R = p_g \cdot 4R^2\pi \cdot \Delta R$$

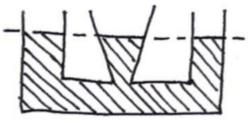
felületi energia megváltozása:

$$\Delta E = \sigma \cdot \Delta A = 2\sigma\left(4\cdot(R+\Delta R)^2\pi - 4R^2\pi\right) \approx 2\cdot\sigma\cdot 8\cdot R\cdot\Delta R\cdot\pi =$$

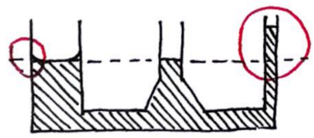
$$= 16\cdot R\cdot\pi\cdot\sigma\cdot\Delta R$$

$$\Rightarrow W = \Delta E \rightarrow p_g = \frac{16 R\pi\sigma\Delta R}{4R^2\pi\Delta R} = \frac{4\sigma}{R}$$

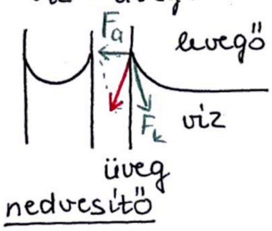
Kapilláris jelenségek

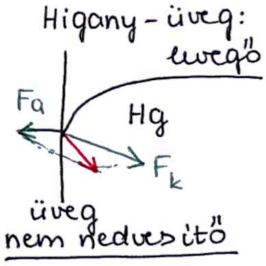


felületi jelenségek elhanyagolhatóak



vékony cső esetén



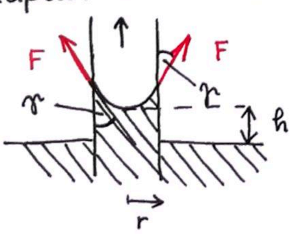


illeszkedési szög: γ

Oka:

- kohézió: folyadékon belüli összetartó erő
- adhézió: folyadék és szilárd felület közötti vonzóerő

Kapilláris emelkedés: nedvesítő folyadék esetén

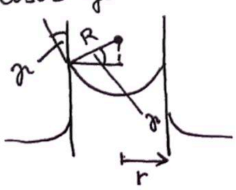


$F_f = 2r\pi\sigma\cos\gamma$ – folyadék peremén fellépő erők

$F_g = r^2\pi h \cdot \rho \cdot g$ – foly. súlya

$$F_f = F_g \rightarrow h = \frac{2\sigma\cos\gamma}{\rho g r}$$

Másik gondolatmenet: görbületi nyomás kiegyenlíti a $\rho g h$ hidroszt. nyomást



$$R = \frac{r}{\cos\gamma} \rightarrow p_g = -\frac{2\sigma}{R} = -\frac{2\sigma\cos\gamma}{r}$$

$$p_g + p_h = 0 \rightarrow \rho g h = \frac{2\sigma\cos\gamma}{r}$$

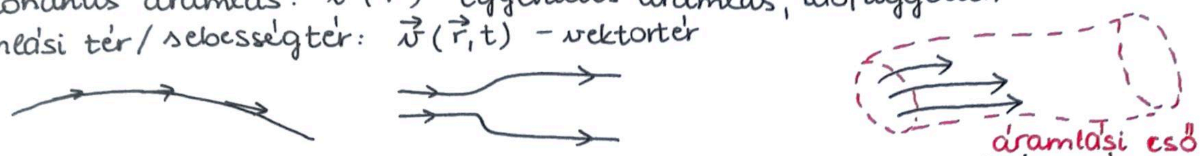
$$\boxed{h = \frac{2\sigma\cos\gamma}{\rho g r}}$$

ÁRAMLÁS

áramlás $\nearrow$ van belső súrlódás
$\searrow$ súrlódásmentes (közelítés)

Leírása $\nearrow$ atomi (egyes részecskék nyomonkövetése)
$\searrow$ közeg jellemzői a hely és idő függvényében, pl.: $v(\vec{r},t)$

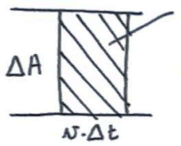
stacionárius áramlás: $\vec{v}(\vec{r})$ egyenletes áramlás, időfüggetlen
áramlási tér / sebességtér: $\vec{v}(\vec{r},t)$ – vektortér



Tömegáramerősség: $I_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ tetsz. keresztmetszeten Δt alatt átáramló Δm tömeg
Térfogatáramerősség: $I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ —— " —— —— " —— ΔV térfogat
Tömegáram – sűrűség:

$\frac{\Delta I_m}{\Delta A} = j_m = \varrho \cdot v$ $\longrightarrow$ vektormennyiség: $\vec{j}_m = \varrho \cdot \vec{v}$

$$I_m = \int_A \varrho \cdot \vec{v}\, d\vec{A}$$



$\Delta V = \Delta A \cdot v \cdot \Delta t$
$\Delta m = \varrho \cdot \Delta V = \varrho \cdot \Delta A \cdot v \cdot \Delta t$

Kontinuitási egyenlet

Forrásmentes áramlási tér, stacionárius eset:
$I_{m_1} = I_{m_2}$ tömegmegmaradás!

Más jelöléssel: $\int_{A_1} \varrho \vec{v}_1\, d\vec{A} = \int_{A_2} \varrho \vec{v}_2\, d\vec{A}$

Ha $d\vec{A} \parallel \vec{v}$ ($\vec{v}$ merőleges a felületekre), akkor a vektorok nagyságával számolhatunk.
Ha ϱ, v a cső keresztmetszete mentén állandó, akkor integrál helyett ezt írhatjuk:

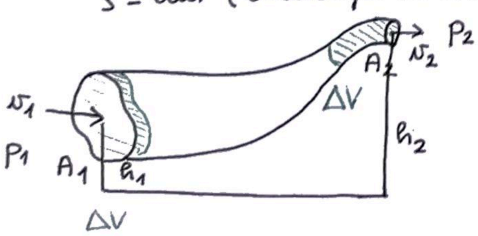
$$\varrho v_1 \cdot A_1 = \varrho v_2 \cdot A_2$$

Ha $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$: $\boxed{v_1 A_1 = v_2 A_2}$ kontinuitási egyenlet

szűkebb helyen gyorsabb

Bernoulli - egyenlet

Tfh. súrlódásmentes folyadék $\rightarrow$ nincsenek disszipatív erők, nem konzervatív munkák $\Rightarrow$ mechanikai energiamegmaradás
stacionárius áramlás.
$\varrho =$ áll. (összenyomhatatlan közeg)



Környezet által a közegen végzett munka:
$W = (p_1 - p_2)\Delta V$
Mechanikai energia:
$E_1 = \frac{1}{2}\varrho \Delta V\, v_1^2 + \varrho \Delta V \cdot g \cdot h_1$
$E_2 = \frac{1}{2}\varrho \Delta V\, v_2^2 + \varrho \Delta V \cdot g \cdot h_2$

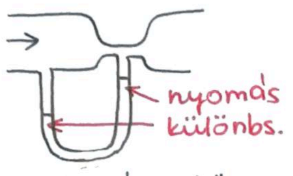
$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$, $\Delta V = A_1 v_1 \cdot \Delta t = A_2 v_2 \cdot \Delta t$
Munkatétel: $W = E_2 - E_1$

$$(p_1 - p_2)\cancel{\Delta V} = \frac{1}{2}\varrho \cancel{\Delta V}(v_2^2 - v_1^2) + \varrho g \cancel{\Delta V}(h_2 - h_1)$$

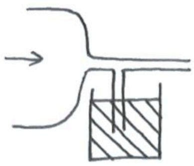
$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2$$

$\Rightarrow$ Bernoulli - egyenlet: $\boxed{p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h = \text{áll.}}$ $\rightarrow$ csak súrlódásmentes közelítésben!

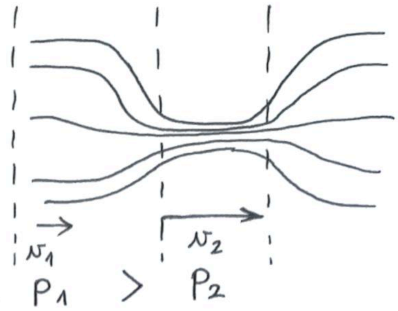
Ha $h_1 = h_2$: $\quad p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{áll.}$



sebességmérő



porlasztó

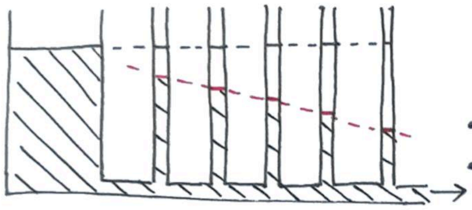


$P_1 > P_2$

$\downarrow$

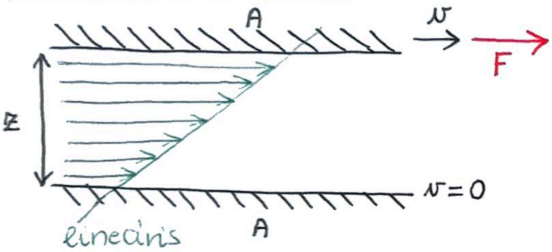
$v_1 < v_2$

Súrlódásos áramlás



- belső súrlódás – viszkozitás: elmozduló részek között nyírófeszültség → relatív sebességet csökkenti
- viszkózus közegben a Bernoulli – tv. nem igaz
- nagy viszkozitású anyag: üveg, szurok

Lamináris áramlás



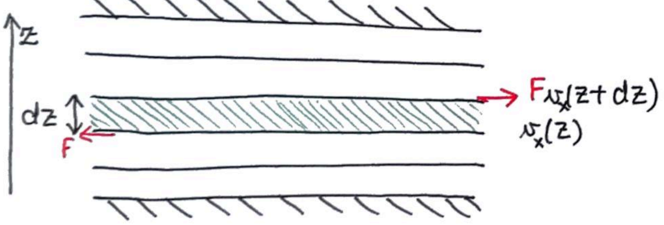
felső réteget F erővel állandó v-vel mozgatjuk

$$\left.\begin{array}{l} F \sim A \\ F \sim v \\ F \sim \frac{1}{z} \end{array}\right\} \quad F = \eta \frac{A \cdot v}{z}$$

η → anyagra jellemző állandó <u>viszkozitás</u>

$[\eta] = \frac{kg}{sm} = Pas$

Rétegekre osztjuk a folyadékot, a lapok elcsúsznak egymáson, a belső súrlódás a rétegek között hat. A rétegek között ható erő miatt adott lap feletti azt gyorsítja, alatta lévő pedig lassítja.



$$F = \underbrace{\eta \frac{dv_x}{dz}}_{\tau} A$$

τ: nyírófeszültség

<u>Newton-féle súrlódási törvény:</u>

$$\boxed{\tau_x = \eta \frac{dv_x}{dz}}$$

$[\tau] = \frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot \cancel{m}}{s^2 m^{\cancel{2}}}$

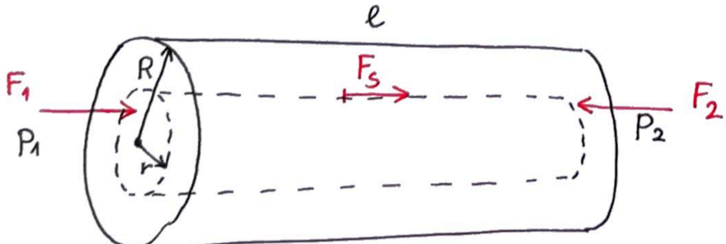
A seb. gradiens állandó: $\frac{dv_x}{dz} = \frac{v_0}{z_0} \rightarrow v_x(z) = \frac{v_0}{z_0} \cdot z$

Newtoni folyadék: érvényes rá a fenti törvény.

