Az általunk használt konvenció a következő:

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{1}$$

Szabályok:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x)] &= F(\omega) \\
\mathcal{F}[f(x-a)] &= e^{-ia\omega} F(\omega) \\
\mathcal{F}[f(ax)] &= \frac{1}{|a|} F(\omega/a) \\
\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] &= (i\omega)^n F(\omega) \\
\mathcal{F}[(f * g)(x)] &= \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega) \\
\mathcal{F}[f(x) g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F * G)(\omega)
\end{aligned} \tag{2}$$

1. Számoljuk ki egy lépcsőből álló a lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltját!

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \tag{3}$$

Adefiníció alapján

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\omega t} dt = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi\omega} \frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{2i} = \frac{\sin(\omega/2)}{\pi\omega} = \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{sinc}(\omega/2)
\end{aligned} \tag{4}$$

2. Most számoljuk ki visszafelé, a

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \tag{5}$$

Fourier-transzformáltját!

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-i\omega t} dt \tag{6}$$

Használjuk ki, hogy

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\nu t} d\nu = \left[\frac{e^{i\nu t}}{2it}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin(t)}{t} \tag{7}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\nu t} d\nu\right) e^{-i\omega t} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-1}^{1} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i(\nu-\omega)t} dt \tag{8}$$

Az órán volt, hogy

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \tag{9}$$

Tehát

$$X(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-1}^{1} \delta(\nu - \omega) d\nu = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\theta(1-\omega)\theta(\omega+1) \tag{10}$$

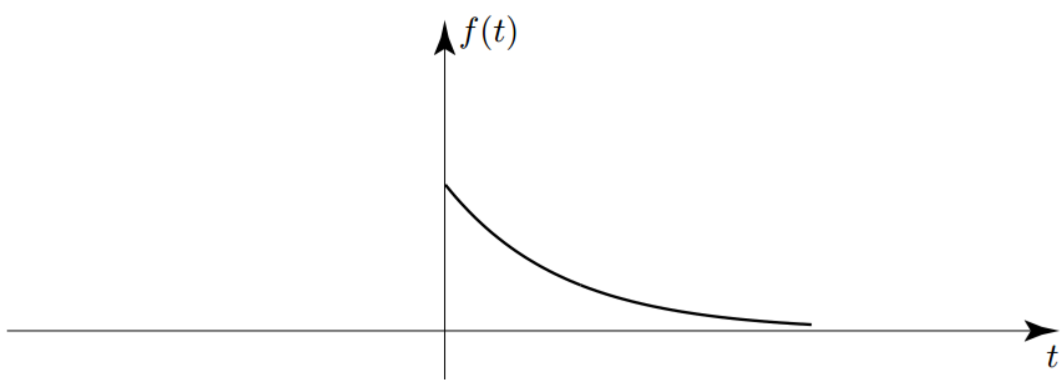
A vége az integrálási határok miatt van. A végeredmény tehát egy $[-1:1]$ intervallumon egy féllépcső.

3. Egyoldalú exponenciális függvény Fourier-transzformáltja. Fontos, hogy $x < 0$ esetén a függvény zérus, ezért ott nem kell integrálni.

Find the Fourier Transform of the one-sided exponential function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}$$

where α is a positive constant.



$$\sqrt{2\pi}F(\omega) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+i\omega)t}dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)}\right]_0^\infty = \\ = \frac{1}{\alpha+i\omega} \tag{11}$$

4. A fentiek alapján határozzuk meg a

$$f(x) = \exp(-|\alpha t|) \tag{12}$$

függvény Fourier-transzformáltját!

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}e^{-i\omega t}dt = \\ &= \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{(\alpha-i\omega)t}}{(\alpha-i\omega)}\right]_{-\infty}^0 = \\ &= \frac{1}{\alpha+i\omega} + \frac{1}{\alpha-i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \end{aligned} \tag{13}$$

5. Az előadáson lesz, hogy a cosinus Fourier-transzformáltja a következő, de gyorsan le is lehet vezetni, ha tiltakoznak, hogy elmaradt:

$$\mathcal{F}[\cos(ax)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a)] \tag{14}$$

A konvolúciós szabályt ld. fent.

6. A konvolúciós képlet használata. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját!

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}\cos(2t) \tag{15}$$

Ismerjük, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \\ \mathcal{F}\left[\cos(2t)\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)] \end{aligned} \tag{16}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\cos(2t)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t-t'|}\right]\mathcal{F}\left[\cos(2t')\right]dt' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\omega')^2}[\delta(\omega'-2)+\delta(\omega'+2)]d\omega' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-2)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+2)^2}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

7. A háromszögjel Fourier-transzformáltja:

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{ha } -1 < t < 0 \\ 1-t & \text{ha } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \tag{18}$$

a) hagyományos módszer:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{0}(1+t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{1}(1-t)e^{-i\omega t}dt = \\ &= \left[\frac{1+i\omega(x+1)}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1+i\omega(x-1)}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right]_{0}^{1} = \\ &= \frac{1+i\omega}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{i\omega-1}{\omega^2} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} = \\ &= \frac{e^{-i\omega}-2+e^{i\omega}}{\omega^2} = \frac{4\sin(\omega/2)^2}{\omega^2} = \mathrm{sinc}^2(\omega/2) \end{aligned} \tag{19}$$

b) módszer, konvolúció:

Mutassuk meg, hogy a négyszögjel $g(x)$(1. példa) konvolúciója önnmagával a háromszögjelet adja.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt' \tag{20}$$

Ekkor a konvolúciós szabály értelmében:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt'\right] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g(t)]\mathcal{F}[g(t)] \tag{21}$$

kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[g(x)]^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{sinc}^2(\omega/2) \tag{22}$$