Fourier-transzformáció
Az általunk használt konvenció a következő:

$$\begin{aligned} X(\omega) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ x(t) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{1}$$

Szorzat szabály:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') G(\omega - \omega') d\omega' \tag{2}$$

ahol $F(\omega)$, illetve $G(\omega)$ az $f(t)$ és $g(t)$ Fourier-transzformáltjai.
Az ismert Fourier-transzformáltak a következők ($\alpha > 0$):

$$\begin{aligned} f(t) = \exp(-\alpha t) H(t) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha + i\omega} \\ f(t) = \exp(-|\alpha t|) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ f(t) = H(t) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left(\frac{1}{i\pi\omega} + \delta(\omega) \right) \\ f(t) = \sin(at) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \left[\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a) \right] \\ f(t) = \cos(at) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a) \right] \end{aligned} \tag{3}$$

1. Számoljuk ki az $f(t) = 1/t$ függvény Fourier-transzformáltját!

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1/t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t} e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-i\omega t} dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{t} dt = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \end{aligned} \tag{4}$$

   Az utóbbi a Dirichlet-integrál:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \tag{5}$$

   Azaz

$$\mathcal{F}[1/t] = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sgn}(\omega) \tag{6}$$

2. Számoljuk ki a következő függvény Fourier-transzformáltját a konvolúciós szabály használatával!

$$f(t) = \frac{e^{-\alpha|t|}}{t} \tag{7}$$

Megoldás:
A konvolúciós képlet:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')G(\omega - \omega')d\omega' \tag{8}$$

Ahonnét

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{\alpha|t|}/t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2}\mathrm{sgn}(\omega - \omega')\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega'^2}d\omega' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega}^{\infty} \frac{i}{2}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega'^2}d\omega' + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} \frac{i}{2}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega'^2}d\omega' = \\ &= -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan(\omega'/a)\right]_{\omega}^{\infty} + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\arctan(\omega'/a)\right]_{-\infty}^{\omega} = \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctan(\omega/a)\end{aligned} \tag{9}$$

3. Számoljuk ki a következő függvény Fourier-transzformáltját! Használjuk a skálázási és eltolási szabályokat:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t + \beta t_0} & t > t_0\beta/\alpha \\ 0 & t < t_0\beta/\alpha \end{cases} \tag{10}$$

Megoldás:

$$e^{\alpha t + \beta t_0} = e^{-\alpha(t - t0\beta/\alpha)} \tag{11}$$

Tudván, hogy

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)] \tag{12}$$

Az eredmény

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t_0\beta/\alpha}}{\alpha + i\omega} \tag{13}$$

Fontos, hogy az eltolást jól definiálják!

4. Ha tudjuk, hogy $f(t) = \exp(-t^2/2)$ és $F(\omega) = \exp(-\omega^2/2)$. Akkor ha $g(t) = f(2t + 1)$, mennyi $G(\omega)$? Megoldás: eltolás és skálázás: $t' = t + t_0 = t + 1/2$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\exp(-t'^2/2)] &= \mathcal{F}[\exp(-t^2/2)] \exp(+i\omega/2) = \\ &= \exp(-\omega^2/2) \exp(i\omega/2)\end{aligned} \tag{14}$$

Skálázás: $t'' = 2t'$: $\mathcal{F}[at] = F[\omega/a]/|a|$

$$\mathcal{F}[\exp(-(2t+1)^2/2)] = \mathcal{F}[\exp(-t''^2/2)] = \frac{1}{2}\exp(-\omega^2/8)\exp(i\omega/2) \tag{15}$$

5. A konvolúciós összefüggés használatával határozzuk meg az alábbi Fourier-transzformáltat:

$$f_1(t) = \sin(at)\cos(bt) \tag{16}$$

Megoldás:

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{4i}\left[\delta(\omega'-a) - \delta(\omega'+a)\right]\left[\delta(\omega-\omega'-b) + \delta(\omega-\omega'+b)\right] d\omega' \tag{17}$$

A fenti képletben az első adag Dirac-deltára integrálunk, az elsőből $\omega' = a$, a másodikból $\omega' = -a$:

$$F_1(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4i}\left[\delta(\omega-a-b) + \delta(\omega-a+b) - \delta(\omega+a-b) - \delta(\omega+a+b)\right] \tag{18}$$

6. A konvolúciós összefüggés használatával határozzuk meg az alábbi Fourier-transzformáltat:

$$f_2(t) = \cos(bt)H(t+\pi) \tag{19}$$

Megoldás:
Ez ltolot lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltja, az eltolás szabállyal:

$$\mathcal{F}[H(t+\pi)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\frac{1}{i\pi\omega} + \delta(\omega)\right)e^{-i\omega\pi} \tag{20}$$

A Dirac-delta miatt az eltolásból jövö tag értéke zérus a második tagra, mivel ω=0, tehát:

$$\mathcal{F}[H(t+\pi)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\frac{1}{i\pi\omega}e^{i\omega\pi} + \delta(\omega)\right) \tag{21}$$

A teljes $f_2(t)$ Fourier-transzformáltja theát:

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left[\delta(\omega'-b) + \delta(\omega'+b)\right]\left[\frac{\exp[i(\omega-\omega')\pi]}{i(\omega-\omega')\pi} + \delta(\omega-\omega')\right] d\omega' = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left(\frac{\exp[i(\omega-b)\pi]}{i(\omega-b)\pi} + \frac{\exp[i(\omega+b)\pi]}{i(\omega+b)\pi} + \delta(b+\omega) + \delta(b-\omega)\right) \end{aligned} \tag{22}$$

7. A konvolúciós összefüggés használatával határozzuk meg az alábbi Fourier-transzformáltat:

$$f_3(t) = \sin(at)^2 \cos(bt) \tag{23}$$

Megoldás:
Induljunk ki a $f_1(t) = \sin(at)\cos(bt)$ Fourier-transzformáltjából:

$$F_1(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4i}\left[\delta(\omega - a - b) + \delta(\omega - a + b) - \delta(\omega + a - b) - \delta(\omega + a + b)\right] \tag{24}$$

Ezt kell konvolválni a $\sin(at)$ Fourier-transzformáltjával:

$$\begin{aligned} F_3(\omega) =& \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega')\left[\delta(\omega - \omega' - a) - \delta(\omega - \omega' + a)\right] = \\ =& \frac{-\sqrt{2\pi}}{8}\left[\delta(2a + b - \omega) + \delta(2a - b + \omega) + \delta(-2a + b + \omega) + \delta(2a + b + \omega)\right] + \\ &+ \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\left[\delta(\omega - b) + \delta(\omega + b)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

mivel az utóbbi két Dirac-deltából kettő is van!