Nem-newtoni foly.: kolloid oldatok pl. keményítőből, ezeknél η nem állandó.

Hagen – Poiseuille – törvény

hengercsőben milyen a sebességprofil?



F_s: folyadék belső súrlódása

F_1, F_2: külső nyomásból származó erők

Stacionárius áramlás (v = áll.) ⇒ erők eredője nulla:

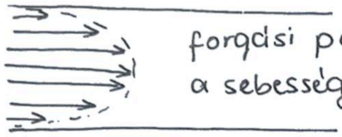
$$\underbrace{P_1 r^2 \pi}_{F_1} - \underbrace{P_2 r^2 \pi}_{F_2} + \underbrace{\underbrace{2 r \pi l}_{A}\, \underbrace{\eta \frac{dv}{dr}}_{\tau}}_{F_s} = 0$$

Rendezzük az egyenletet: $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2 l \eta} \cdot r$ szeparálható diffegyenlet

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2 l \eta} r dr$$

az egyenlet megoldása: $v(r) = -\frac{P_1 - P_2}{2 l \eta} \cdot \frac{r^2}{2} + C$ => $\boxed{v(r) = \frac{P_1 - P_2}{4 l \eta}(R^2 - r^2)}$

határfeltétel: $v(R) = 0 \rightarrow C = \frac{P_1 - P_2}{2 l \eta} \cdot \frac{R^2}{2}$



forgási paraboloid a sebességeloszlás

- $v_{max} = v(0) = \frac{P_1 - P_2}{4 l \eta} \cdot R^2$
- szélén: $v = 0$

tömegáram - erősség: időegység alatt átáramló foly. mennyiség

$$\boxed{I_m = \int_A \vec{j}_m d\vec{A}} = \int_A \varrho v dA = \int_0^R \varrho v(r) \underbrace{2 r \pi dr}_{\text{körgyűrű területe}} = \frac{P_1 - P_2}{4 l \eta} \varrho 2\pi \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) dr =$$

$$= \boxed{\frac{(P_1 - P_2)\varrho \pi}{8 l \eta} \cdot R^4}$$ Hagen-Poiseuille-törvény

térfogatáram: $I_V = \frac{I_m}{\varrho}$

közeg átlagos sebessége: $v_{átl} = \frac{I_V}{A} = \frac{(P_1 - P_2)\cancel{\pi} R^{\cancel{4}2}}{8 l \eta R^2 \cancel{\pi}} = \frac{P_1 - P_2}{8 l \eta} R^2$

↳ megj.: ez a maximális seb. fele!

Analógia az elektromos árammal

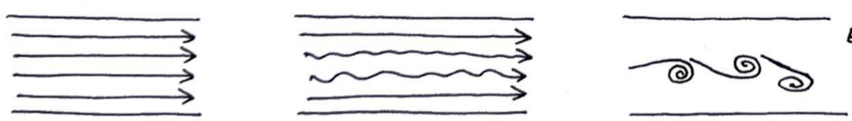
feszültség U	Δp nyomáskülönbség
áram I	I_V térfogatáram
ellenállás $R = \frac{U}{I}$	$\mathbb{R} = \frac{\Delta p}{I_V} = \frac{8 l \eta}{\pi R^4}$ cső viszkózus ellenállása
$R = \varrho \frac{l}{r^2 \pi}$	

Közegben mozgó testre ható erők

Turbulens áramlás

stacionárius áramlás: kis idő után az áramlás képe ugyanolyan

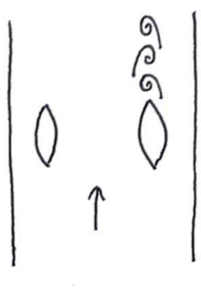
sebességet növelve:



Reynolds-szám: $Re = \frac{v \varrho r}{\eta}$ dimenziótlan

↳ ha a szám megegyezik, a két áramlás hasonló

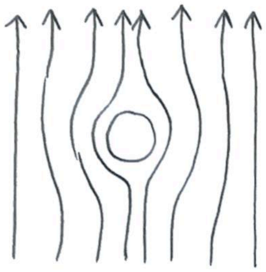
↳ hengeres csőnél $Re \geq 1200$ esetén turbulens



Közegellenállás

a közeg akadályozza az abban mozgó test mozgását

(1) VISZKOZITÁSBÓL SZÁRMAZÓ



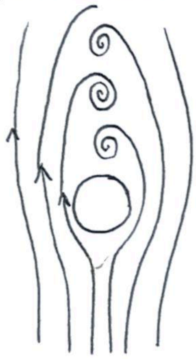
- Kis sebességeknél ($Re < 1200$) lamináris a test körül
- közegell. oka a belső súrlódás $\Rightarrow$ $F \sim v$, $F \sim \eta$
- Nagyon kis sebességnél ($Re < 1$) és gömb esetén:

$$\boxed{F_k = 6\pi\eta \cdot r \cdot v}$$ Stokes - törvény

r: gömb sugara

Megj.: a közeg nagyon nagy kiterjedése esetén igaz!

(2) TURBULENCIÁBÓL SZÁRMAZÓ



- a fékezőerőt az örvények okozzák:
  hátul a Bernoulli - tv miatt a nagy sebességek alacsony nyomást okoznak, a testet ez visszahúzza
- $F \sim v^2$

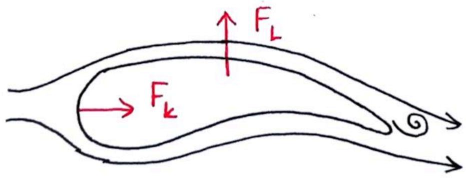
$$\boxed{F_k = \frac{1}{2} c \varrho A v^2}$$, ahol c: formatényező (dimenziótlan)

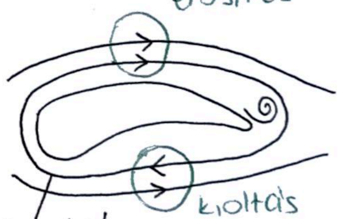
kevesebb örvény

viharban a cserép sérülése

Aerodinamikai felhajtóerő

- mozgás irányára merőleges
- OKA: szárny speciális alakja

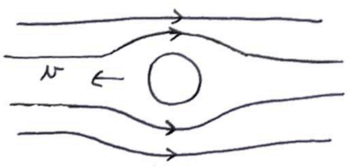




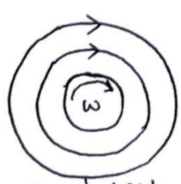
hátul óramutatóval ellentétes ir. örvény alakul ki
ezzel ellentétes ir. zárt örvény kelet. a perdületmegmaradás miatt
alatta - felette lévő örvénnyel szuperponálódik
felül nagyobb sebesség $\rightarrow$ kisebb nyomás $\rightarrow$ felhajtóerő

Magnus - effektus

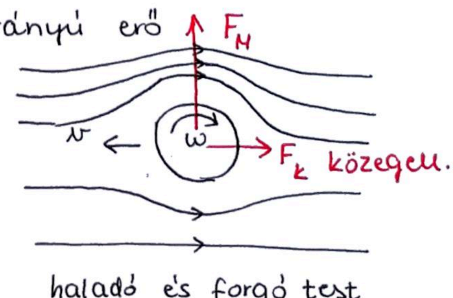
- haladó és forgó mozgást végző testekre ható oldalirányú erő



haladó test, szimmetrikus áramlás



forgó test, cirkuláció

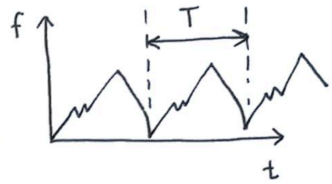


haladó és forgó test (felülnézet)

a kétféle áramlás szuperponálódik, az egyik oldalon nagyobb sebességű áramlás alakul ki $\rightarrow$ kisebb nyomás (Bernoulli) $\rightarrow$ oldalirányú erő

REZGÉSEK

rezgés: valamilyen mennyiség egy adott intervallumon belüli változása



periodikus rezgés: $f(t) = f(t+T)$

periódusidő: legkisebb pozitív T, $[T] = s$

harmonikus rezgés: időbeli változást harmonikus függvény írja le

↳ természetben gyakran előfordul, Fourier sor: rezgés összerakható harmonikus rezgésekből

Szabad harmonikus rezgés

Kitérés az idő függvényében: $\boxed{x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$

A: rezgés amplitúdója, maximális kitérés $[A] = m$

ω: körfrekvencia $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $[\omega] = \frac{1}{s}$

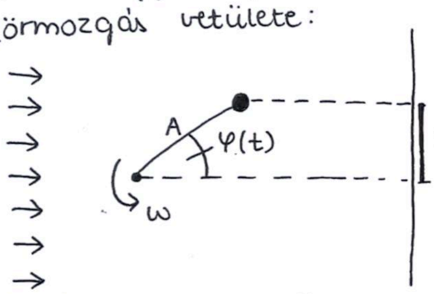
ν: frekvencia $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ $[\nu] = \frac{1}{s} = Hz$ (időegység alatt hány rezgés)

φ: kezdőfázis (időtengely mentén eltolás)

$\boxed{x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi')}$ egyenrangú felírás, φ' kezdőfázis más ($\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$)

További egyenrangú felírás azonosságok alapján: $x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$

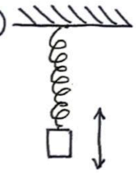
Körmozgás vetülete:



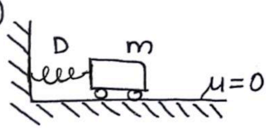
$x(t) = A \cdot \sin(\varphi(t)) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$

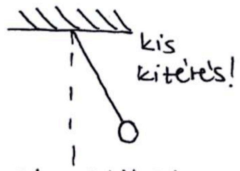
Példák: ①



②

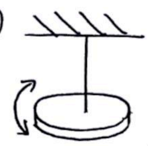


③



matematikai inga

④

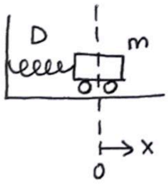


torziós rezgés $\varphi(t)$-re!

