

Az általunk használt konvenció a következő:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1)$$

1. Számoljuk ki egy lépcsőből álló a boxfüggvény Fourier-transzformáltját!

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \quad (2)$$

Adefiníció alapján

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi\omega} \frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{2i} = \frac{\sin(\omega/2)}{\pi\omega} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\omega/2) \end{aligned} \quad (3)$$

2. Most számoljuk ki a

$$x(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad (4)$$

Fourier-transzformáltját!

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

Használjuk ki, hogy

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\nu t} d\nu = \left[\frac{e^{i\nu t}}{2it} \right]_{-1}^1 = \frac{\sin(t)}{t} \quad (6)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\nu t} d\nu \right) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\nu-\omega)t} dt \quad (7)$$

Az órán volt, hogy

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \quad (8)$$

Tehát

$$X(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-1}^1 \delta(\nu - \omega) d\nu = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \theta(1 - \omega) \theta(\omega + 1) \quad (9)$$

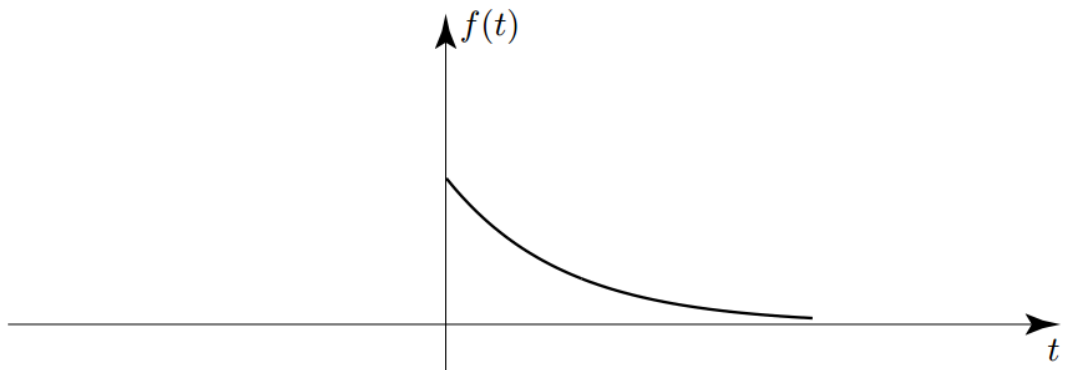
A vége az integrálási határok miatt van. A végeredmény tehát egy $[-1 : 1]$ intervallumon egy féllépcső.

3. Egyoldalú exponenciális függvény Fourier-transzformáltja. Fontos, hogy $x < 0$ esetén a függvény zérus, ezért ott nem kell integrálni.

Find the Fourier Transform of the one-sided exponential function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}$$

where α is a positive constant.



$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\alpha+i\omega} \end{aligned} \quad (10)$$

4. A fentiek alapján határozzuk meg a

$$f(x) = \exp(-|x|) \quad (11)$$

függvény Fourier-transzformáltját!

$$\begin{aligned}
2\pi F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \\
&= \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{(\alpha-i\omega)t}}{(\alpha-i\omega)} \right]_{-\infty}^0 = \\
&= \frac{1}{\alpha+i\omega} + \frac{1}{\alpha-i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \tag{12}
\end{aligned}$$

5. Az előadáson volt, a cosinus Fourier-transzformáltja.

$$\mathcal{F}[\cos(ax)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} [\delta(\omega-a) + \delta(\omega+a)] \tag{13}$$

Ekkor a konvolúciós szabály (ami visszafelé is igaz!):

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^\infty f(t')g(t-t')dt' \right] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[g(t)] \tag{14}$$

ami visszafelé is igaz!:

$$\int_{-\infty}^\infty F(\omega')G(\omega-\omega')d\omega' = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(t)g(t)] \tag{15}$$

alaján (itt 2π -vel szorozza a mi Fourier-transzformáltunkat)

6. A konvolúciós képlet használata. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját!

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \cos(2t) \tag{16}$$

Ismerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} [e^{-\alpha|t|}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\
\mathcal{F} [\cos(2t)] &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} [\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)] \tag{17}
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} [e^{-\alpha|t|} \cos(2t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F} [e^{-\alpha|t-t'|}] \mathcal{F} [\cos(2t')] dt' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega-\omega')^2} [\delta(\omega'-2) + \delta(\omega'+2)] d\omega' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega-2)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega+2)^2} \right) \tag{18}
\end{aligned}$$

7. A háromszögjel Fourier-transzformáltja:

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{ha } -1 < t < 0 \\ 1-t & \text{ha } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \quad (19)$$

a) hagyományos módszer:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^0 (1+t)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 (1-t)e^{-i\omega t} dt = \\ &= \left[\frac{1+i\omega(x+1)}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1+i\omega(x-1)}{\omega^2} e^{-i\omega t} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1+i\omega}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{i\omega-1}{\omega^2} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} = \\ &= \frac{e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}}{\omega^2} = \frac{\sin(\omega/2)^2}{\omega^2} = 4\text{sinc}^2(\omega/2) \end{aligned} \quad (20)$$

b) módszer, konvolúció:

Mutassuk meg, hogy a négyszögjel $g(x)$ (1. példa) konvolúciója önmagával a háromszögjelet adja.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt' \quad (21)$$

Ekkor a konvolúciós szabály értelmében:

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt' \right] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g(t)]\mathcal{F}[g(t)] \quad (22)$$

kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g(x)]^2 = \frac{1}{2\pi}\text{sinc}^2(\omega/2) \quad (23)$$