1. Differenciálegyenletek és Green-függvény

1. Vizsgáljuk az alábbi lineáris differenciálegyenletet!

$$\ddot{v} - \alpha^2 v = 0 \tag{1}$$

Megoldás próbafüggvénnyel: $v(t) = \exp(\beta t)$

$$\begin{aligned} \beta^2 e^{\beta t} - \alpha^2 e^{\beta t} &= 0 \\ \beta^2 - \alpha^2 &= 0 \\ \beta &= \pm\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Az általános megoldás:

$$v(t) = c_+ e^{\alpha t} + c_- e^{-\alpha t} \tag{3}$$

2. Oldjuk meg (1) egyenletet inhomogén verzióját!

$$\ddot{v} - \alpha^2 v = \sin\omega_0 t \tag{4}$$

Megoldás: Keressük a partikuláris megoldást a következő alakban:

$$v_P(t) = a\sin\omega_0 t + b\cos\omega_0 t \tag{5}$$

Ekkor

$$\ddot{v}_P(t) = -a\omega_0^2 \sin\omega_0 t - b\omega_0^2 \cos\omega_0 t \tag{6}$$

Ekkor (4) egyenlet így néz ki:

$$\sin\omega_0 t(-a - a\omega_0 t^2 - 1) + \cos\omega_0 t(-b - b\omega_0^2) = 0 \tag{7}$$

Mind a sinusos és cosinusos tag együtthatója zérus kell hogy legyen, mivel minden t-re igaz az egyenlet. Ebből $b = 0$, és

$$a = \frac{-1}{1+\omega_0^2}$$

A partikuláris megoldás tehát

$$v_P(t) = \frac{-1}{1+\omega_0^2}\sin\omega_0 t \tag{8}$$

3. Határozzuk meg a teljes megoldást a következő kezdőfeltételekkel! $v(0) = 0$, $\dot{v}(0) = 1$.

$$\begin{aligned} v(0) &= c_+ + c_- = 0 \\ \dot{v}(0) &= \alpha c_+ - \alpha c_- - \frac{\omega_0}{1+\omega_0^2} = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Az első egyenletből $c_+ = -c_- \equiv c$. A másodikból:

$$c = \frac{1}{2\alpha}\left(1 + \frac{1}{1+\omega_0^2}\right) \tag{10}$$

Tehát a megoldás:

$$v(t) = ce^{\alpha t} - ce^{-\alpha t} - \frac{1}{1+\omega_0^2}\sin\omega_0 t \tag{11}$$

4. Az (1) egyenlet Green-függvényét úgy kapjuk meg, ha a homogén egyenletet a $v(0) = 0$, illetve $\dot{v}(0) = 1$ kezdeti feltételekre illesztjük. Ekkor:

$$\begin{aligned} v(0) &= c_+ + c_- = 0 \\ \dot{v}(0) &= \alpha c_+ - \alpha c_- = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Ebből a megoldás:

$$v(t) = \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t} \tag{13}$$

A Green-függvény tehát (a kauzalitással):

$$G(t) = \theta(t)\left(\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t}\right) \tag{14}$$

5. Válasz $f(t) = \theta(t)$ (bekapcsolás):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\theta(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau)\left(\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha\tau} - \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha\tau}\right)\theta(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha\tau} - \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha\tau}\right)d\tau = \\ &= \frac{1}{\alpha}[\cosh(\alpha t) - 1] \end{aligned} \tag{15}$$

6. Megjegyzés: Akinek van affinitása, az megcsinálhatja a konvolúciót $\theta(t)\sin\omega_0 t$-vel, és kijön az előző inhomogén egyenlet megoldása.

7. Végül nézzük meg egy impulzusra adott választ:

$$f(t) = \theta(t)\theta(t_0 - t) \tag{16}$$

A konvolúció:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)\theta(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)\frac{1}{\alpha}\sinh[\alpha(t-\tau)]\theta(\tau)\theta(t_0-\tau)d\tau = \\
&= \int_{0}^{t} \frac{1}{\alpha}\sinh[\alpha(t-\tau)]\theta(t_0-\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{17}$$

Ezt józan paraszti ésszel is ki lehet találni, de a lépcsőfüggvénnyel is el lehet játszani, hogy $t < t_0$ esetén az előző végeredményt kapjuk, $t > t_0$ esetén pedig

$$x(t) = \int_0^{t_0} \frac{1}{\alpha}\sinh[\alpha(t-\tau)]d\tau = \frac{1}{\alpha^2}\{\cosh(\alpha t) - \cosh[\alpha(t-t_0)]\} \tag{18}$$