⑤ feszültség (hálózati)

$U(t) = \hat{V} \sin(\omega t + \varphi)$

Kinematika:



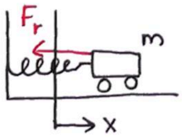
$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = \underbrace{A \cdot \omega}_{v_{max}} \cos(\omega t + \varphi)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{A\omega^2}_{a_{max}} \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$

testre ható erő: $\sum F(t) = m \cdot a_x(t) = -m\omega^2 x(t)$ visszatérítő erő: $F \sim -x$

Dinamika:



$F = -Dx$ Hook-törvénynek engedelmeskedő rugó, rugóerő

Mozgásegyenlet: $-Dx = ma$ differenciálegyenlet

Rendezve: $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m} x = 0}$

↳ másodrendű

↳ lineáris

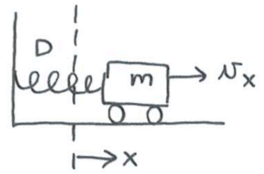
↳ homogén

általános megoldás: $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

ω: rendszertől függ: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

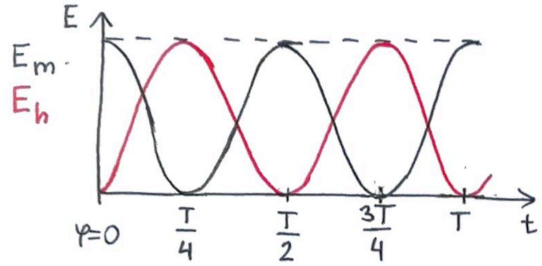
A, φ: kezdeti feltételektől függnek $\left.\begin{matrix} x(0) \\ v_x(0) \end{matrix}\right\}$ 2db feltételből meghatározható

Energetikai viszonyok (szabad harm. rezgés):

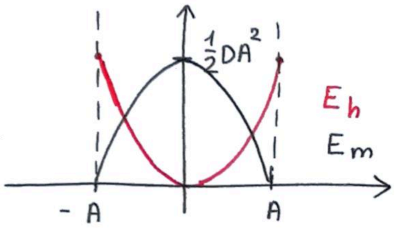


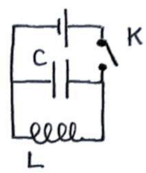
teljes mechanikai energia: → IDŐBEN ÁLLANDÓ!

$$E(t) = E_m - E_h = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} D x^2 =$$
$$= \frac{1}{2} m \left(A\omega\cos(\omega t+\varphi)\right)^2 + \frac{1}{2} D \left(A\sin(\omega t+\varphi)\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \underbrace{m A^2 \omega^2}_{= D} \cos^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2} D A^2$$

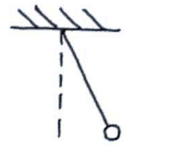


- egy T alatt 2-szer adják oda-vissza az E-t
- rezgés akkor alakul ki, ha van két energiaforma, amelyek egymásnak átadhatják az energiát és vissza

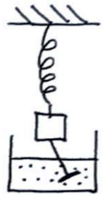




kondenzátor-tekercs



gravitációs E - mozgási E



$\boxed{\text{Csillapított rezgés}}$

idővel az A amplitúdó csökken, rezgés megáll

F_k csillapítási erő pl. súrlódás, közegellenállás

most: $F_k \sim -v$ → pl. viszkozitás, mozgó mágnes okozta örvényáramos csillapítás

$F_k = -kv$

Mozgásegyenlet $m \cdot a_x = -Dx - k v_x$

$$a_x + \frac{k}{m} v_x + \frac{D}{m} x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{k}{m} = 2\beta$$

$\frac{D}{m} = \omega_0^2$ ↑ rezgésre jell. $[\omega_0] = \frac{1}{s}$

$\frac{k}{m} = 2\beta$ ↑ csillapításra jellemző mennyiség $[\beta] = \frac{1}{s}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Próbafv: $e^{\lambda t} = x(t)$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$

Behelyettesítve: $\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)\, e^{\lambda t} = 0 \qquad e^{\lambda t} \neq 0 \quad (e^{\lambda t} > 0)$$

Egyszerűsítés után: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

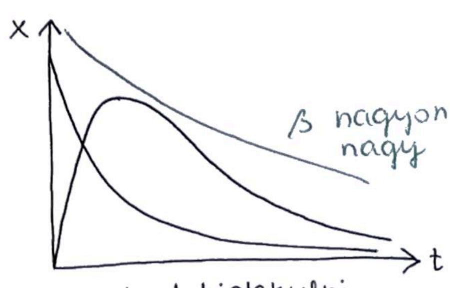
ha $\beta > \omega_0$ túlcsillapított (1)
$\quad\beta = \omega_0$ határeset (2)
$\quad\beta < \omega_0$ gyengén csillapított (3)

(1) $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta_1$ $\qquad \beta_1 = \beta - \sqrt{}$

$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta_2$ $\qquad \beta_2 = \beta + \sqrt{}$

$$x(t) = A_1 e^{-\beta_1 t} + A_2 e^{-\beta_2 t}$$

↑ kezdeti feltételek határozzák meg



nem tud kialakulni rezgés!

(2) határeset: speciális

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$

$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} + A' \cdot t \cdot e^{-\beta t}$

még éppen nem jön létre rezgés, egyensúly itt áll be a leggyorsabban

(3) Csillapított rezgés

Akkor jön létre rezgés, ha $\beta < \omega_0$

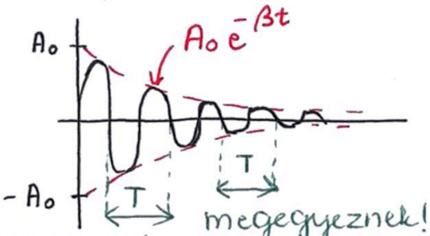
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta + i\omega' \\ \lambda_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta - i\omega' \end{aligned}\right\} \text{komplex mennyiség} \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta + i\omega')t} + A_2 e^{(-\beta - i\omega')t} = A_1 e^{-\beta t} e^{i\omega' t} + A_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega' t} =$$

$$= e^{-\beta t}\left[\frac{A_1 + A_2}{2}\left(e^{i\omega' t} + e^{i\omega' t}\right) + \frac{A_1 - A_2}{2}\left(e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}\right)\right] =$$

$$= e^{-\beta t}\left[(A_1 + A_2)\left(\frac{e^{i\omega' t} + e^{-i\omega' t}}{2}\right) + (A_1 - A_2) i \left(\frac{e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}}{2}\right)\right] = e^{-\beta t}\left[B_1 \cos\omega' t + B_2 \sin\omega' t\right] =$$

$$= \underbrace{A_0 e^{-\beta t}}_{A(t)} \cdot \sin(\omega' t + \varphi_0)$$



$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$

ha $\beta \ll \omega_0$: (kis csillapítás)

$\beta^2 \lll \omega_0^2 \Rightarrow \omega' \approx \omega_0$

$\boxed{\text{Csillapítást jellemző mennyiségek:}}$

csillapítási hányados: $K = \dfrac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\beta T}$ dimenziótlan

logaritmikus dekrementum: $\Lambda = \ln K = \beta T$ — " —

teljes mechanikai energia: $E(t) = \frac{1}{2} D \left[A(t)\right]^2 = \underbrace{\frac{1}{2} D A_0^2}_{E_0} \cdot e^{-2\beta t} = E_0 \cdot e^{-2\beta T}$

$\uparrow$ $A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$

$\hookrightarrow \dfrac{dE(t)}{dt} = 2\beta E_0 e^{-2\beta t} = 2\beta E(t)$

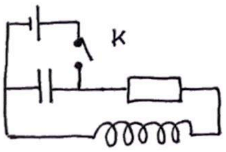
A fázisnak 1 rad megváltozása alatti energiaváltozás abszolútértéke:

$$|\Delta E_{1rad}| = \frac{T}{2\pi} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\omega'} 2\beta E \underset{\uparrow}{\approx} \frac{2\beta}{\omega_0} E$$

kis csillapítás: $\omega' \approx \omega_0$

$\Rightarrow$ jósági tényező: $Q = \dfrac{E}{|\Delta E_{1rad}|} = \dfrac{\omega_0}{2\beta} = \dfrac{m\omega_0}{k}$ dimenziótlan

$\boxed{\text{Analógia: RLC kör}}$

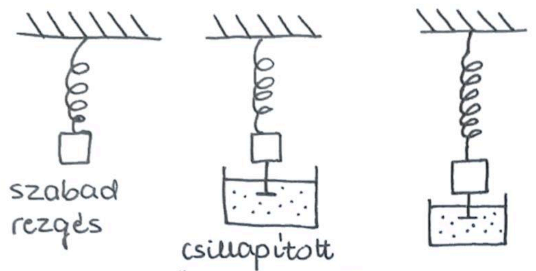


rezgőkör: nagy Q jósági tényező $\Rightarrow$ szelektívebb

csillapítás (β) nagyon kicsi

pl. rádióvevőknél

Kényszerrezgés, rezonancia



$\updownarrow$ periodikusan mozgatjuk $\frac{F_0}{D}$ amplitúdóval

Kényszererő: $F(t) = F_0 \cdot \sin \omega t$

Mozgás egyenlet: $ma = -Dx - kv + F_0 \sin \omega t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$ inhomogén diffegyenlet

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \qquad \frac{k}{m} = 2\beta, \quad \frac{D}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{F_0}{m} = f_0$$

Inhomogén egyenlet megoldása = homogén egyenl. megoldása + inhomogén egyenl. egy partikuláris megoldása (1 konkrét eset)

- Homogén egyenlet általános mo:
  $x_T(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega' t + \varphi_0)$ $\quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, A_0 és φ_0 a kezdeti feltételekből adódó állandók
  ↖ tranziens (= átmeneti) tag
- Inhomogén egyenlet egy partikuláris mo: rákényszerítünk egy ω körfrekvenciát
  $x_{A'}(t) = A \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ $\quad \varphi$: gerjesztéstől való eltérés
  ↖ állandósult tag
- Teljes általános megoldás: $x(t) = x_T(t) + x_{A'}(t)$

Az állandósult tagot, mint próbafüggvényt behelyettesítjük a diff.egy.-be

$$\frac{dx_{A'}}{dt} = A\omega \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{d^2x_{A'}}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t - \varphi) = f_0 \sin(\omega t)$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\left[\sin \omega t \cos\varphi - \cos \omega t \sin\varphi\right] + 2\beta A\omega\left[\cos \omega t \cos\varphi + \sin \omega t \sin\varphi\right] = f_0 \sin \omega t$$

Az egyenletnek minden időpillanatban teljesülnie kell

„$\sin \omega t$-s tagok": $A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi + 2\beta A\omega \sin\varphi = f_0$

„$\cos \omega t$-s tagok": $-A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + 2\beta A\omega \cos\varphi = 0$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

A két egyenletből: $/ \,\square^2 \;/ \oplus$

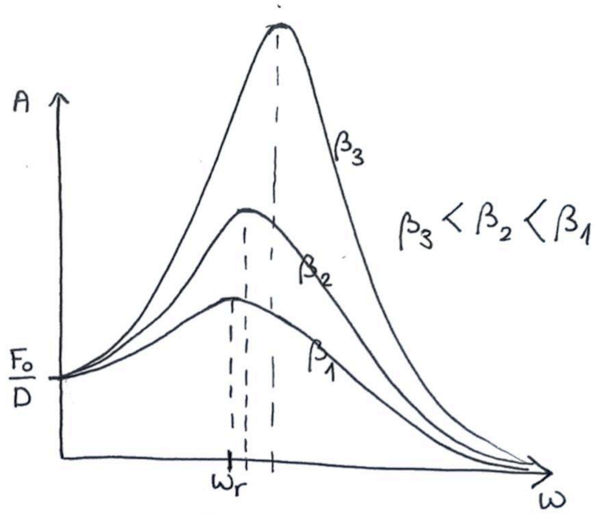
$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \omega^2 = f_0^2$$

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}} \qquad \boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

=> A próbafüggvény A, φ együtthatóit megkaptuk

Megj.: A és φ nem függ a kezdeti feltételektől, csak a rezgő rendszertől és a gerjesztéstől.

$\boxed{\text{Amplitúdó rezonancia}}$



$A(\omega=0) = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{D}$ ha a kényszer frekvenciája 0

$A(\infty) = \lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0$ nagyon nagy frekvencián

$\omega=0$ és $\omega=\infty$ között sokkal nagyobb lehet a rendszer amplitúdója a kényszerénél $\left(\frac{F_0}{D}\right)$

↓

ez a rezonancia

Ahol az amplitúdó maximális: rezonancia-körfrekvencia. $\omega_r = ?$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2}\frac{f_0}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{3/2}}\left(-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\beta^2\omega\right) = 0$$

↑ ahol $\frac{dA(\omega)}{d\omega}=0 \to \omega_r$ megkapható

$$4\cancel{\omega}(\omega_0^2-\omega^2) = 8\beta^2\cancel{\omega}$$
$$\omega_0^2-\omega^2 = 2\beta^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \quad \text{rezonancia-körfrekvencia}$$

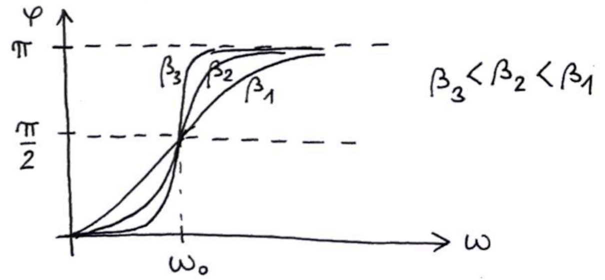
Maximális amplitúdó: $A(\omega_r) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2+2\beta^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4-8\beta^4+4\beta^2\omega_0^2}} =$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}} = \frac{f_0}{2\beta\omega'} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

↑ kis csillapítás

Megj.: A maximális amplitúdó annál nagyobb, minél kisebb a csillapítás (β)
Megj.: ω_r eltolódik β-től függően
Megj.: A görbe $A(0)=\frac{F_0}{D}$-től indul

Fázisviszonyok:

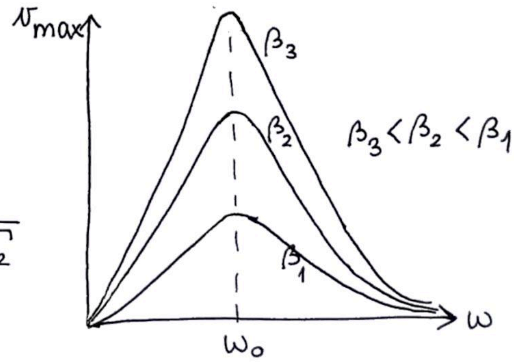


$\varphi(0) = 0$

$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2}$

$\varphi(\infty) = \lim_{\omega\to\infty}\varphi(\omega) = \pi$ → nagy frekvencián ellentétesen mozog

$\boxed{\text{Sebességrezonancia}}$



$$v(t) = \underbrace{A(\omega)\,\omega}_{v_{max}(\omega)} \cos(\omega t+\varphi)$$

$$v_{max}(\omega) = A(\omega)\omega = \frac{f_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^2}+4\beta^2}}$$

↑ sebességamplitúdó

Seb. amplitúdó maximuma: $\omega=\omega_0$ esetén

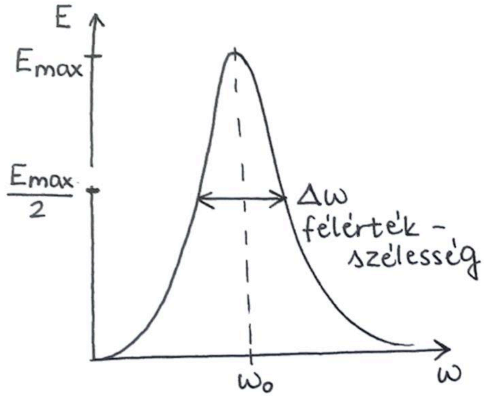
$$v_{max} = \frac{f_0}{2\beta}$$

Kényszerrezgés energiaviszonyai

mechanikai energia: $E(\omega) = \frac{1}{2} m v_{max}^2(\omega) = \dfrac{m f_0^2 \omega^2}{2\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]}$

maximuma az $\omega = \omega_0$ helyen:

$$E_{max} = \frac{m f_0^2 \cancel{\omega_0^2}}{2 \cdot 4 \cdot \cancel{\omega_0^2} \beta^2} = \frac{m f_0^2}{8\beta^2}$$



A görbe csúcsosságát a félértékszélességgel jellemezhetjük
Határozzuk meg $\Delta\omega$ - t!

$$E(\omega) = \frac{E_{max}}{2}$$

$$\frac{\cancel{m}\, \cancel{f_0^2}\, \omega^2}{2\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]} = \frac{\cancel{m}\, \cancel{f_0^2}}{16\beta^2}$$

$$16\,\omega^2\beta^2 = 2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 8\,\omega^2\beta^2$$

$$8\,\omega^2\beta^2 = 2\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2$$

$$4\,\omega^2\beta^2 = \omega_0^4 - 2\,\omega_0^2\omega^2 + \omega^4$$

$$\omega^4 - (2\omega_0^2 + 4\beta^2)\,\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{2\omega_0^2 + 4\beta^2 \pm \sqrt{(2\omega_0^2 + 4\beta^2)^2 - 4\omega_0^4}}{2} = \frac{2\omega_0^2 + 4\beta^2 \pm \sqrt{\cancel{4\omega_0^4} + 16\,\omega_0^2\beta^2 + 16\beta^4 - \cancel{4\omega_0^4}}}{2} =$$

$$= \omega_0^2 + 2\beta^2 \pm \sqrt{4\beta^2(\omega_0^2 + \beta^2)}$$

Kis csillapítás esetén: $\beta < \omega_0$ $\quad \beta^2 \ll \omega_0^2$

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \pm 2\beta\omega_0 = \omega_0^2\left(1 \pm \frac{2\beta}{\omega_0}\right)$$

$$\omega \approx \omega_0\left(1 \pm \frac{\beta}{\omega_0}\right) = \omega_0 \pm \beta$$

=> A félértékszélesség: $\Delta\omega = 2\beta$

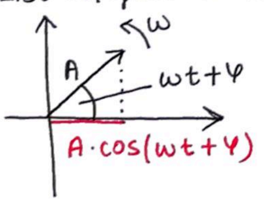
$\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = \dfrac{2\beta}{\omega_0} = \dfrac{1}{Q}$ a jósági tényező reciproka

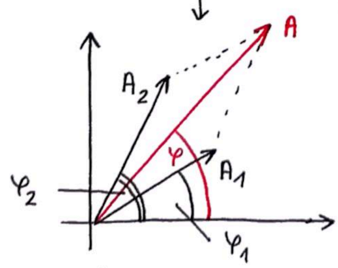
Szuperpozíció, rezgések összevetése, felbontása

Egyirányú rezgések összevetése

- Két azonos frekvenciájú rezgés összegzése: $\boxed{\omega_1 = \omega_2}$

fázist kifejező vektor: <u>fazor</u>





ω - val forgó koordináta-rendszerben

$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$|A_2 - A_1| \leq A \leq A_1 + A_2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

- Eltérő körfrekvenciájú rezgések $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$
  amplitúdó változik, minimum/maximum között ingadozik

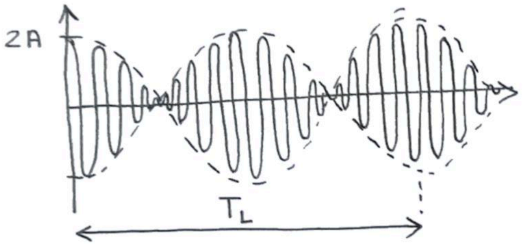
Spec. eset: $A_1 = A_2 = A$ $\quad x(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t) + A \cdot \cos(\omega_2 t) = A\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) =$
$\omega_1 \neq \omega_2$ $\quad = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$
$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

ha csak kicsit tér el a 2 körfr.: $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$

Ekkor: $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$

$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_L \quad (\ll \omega)$ lebegés körfrekvenciája
↓
Lassan változik az amplitúdó, harmonikus fv. szerint

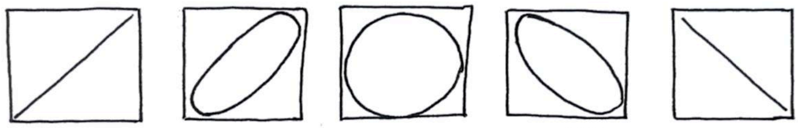
$\Rightarrow x(t) = 2A \cdot \cos(\omega_L t)\cos(\omega t)$



$T_L = \frac{2\pi}{\omega_L}$

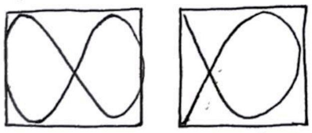
Merőleges rezgések összevetése

- Azonos frekvencia: $\boxed{\omega_1 = \omega_2}$
  $x(t) = A \cdot \cos\omega t$
  $y(t) = B \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
  $A = B$ esetben - - - - →



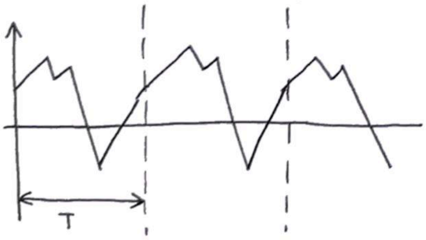
$\varphi = 0$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{4}$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \varphi = \pi$

- Különböző frekvencia: $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$
  ha a frekvenciák aránya kis egész számok arányával egyenlő: Lissajous-görbék



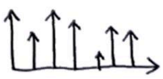
$\omega_1 : \omega_2$ $\quad$ 2:1, $\varphi = 0$ $\quad$ 3:2, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Rezgések felbontása

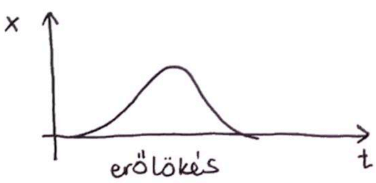


periodikus függvény: $x(t) = x(t+T)$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Fourier-felbontás:
$x(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \ldots + A_i \sin(i\omega t + \varphi_i) + \ldots$
↳ bármilyen periodikus jelalak felírható ilyen alakban: Fourier-sor
↳ periodikus fv: diszkrét spektrum

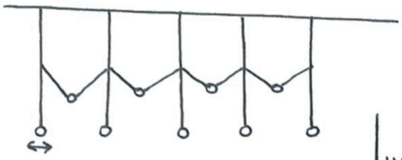


nem periodikus fv: Fourier-integrállal állítható elő $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
↳ frekvenciaspektruma folytonos

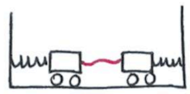


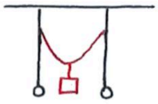
Fourier-transzformáció: időfv-ből frekvenciaspektrum → véges mérési pont: FFT

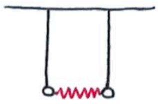
Csatolt rezgések

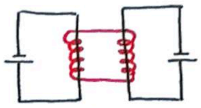


Átadódik a rezgés az egyik rendszerről a másikra.
Összeköttetés: csatolás

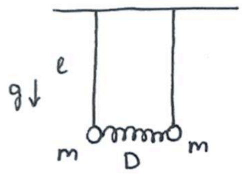


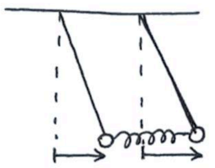






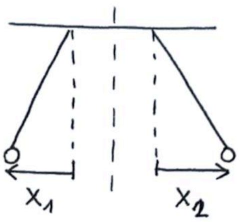
transzformátor





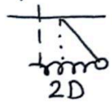
$x_1 = x_2$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
speciális módus



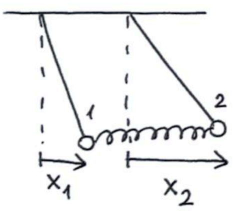
$x_1 = -x_2$
szimmetrikus $\rightarrow$ két oldal külön tárgyalható
$\hookrightarrow$ rugó fele: 2D rugóáll.

$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}$



Általánosan hogyan írható fel a mozgás?

- csatolatlan eset
  mozgásegyenlet: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x$ $(\sin\alpha \approx \alpha)$ $\rightarrow$ fonálinga esete
- csatolás:



elsőre ható erő: $F_1 = D(x_2 - x_1)$
másodikra: $F_2 = -F_1$
Mozgásegyenletek:

1: $m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x_1 + D(x_2 - x_1)$

2: $m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -m\frac{g}{l}x_2 - D(x_2 - x_1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x_1 + \frac{D}{m}(x_2 - x_1) \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x_2 - \frac{D}{m}(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\}$$
csatolt rendszerek, együtt kezeljük őket

Két egyenletet összeadjuk ill. kivonjuk egymásból:

$\oplus$ $\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l}(x_1+x_2)$

$\ominus$ $\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l}(x_1-x_2) - \frac{2D}{m}(x_1-x_2) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right)(x_1-x_2)$

új változók bevezetése:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1 \\ x_1 - x_2 &= y_2 \end{aligned}\right\}$$
A két (nem csatolt) diffegyenlet:

$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{g}{l}y_1$

$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right)y_2$

Ezek megoldása: $y_1(t) = B_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ $\quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$y_2(t) = B_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ $\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}$

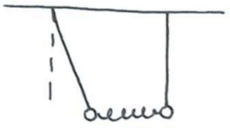
Eredeti változók:

$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$ $\boxed{x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$

$x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} \rightarrow$ $\boxed{x_2(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$

$\frac{B_1}{2} = A_1$

$\frac{B_2}{2} = A_2$

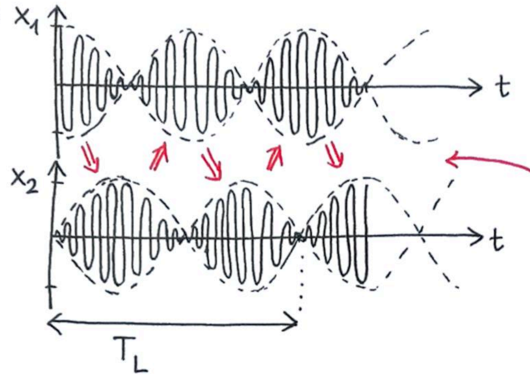


$v_1 = 0$
$v_2 = 0$
$x_1 = 2A$
$x_2 = 0$

$x_1(t) = A\cdot\cos(\omega_1 t) + A\cdot\cos(\omega_2 t)$
$x_2(t) = A\cdot\cos(\omega_1 t) - A\cos(\omega_2 t)$

gyenge csatolás: azaz $\frac{2D}{m} \ll \frac{g}{l}$

Ingák mozgása:

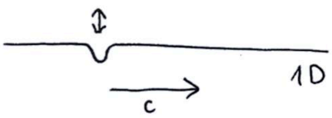


mindkét inga mozgása lebegés, negyed periódussal eltolódva egymáshoz képest

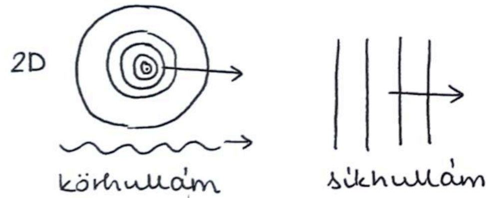
Csatolt rendszerek közti energiaátadás: T_L alatt kétszer oda-vissza

MECHANIKAI HULLÁMOK

transzverzális hullám:

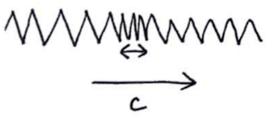


- elektromágn. hullámok; (fény)

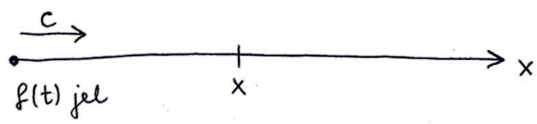


3D: gömb alakban terjed, gömbhullám
pl. hangszóró hangja

longitudinális hullám:



Hullámfüggvény

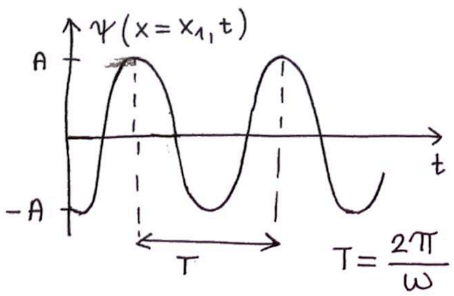


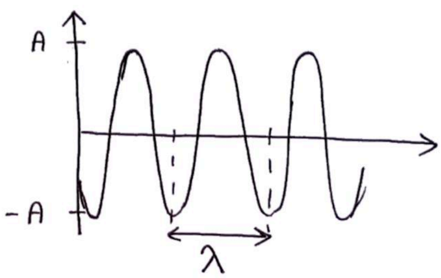
1D síkhullám, x irányban terjed
jel időfüggése: $f(t)$
hullámfüggvény: $\Psi(x,t)$
terjedési seb.: $c \rightarrow x$ helyre $\frac{x}{c}$ időkéséssel ér el

$\Psi(0,t) = f(t)$
$\Psi_{\rightarrow}(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$
$\Psi_{\leftarrow}(x,t) = f(t + \frac{x}{c})$ másik irányba haladás esetén

Harmonikus síkhullám 1D

$f(t) = A\cdot\cos(\omega t + \alpha)$
$\Psi(x,t) = A\cdot\cos\left(\omega(t - \frac{x}{c}) + \alpha\right)$ 1D harmonikus hullámfüggvény





$\frac{\omega}{c}\lambda = 2\pi$

$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c = T\cdot c$

Fázissebesség: $c = \frac{\lambda}{T}$

Cos fv argumentuma (<u>fázis</u>): $\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha$

$$\varphi = \omega t - \frac{\omega}{c} x + \alpha$$

$$\frac{\omega}{c} x = \omega t + \alpha - \varphi$$

$$x = c \cdot t + \frac{\alpha - \varphi}{\omega} \cdot c$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = c$ fázisseb.: azonos fázisú pontok terjedési sebessége

Periódusidő: T $[T] = s$

Körfrekvencia: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $[\omega] = \frac{1}{s}$

Frekvencia: $\nu = \frac{1}{T}$ $[\nu] = Hz$

Amplitúdó: A $[A] = m$

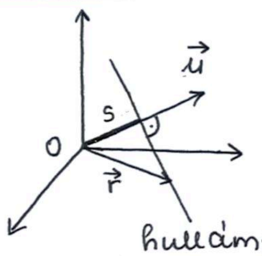
Hullámhossz: λ $[\lambda] = m$

Hullámszám: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $[k] = \frac{1}{m}$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{\lambda}{T}} = \frac{2\pi}{\lambda} = k \rightarrow c = \frac{\omega}{k}$$

Hullámfv másik alakja: $\Psi(x,t) = A \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \alpha\right) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$

$\boxed{\text{Térbeli síkhullám}}$



hullámfront
(terj. síkra merőleges)

$$\Psi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - k \cdot s + \alpha) =$$

$$= A \cdot \cos(\omega t - k\,\vec{u} \cdot \vec{r} + \alpha) = A\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$$

3D síkhullám

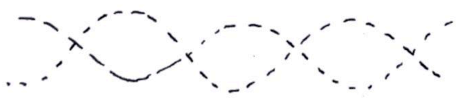
$$|\vec{k}| = k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\vec{k}$ hullámszám vektor iránya: terjedés iránya

$\boxed{\text{Csoportsebesség, diszperzió}}$

hullámcsomag

Valódi hullámokat hullámcsomagokkal írhatjuk le



a burkoló a lebegésnél tapasztaltakat idézi

A belső hullámok a csomaghoz képest elmozdulhatnak (van hozzá viszonyított sebességük)

↓

Diszperzió: $c = c(\omega)$

Közelítő leírás:

$\Psi_1(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$ $\quad \omega' - \omega = \Delta\omega \ll \omega$ $\quad \omega' \approx \omega$

$\Psi_2(x,t) = A \cdot \cos(\omega' t - k' x)$ $\quad k' - k = \Delta k \ll k$ $\quad k' \approx k$

Ezek összege adja a valós hullámfv-t:

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2}t - \frac{k' - k}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}t - \frac{k' + k}{2}x\right) \approx$$

$$\approx \underbrace{2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)}_{A(t,x)} \cos(\omega t - kx)$$

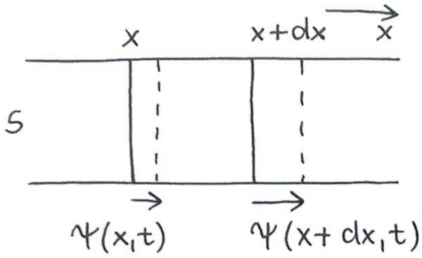
$A(t,x)$: az amplitúdó változás is hullámfv.

Csoportsebesség:

$$c_g = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \boxed{c_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

$\omega(k)$: diszperziós reláció $\quad \omega = k \cdot c(k) \rightarrow c_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k \cdot \frac{dc}{dk}$

Hullámterjedés rugalmas rúdban



S: keresztmetszet
rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullám
$\uparrow$ 1D

x és x+dx közötti kis darabra a Newton II: $dF = dm \cdot a$ (1)

→ kis darab tömege: $dm = \rho \cdot S \cdot dx$
→ gyorsulása: $a = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$
→ kis darabra ható dF = ?

$$\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{\psi(x+dx,t) - \psi(x,t)}{dx} = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$ ε: deformáció

rúdbeli feszítőerő: $F = S \cdot E \cdot \varepsilon = SE \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$ E: Young-modulus

$$\Rightarrow dF = F(x+dx) - F(x) = \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} \cdot dx = SE \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} dx$$

(1)-ből: $\cancel{S}E \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \cancel{dx} = \rho \cdot \cancel{S} \cdot \cancel{dx} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$

$$\boxed{\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}}$$

hullámegyenlet
másodrendű, lineáris, homogén diff.egy.

Ennek megoldását az alábbi alakban keressük:
$\psi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$

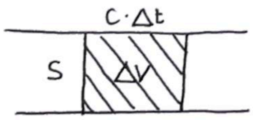
Ezt behelyettesítve az egyenletbe:
$\cancel{-}\frac{E}{\rho} \cancel{A} k^2 \cancel{\cos(\omega t - kx + \alpha)} = \cancel{-A}\omega^2 \cancel{\cos(\omega t - kx + \alpha)}$

$\frac{E}{\rho} k^2 = \omega^2 \rightarrow \quad \frac{E}{\rho} = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2$

A fázissebesség: $\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$ ezt a közeg tulajdonságai (Young-modulus, sűrűség) határozzák meg

Energiaterjedés hullámban

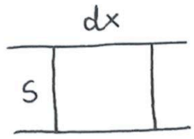
Energiajelölés: W
Energiaáram: $\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ egys. idő alatt mennyi energia áramlik át $[\Phi] = \frac{J}{s} = W$
Energiaáramsűrűség: $I = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S}$ egys. idő alatt egys. ΔS felületen átáramló energia, hullám intenzitása $[I] = W/m^2$



$\Delta V = S \cdot c \cdot \Delta t$
$\Delta W = w \cdot \Delta V = w \cdot S \cdot c \cdot \Delta t$ w: energiasűrűség
$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t} = w \cdot S \cdot c$
$I = \frac{\Phi}{S} = w \cdot c$

w: energiasűrűség: egys. térfogatban található energia $\left([w] = \frac{J}{m^3}\right)$ $w = \frac{\Delta W}{\Delta V}$

$w = ?$



$$\Delta W = \Delta W_{mozg} + \Delta W_{h}$$

$$\Delta W_{mozg} = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \varrho \cdot \Delta V \cdot v^2 = \frac{1}{2} \varrho \Delta V \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \right)^2$$

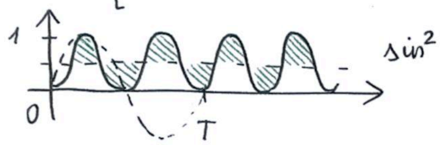
$$\Delta W_{h} = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta V = \frac{1}{2} E \Delta V \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} \right)^2$$

$$\Delta W = \frac{1}{2} \varrho \Delta V \left\{ \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right\} \qquad \left(c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \rightarrow E = \varrho c^2 \right)$$

$$w = \frac{1}{2} \varrho \left\{ \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right\}$$

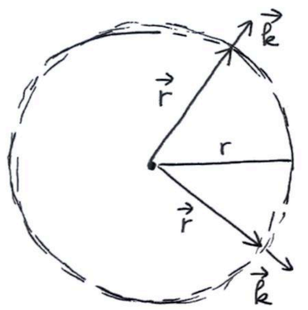
Harmonikus haladóhullám: $\Psi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$

$$w = \frac{1}{2} \varrho \left\{ A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + c^2 A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \right\} \underset{c^2k^2 = \omega^2}{=} \varrho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) = w(x,t)$$



Átlagos energiasűrűség: $\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t,x)\, dt = \frac{1}{2} \varrho A^2 \omega^2$

Intenzitás: $I = \frac{1}{2} \varrho A^2 \omega^2 c \longrightarrow \boxed{I \sim A^2}$ amplitúdó négyzetével arányos



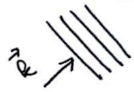
térben: gömb felülete: $S = 4r^2\pi$

$I = \frac{\Phi}{S} \rightarrow I \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow A \sim \frac{1}{r}$

$\vec{k}$ sugárirányú!

$\Rightarrow$ gömbhullám: $\Psi(\vec{r},t) = \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - kr + \alpha)$

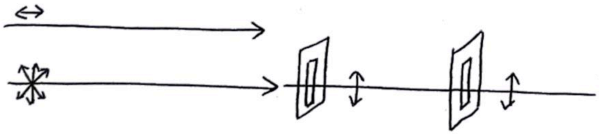
3D síkhullám: $\Psi(\vec{r},t) = A \cdot \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$



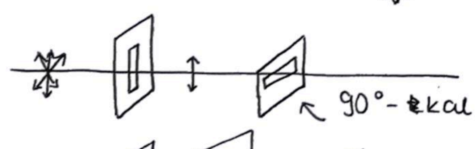
$\boxed{\text{Polarizáció}}$

longitudinális hullám:

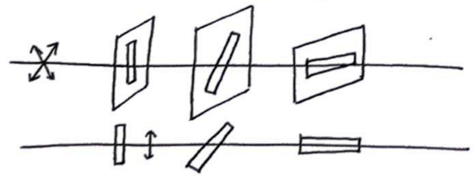
transzverzális — " — :



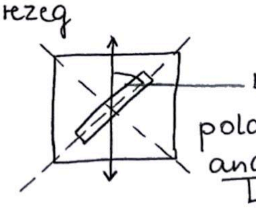
lineárisan polarizált hullám



90°-kal elforgatva már nem rezeg

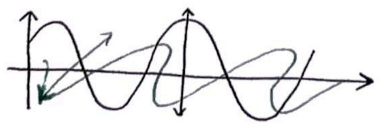


$\frac{\pi}{4}$ az intenzitás



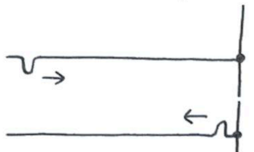
polarizátor / analizátor
↳ polarizációt mérhetünk vele

Cirkulárisan poláros: rezgési sík egyenletesen forog

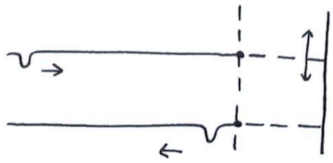


Hullámok visszaverődése és törése

Rögzített végről: szabad végről:



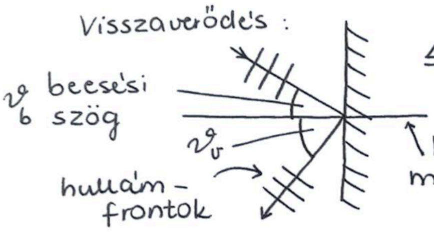
fázisugrás



nincs fázisugrás

1D

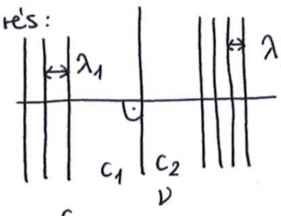
Visszaverődés:



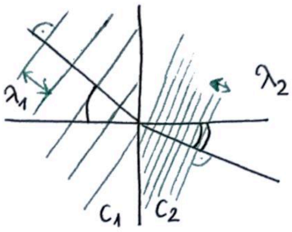
$\angle$ 2D

$\vartheta_b = \vartheta_v$

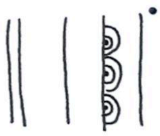
Törés:



$\lambda = \frac{c}{\nu}$



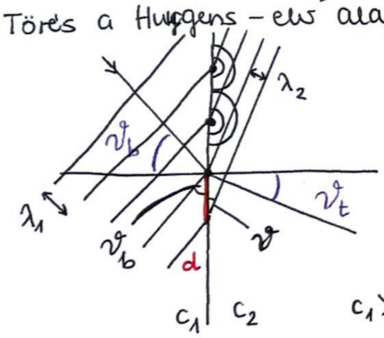
Huygens-elv:
- a hullámtér minden pontja elemi gömbhullámforrás
- a kialakuló hullám ezek közös burkolója



Elhajlás:

a hullám behatol az árnyéktérbe is

Törés a Huygens-elv alapján:



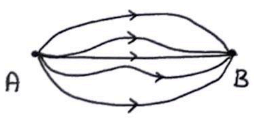
$c_1 > c_2$

$$\lambda_1 = d \cdot \sin \vartheta_b$$
$$\lambda_2 = d \cdot \sin \vartheta_t$$
$$\frac{\sin \vartheta_b}{\sin \vartheta_t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}$$

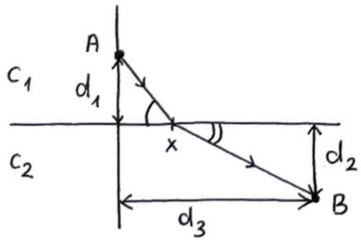
Ha $c_1 > c_2$: részben visszaverődik, részben megtörik

Ha $c_2 > c_1$ Teljes visszaverődés lehetséges $\rightarrow$ üvegszál

Fermat-elv: A hullám a rögzített A és B pontok között azon a pályán van, ahol a terjedési időnek (τ) szélsőértéke van



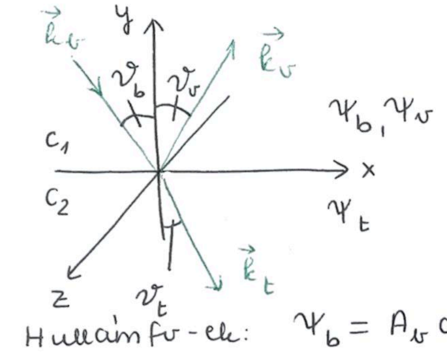
$$\tau = \int_A^B \frac{1}{c}\, ds$$



$$\tau = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}}{c_2}$$

Szélsőérték-keresés: $\frac{d\tau}{dx} = 0$ egyenlet megoldásával

Visszaverődés és törés a hullámfüggvény segítségével



xz sík a határfelület

$\Psi_b + \Psi_v = \Psi_t$ a határfelületen

$\vec{k}_b$ az xy síkban van

$\left.\begin{matrix}\vec{k}_v \\ \vec{k}_t\end{matrix}\right\}$ semmit nem feltételezünk róluk

Hullámfv-ek:

$$\Psi_b = A_b \cos(\omega t - \vec{k}_b \vec{r})$$
$$\Psi_v = A_v \cos(\omega t - \vec{k}_v \vec{r})$$
$$\Psi_t = A_t \cos(\omega t - \vec{k}_t \vec{r})$$

Határfelület: $\vec{r} \in$ xz sík

$\Psi_b(t, \vec{r}) + \Psi_v(t, \vec{r}) = \Psi_t(t, \vec{r})$ ez csak akkor teljesül, ha:

a három fázis megegyezik: $\omega t - \vec{k}_b \vec{r} = \omega t - \vec{k}_v \vec{r} = \omega t - \vec{k}_t \vec{r}$

Vektorok koordinátákkal felírva:

$\vec{r}$: $(x, 0, z)$

$\vec{k}_b$: $(k_{bx}, k_{by}, 0)$

$\vec{k}_v$: (k_{vx}, k_{vy}, k_{vz})

$\vec{k}_t$: (k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})

$$\vec{k}_b \vec{r} = \vec{k}_v \vec{r} = \vec{k}_t \vec{r}$$
$$k_{bx} x = k_{vx} \cdot x + k_{vz} \cdot z$$
$$k_{bx} \cdot x = k_{tx} \cdot x + k_{tz} \cdot z$$

$\Rightarrow \boxed{k_{vz} = k_{tz} = 0}$ komplanáris (egy síkban vannak)

$k_{bx} = k_{vx}$ $\quad |\vec{k}_b| \cdot \sin\vartheta_b = |\vec{k}_v| \cdot \sin\vartheta_v$

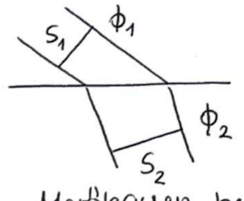
$k_{bx} = k_{tx}$ $\quad |\vec{k}_b| \cdot \sin\vartheta_b = |\vec{k}_t| \cdot \sin\vartheta_t$

$c = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{c}$ $\quad \frac{\omega}{c_1} = |\vec{k}_b| = |\vec{k}_v| \rightarrow \boxed{\vartheta_b = \vartheta_v}$

$\frac{\omega}{c_2} = |\vec{k}_t| \rightarrow \frac{\omega}{c_1} \cdot \sin\vartheta_b = \frac{\omega}{c_2} \cdot \sin\vartheta_t$

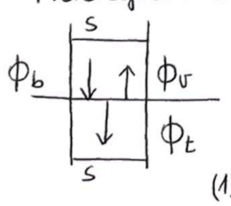
$$\boxed{\frac{\sin\vartheta_b}{\sin\vartheta_t} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}}$$

Intenzitás vizsgálata hullámfüggvénnyel:



$$\Phi_1 = \Phi_2$$
$$I_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}, \quad I_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}$$

Merőlegesen beeső longitudinális hullámok esetén:



$\Phi_b = \Phi_v + \Phi_t \longrightarrow I_b = I_v + I_t$ (1) $\quad$ energiamegmaradás

$\Psi_b + \Psi_v = \Psi_t$ (2)

(1): $\varrho_1 c_1 A_b^2 = \varrho_1 c_1 A_v^2 + \varrho_2 c_2 A_t^2$ $\quad \left(I \sim A^2: \quad I = \frac{1}{2} \varrho c \omega^2 A^2 \right)$

(2): $A_b + A_v = A_t$

$\varrho_1 c_1 (A_b - A_v)\cancel{(A_b + A_v)} = \varrho_2 c_2 A_t^{\cancel{2}}$

$\varrho_1 c_1 (A_b - A_v) = \varrho_2 c_2 (A_b + A_v)$

$(\varrho_1 c_1 - \varrho_2 c_2) A_b = (\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2) A_v \rightarrow A_v = \frac{\varrho_1 c_1 - \varrho_2 c_2}{\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2} A_b$

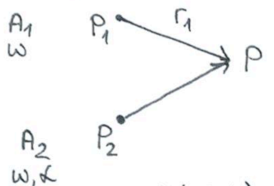
$A_t = A_b + A_v = \frac{2 \varrho_1 c_1}{\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2} A_b$

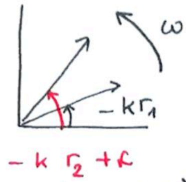
$$I_v = \frac{(\varrho_1 c_1 - \varrho_2 c_2)^2}{(\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2)^2} I_b$$

$$I_t = \frac{4 \varrho_2 c_2 \varrho_1 c_1}{(\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2)^2} I_b$$

Interferencia

két pontforrás





fáziskülönbség

$$\Psi(P,t) = \Psi(r_1,t) + \Psi(r_2,t) = A_1 \cos(\omega t - k r_1) + A_2 \cos(\omega t - k r_2 + \alpha)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(k\cdot(r_1 - r_2) + \alpha\right)$$

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$$

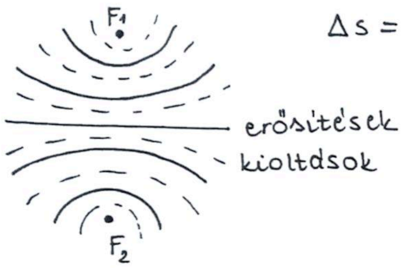
$A_1 = A_2 = A_0$ és $\alpha = 0$. Ekkor: $A^2 = A_0^2\left(1 + \cos\left(k(r_1 - r_2)\right)\right)$

Maximális erősítés: ennek a maximumánál: $k(r_1 - r_2) = 2\pi n$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

$$\Delta s = r_1 - r_2 = \frac{2\pi}{k}\cdot n = n\lambda$$

Minimum: kioltás: $k(r_1 - r_2) = \pi(2n+1)$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

$$\Delta s = \frac{\lambda}{2}(2n+1)$$



F_1, F_2 : pontforrás (azonos fázisú)

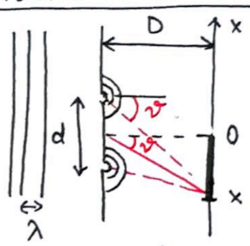
Koherencia

2 hullám koherens, ha: $\alpha(t)$ időben (közel) állandó

2 hullám inkoherens, ha: $\alpha(t)$ időben gyorsan változik

koherenciahossz: ez az a távolság, melynek megtétele után is stabil a fáziskülönbség

Intenzitáseloszlás

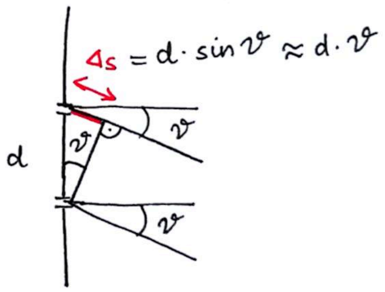


$d \ll D$ PONTFORRÁSTÓL TÁVOL

$x \ll D$

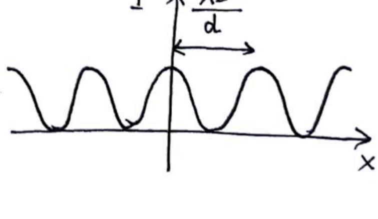
$\vartheta \ll 1 \Rightarrow \vartheta \approx \sin\vartheta \approx \mathrm{tg}\,\vartheta$

$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{x}{D} \approx \vartheta$



kétrés kísérlet, útkülönbség: $\Delta s = \frac{xd}{D} = n\cdot\lambda$ erősítésnél

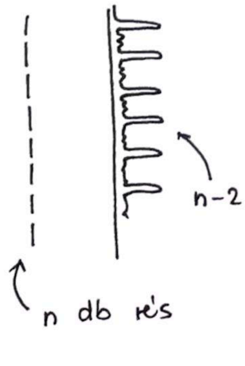
$$x = n\cdot\frac{\lambda D}{d}$$

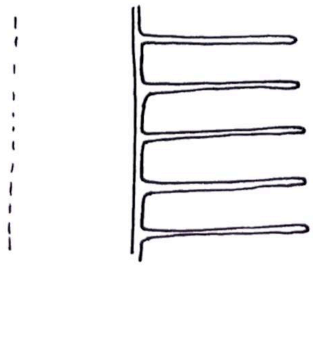


$I_0 \sim A_0^2$

$I(x) \sim A^2(x)$

$$I = 2\cdot I_0\left(1 + \cos(k\cdot\Delta s)\right) = 4\cdot I_0\cdot\cos^2\left(\frac{k\Delta s}{2}\right) = 4\cdot I_0\cos^2\left(\frac{kxd}{2D}\right) =$$
$$= 4 I_0 \cos^2\left(\frac{x d\pi}{\lambda D}\right)$$





$\boxed{\text{Huygens - Fresnel - elv}}$ – Huygens - elv továbbfejlesztése

- minden pont pontforrás
- a kialakuló hullámkép a hullámok interferenciaképe

$\Psi_{\leftarrow}(x,t) = A \cdot \sin(\omega t + kx)$

$\Psi_{\rightarrow}(x,t) = A' \cdot \sin(\omega t - kx + \kappa)$

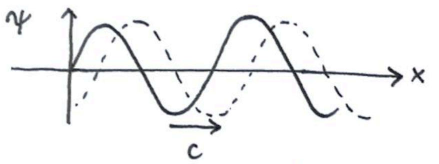
$\Psi(x,t) = \Psi_{\leftarrow}(x,t) + \Psi_{\rightarrow}(x,t)$

$\Psi(x=0,t) = 0 \longrightarrow A' = -A \qquad \kappa = 0$

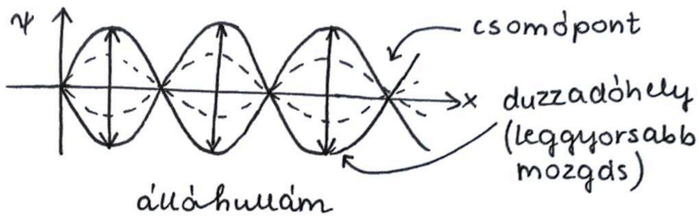
$(A' = A \qquad \kappa = \pi)$

$\Rightarrow \Psi(x,t) = A \cdot \sin(\omega t + kx) - A \cdot \sin(\omega t + kx) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$

Tehát két haladó hullám szuperpozíciója egy (az interferenciájukból adódó) <u>állóhullám</u>



haladó hullám



állóhullám

$\boxed{\text{Hullámterjedés gázban}}$

Ismétlés: 1D hullámegyenlet: $c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ általános

c^2: közegtől függ: $c^2 = \frac{E}{\varrho}$ rugalmas rúd, longitud. ~

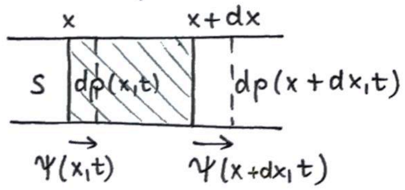
$c^2 = \frac{G}{\varrho}$ rugalmas rúd, torziós ~

Gázban terjedő 1D síkhullám:

<u>adiabatikus</u> összenyomódás $\Rightarrow dp(x,t)$ nyomástöbblet (egyensúlyi állapottól eltérés)

$\downarrow$

nincs ideje leadni a hőt



N.II: $dF = dm \cdot a$ $\qquad \varrho$: sűrűség

$dm = S \cdot \varrho \cdot dx$ $\qquad p$: nyomás

$a = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$

$F(x,t) = -S\, dp(x,t)$

adiabatikus folyamat:

$p \cdot V^{\kappa} = \text{áll.}$

$p = \text{áll.} \cdot V^{-\kappa}$

$\frac{dp}{p} = -\kappa \cdot \frac{dV}{V} \rightarrow dp = -\kappa \cdot p \frac{dV}{V} = -\kappa p \frac{\cancel{S}(\Psi(x+dx,t) - \Psi(x,t))}{\cancel{S} \cdot dx} = -\kappa p \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$

$F(x,t) = +S \kappa p \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$

$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = S \cdot \kappa p \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} dx$

$\Rightarrow$ N.II-be visszahelyettesítve:

$\cancel{S} \kappa p \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \cancel{dx} = \cancel{S} \cdot \varrho \cdot \cancel{dx} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$

$\boxed{\frac{\kappa p}{\varrho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$ hullámegyenlet gázban longitud. sík ~ $\rightarrow \boxed{c^2 = \frac{\kappa p}{\varrho}}$

Ideális gáz állapotegyenlete: $pV = \frac{m}{M} RT$

$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$

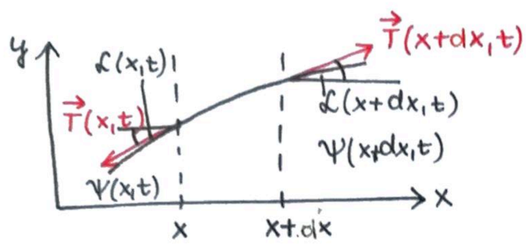
$\Big\} \; c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\kappa R \cdot T}{M}}$

ha alacsonyabb a közeg moláris tömege, akkor c nagyobb

$\Downarrow$

Héliumban gyorsabb a hangseb.

Transzverzális hullám megfeszített húrban



$\vec{T}$: feszítőerő: érintőirányú
kitérés kicsi
S: keresztmetszet
$|\vec{T}| \approx T$ nagysága kb. állandó (α kicsi)

Húr kis darabjára mozgásegyenlet: $dF_y = dm \cdot a_y$

$dm = S \cdot \varrho \cdot dx$

$a_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ $\qquad tg\alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ hullámfv deriváltja (meredekség)

$$dF_y = T_y(x+dx,t) - T_y(x,t) = T\{\sin(\alpha(x+dx,t)) - \sin(\alpha(x,t))\} \approx T\{tg(\alpha(x+dx,t)) - tg(\alpha(x,t))\} =$$
$$= T\left(\frac{tg(\alpha(x+dx,t)) - tg(\alpha(x,t))}{dx}\right) \cdot dx = T \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} dx$$

$$\Rightarrow T \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cancel{dx} = S \cdot \varrho \cancel{dx} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{T}{S \cdot \varrho} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

$S \cdot \varrho = \mu$ lineáris sűrűség $[\mu] = \frac{kg}{m}$

$c^2 = \frac{T}{\mu}$ húrban haladó transzverzális hullámra

Hullámegyenlet általános alakja

Általános 3D hullámegyenlet: $c^2\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$

Hullámfv: $\Psi(x,y,z,t)$

$$\boxed{c^2 \Delta \Psi = \ddot{\Psi}}$$

Ált. 3D hull. egy.-nek az alábbiak is megoldásai:

- 3D síkhullám: $\Psi(\vec{r},t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$
  $\vec{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{k}$
- gömbhullám: $\Psi(x,y,z,t) = \frac{A_0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cos\left(\omega t - k\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \alpha\right)$

kezdeti feltételektől függ, hogy mi a hullámegy. megoldása

Elektromágneses hullám vákuumban

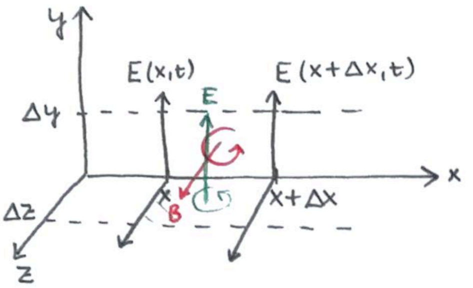
Maxwell-egyenletek:

$$\sum_{A_0} \vec{E}\Delta\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{fluxus zárt felületre}$$

$$\sum_{A_0} \vec{B}\Delta\vec{A} = 0$$

$$\sum_{g_0} \vec{E}\Delta\vec{s} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{zárt görbére} \qquad (1)$$

$$\sum_{g_0} \vec{B}\Delta\vec{s} = \underbrace{\cancel{\mu_0 I}}_{\text{vákuum miatt 0}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (2)$$



$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\downarrow$$

① alapján

$$E(x+\Delta x,t)\cdot \Delta y - E(x,t)\cdot \Delta y = -\frac{\Delta B(x,t)\,\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad ③$$

② alapján

$$B(x,t)\Delta z - B(x+\Delta x,t)\Delta z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t}\Delta x \Delta z$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \qquad ④$$

③-ból: $\partial/\partial x$ $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}$, ④-ből $\partial/\partial t$: $-\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Kettőt összevetve: $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$ elektromágneses hullámra vákuumban

Állóhullámok

Hullámegyenlet: $c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$

haladó hullám megoldás: $\Psi_{\rightarrow}(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$ $\leftarrow$ $+$

állóhullám alakú megoldás: $\Psi(x,t) = \varphi(x)\cos(\omega t + \alpha)$

$\uparrow$ x függő amplitúdó

Utóbbit behelyettesítve a hullámegyenletbe:

$$c^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos(\omega t + \alpha) = -\varphi(x)\,\omega^2 \cos(\omega t + \alpha)$$

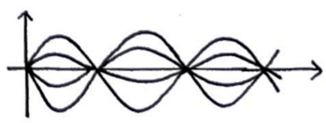
$$\left(c^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \omega^2 \varphi\right)\cos(\omega t + \alpha) = 0$$

$$c^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \omega^2 \varphi = 0$$

$$c^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi\right) = 0 \qquad /:c^2 \quad (\text{mert } c^2 \neq 0)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0$$ harmonikus rezgőmozgás diffegyenlete

↳ Ált mo: $\varphi(x) = A \cdot \sin(kx + \beta)$



⇒ Állóhullám általános mo: $\Psi(x,t) = A \cdot \sin(kx+\beta)\cos(\omega t + \alpha)$

A konkrét esetekben megvalósuló alakot a peremfeltételekből kaphatjuk.

1. Állóhullám kifeszített húron

↳ transzverzális hullám

Két vége rögzített, ott 0 a kitérés: $\underbrace{① \ \varphi(0) = 0 \ \text{és} \ \varphi(L) = 0 \ ②}_{\text{Peremfeltételek}}$

①-ből $A \cdot \sin(\underbrace{k \cdot x}_{0} + \beta) = 0 \rightarrow \beta = 0$

②-ből $A \cdot \sin(k \cdot L) = 0 \rightarrow k \cdot L = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^+ \rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$

Azaz a hullámszám csak diszkrét értékeket vehet fel

Emiatt a hullámhossz, körfrekvencia, frekvencia is adott:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{1}{n} 2L$$

n = 1
n = 2
n = 3

$$c = \frac{\omega}{k} \rightarrow \omega_n = c \cdot k_n \qquad \omega_n = c \cdot \frac{n\pi}{L}$$

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \cdot \frac{c}{2L}$$ $\longrightarrow$ n = 1 eset: legalacsonyabb frekvencia ≡ alapfrekvencia

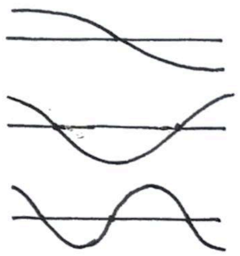
Hullámfv: $\Psi_n(x,t) = A_n \cdot \sin(k_n x) \cdot \cos(\omega_n t + \alpha_n)$

A_n, α_n: időbeli kezdeti feltételek határozzák meg őket

A húron kialakuló hullám a Ψ_n hullámfüggvények szuperpozíciója:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x,t)$$

2. Mindkét végén nyitott légoszlopban

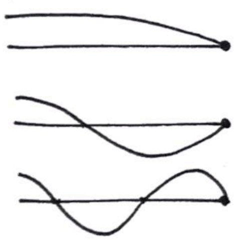


n = 1

n = 2

n = 3

3. Egyik végén rögzített légoszlopban



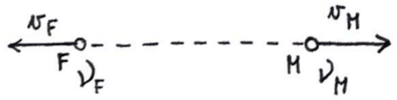
$\lambda_1 = 4L$ $\quad \nu_1$

$\lambda_2 = \frac{4}{3} L$ $\quad 3\nu_1$

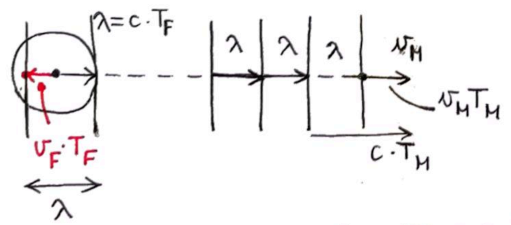
$\lambda_3 = \frac{4}{5} L$ $\quad 5\nu_1$

← alaphang páratlan számú többszörösei a frekvenciák

Doppler - effektus



F: forrás, M: megfigyelő
távolodás legyen pozitív



speciális koordinátarendszer: közeghez rögzített

$$\lambda = (c + v_F) T_F$$

$$T_F = \frac{1}{\nu_F}$$

$$\lambda + v_M T_M = c \cdot T_M$$

$$\lambda = (c - v_M) T_M$$

$$T_M = \frac{1}{\nu_M}$$

$$(c + v_F) T_F = (c - v_M) T_M$$

$$T_M = \frac{c + v_F}{c - v_M} T_F$$

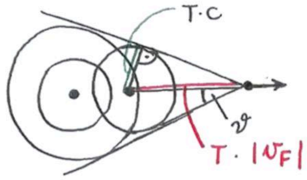
$$\boxed{\nu_M = \frac{c - v_M}{c + v_F} \nu_F}$$

Azaz a megfigyelő által érzékelt frekvencia eltér a forrás által kiadottól.

$v_M > c$: nem ér utol a hullám

$-v_F > c$: forrás hamarabb odaér a megfigyelőhöz, mint a hullám

pl.: szuperszonikus repülő, lövedék



$$\sin\vartheta = \frac{T\cdot c}{T\cdot|v_F|}$$

$|v_F| > c$

hangrobbanás → Mach szám : $M = \frac{|v_F|}{c}$

Közelítés: $\frac{|v_M|}{c} \ll 1$, $\frac{|v_F|}{c} \ll 1$

$$\nu_M = \frac{c-v_M}{c+v_F}\,\nu_F = \frac{1-\frac{v_M}{c}}{1+\frac{v_F}{c}}\,\nu_F \approx \left(1-\frac{v_M+v_F}{c}\right)\nu_F = \left(1-\frac{v}{c}\right)\nu_F$$

ahol $v = v_M + v_F$ relatív sebesség

$\boxed{\text{Relativisztikus eset}}$ pl. fény (elektromágneses hullám) vákuumban

$v_F \leftarrow \nu_F$ $\qquad$ $\nu_M \rightarrow v_M$

tetsz. K koordinátarendszer

fény terjedési sebessége : c

T_F, T_M : saját vonatkoztatási rendszerbeli periódusidő

T_F^K, T_M^K : K-beli periódusidő

$$T_F = \frac{1}{\nu_F} \qquad T_M = \frac{1}{\nu_M}$$

$$T_F^K = \frac{T_F}{\sqrt{1-\frac{v_F^2}{c^2}}} \qquad T_M^K = \frac{T_M}{\sqrt{1-\frac{v_M^2}{c^2}}}$$

$$\underbrace{\lambda^K = (c+v_F)T_F^K \qquad \lambda^K = (c-v_M)T_M^K}$$

$$\nu_M = \frac{c-v_M}{c+v_F}\,\frac{\sqrt{1-\frac{v_F^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_M^2}{c^2}}}\,\nu_F$$

Relativisztikus Doppler-effektus

$$v = \frac{v_M+v_F}{1+\frac{v_M v_F}{c^2}} \rightarrow \boxed{\nu_M = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\nu_F}$$

$v \ll c$: klasszikust kapjuk vissza:

$$\nu_M = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,\nu_F = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\,\nu_F \approx \left(1-\frac{v}{c}\right)\nu_F$$

Lehet-e fényrobbanás?:

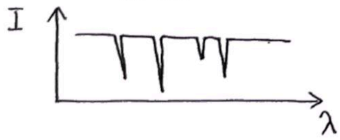
Anyagban igen, vákuumban nem.

Anyagban: proton/elektron mehet gyorsabban az adott helyi fénysebességnél → például egy atomreaktorban

Doppler-effektus használata :

nagy égitestek sebességének, távolságának mérése

- szögkülönbség
- ismert abszolút fényességű jellegzetes csillag
- fény felbontása: Fourier-analízis : bizonyos frekvenciák értéke alacsony vagy hiányoznak a spektrumból, így beazonosítható, hogy melyik elemhez tartozik a hullámhossz



Távoli, nagy sebességgel távolodó csillag színképe nagy λ (vörös) felé tolódik: vörös eltolódás

Tapasztalat: minden távolodik, ami messzebb van, az gyorsabban

Hang és fény

$\Psi(\vec{r},t) = A \cdot \sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha\right)$ térbeli síkhullám

Ezek szuperpozíciója terjed a térben

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ $T = \frac{1}{\nu}$ $[\nu] = Hz$ ν: frekvencia

$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ c: terjedési sebesség

A: amplitúdó, I: intenzitás (hullám által szállított egységnyi energia)

$I \sim A^2$ $[I] = W/m^2$

HANG

ν: hangmagasság

$20 Hz \leq \nu \leq 20 kHz$ 10 oktáv ← hallható hang

alacsonyabb: infrahang

magasabb: ultrahang

érzékelése: logaritmikus skála

hangköz: ν-k aránya

oktáv: $\log_2 \frac{\nu}{\nu_0}$

I: hangerősség

érzékelése: logaritmikus skála

$I_0 = 10^{-12} W/m^2$

$\underbrace{I_{max} = 10\ W/m^2}_{13 \text{ nagyságrend}}$

decibel skála:

$\text{decibel} = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$

hangszín:

alapfrekvencia mellett felharmonikusok aránya határozza meg

FÉNY

ν: szín

hullámhossz: $\lambda = \frac{1}{\nu}$

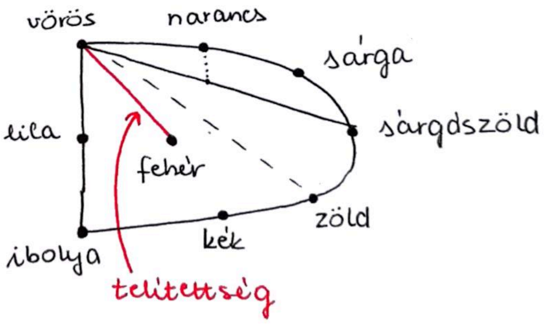
$400\ nm \leq \lambda \leq 800\ nm$ ← látható fény tartománya

1 oktáv szűkebb

I: fényerősség

érzékelése: logaritmikus

=> nagy különbségeket is láthatunk



összeadó színkeverés: monitor RGB

szürke: relatív intenzitás

barna: sárgának a környezethez viszonyított változása