1. Dirac-delta

1. példa: Számoljuk ki a következő integrált:

$$I_1 = \int_0^\infty \delta(\sqrt{x} - a) x^{-1/2} dx \tag{1}$$

Megoldás: Dolgozzunk integrál változó cserével: $y = \sqrt{x} - a$! Ekkor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dx = 2(y + a)dy, \quad \sqrt{x} = y + a \tag{2}$$

$$I_1 = \int_{-a}^\infty \delta(y) \frac{1}{y + a} 2(y + a) dy = 2 \tag{3}$$

2. példa: Számoljuk ki a következő integrált:

$$I_2 = \int_0^\infty \delta[\sin(1/x)] \cos(1/x) dx \tag{4}$$

Megoldás: Használjuk az előadáson elhangzott képletet! Ha $g(x)$ zérushelyei x_i, akkor

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \tag{5}$$

Jelen esetben $g(x) = \sin(1/x)$. Ekkor:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos(1/x) \tag{6}$$

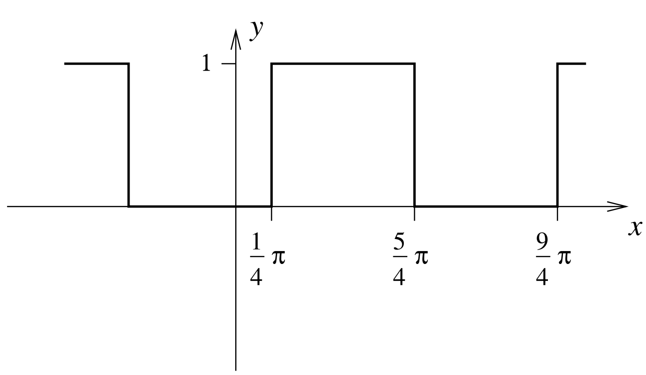
Zérushelyek: $1/x = k\pi$.

$$\delta(g(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - 1/k\pi)}{|\cos(k\pi)(k\pi)^2|} \tag{7}$$

Visszaírva:

$$I_2 = \sum_k \int_0^\infty \frac{\delta(x - 1/k\pi)}{|\cos(k\pi)|(k\pi)^2} \cos(1/x) dx = \sum_k \frac{\cos(k\pi)}{|\cos(k\pi)|(k\pi)^2} = \sum_k \frac{1}{(k\pi)^2} = \frac{1}{6} \tag{8}$$

2. Eltolt négyszögjel Fourier-sora



Írjuk fel a fenti négyszögjel ($f(x)$) Fourier-sorát a definíció alapján!
Megoldás: Először is nyílvánvaló, hogy $a_0 = 1/2$. A Cosinus együtthatói:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \tag{9}$$

Innét

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ paros} \\ (-1)^{\lfloor n/4 \rfloor}\sqrt{2}/(n\pi) & \text{ha } n \text{ paratlan.} \end{cases} \tag{10}$$

Ahol a $\lfloor n/4 \rfloor$ a $n/4$ egész részét jelenti.
Hasonlóan a Sinus:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \tag{11}$$

Innét

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ paros} \\ (-1)^{\lfloor (n+2)/4 \rfloor} - \sqrt{2}/(n\pi) & \text{ha } n \text{ paratlan.} \end{cases} \tag{12}$$

Azaz a Fourier-sor:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{(2k-1)\pi}\left\{(-1)^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor}\sin[(2k-1)x] - (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}\cos[(2k-1)x]\right\} \tag{13}$$

2. megoldás: Használjuk az órai eredményt és azt csúsztassuk el. Az órai eredmény a $\pi/4$-gyel balra csúsztatott lépcsőfüggvénnyel:

$$g(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin[(2k-1)x] \tag{14}$$

Ekkor

$$f(x) = g(x-\pi/4) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin[(2k-1)(x-\pi/4)] \tag{15}$$

Kihasználva, hogy

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin x \tag{16}$$

illetve

$$\begin{aligned} \sin[(2k-1)\pi/4] &= (-1)^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor}/\sqrt{2} \\ \cos[(2k-1)\pi/4] &= (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}/\sqrt{2} \end{aligned} \tag{17}$$

Amiből az előző eredmény adódik.

3. Fűrészfog függvény Fourier-sora

Legyen a $-\pi \leq x \leq \pi$ intervallumon $f(x) = x$ és $f(x) = f(x + 2\pi)$ periodikus! Számoljuk ki a Fourier-sorát!

Megoldás:

3. (a) $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0 \quad [\text{because } x\cos nx \text{ is odd}]$$

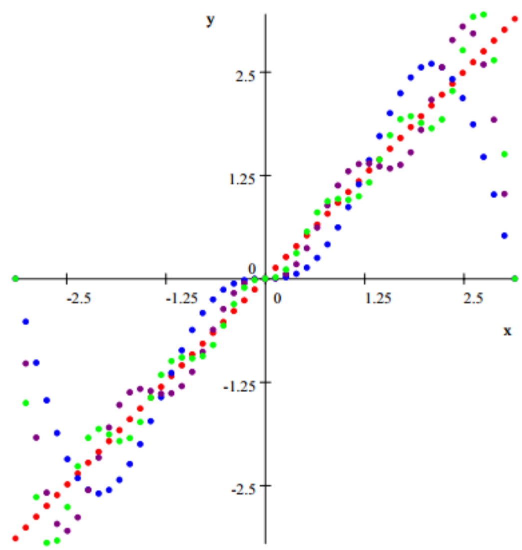
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx \quad [\text{since } x\sin nx \text{ is odd}]$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi \quad [\text{using integration by parts}] \quad = \begin{cases} -(2/n) & \text{if } n \text{ even} \\ (2/n) & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$$

(b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2}{n} \sin nx$

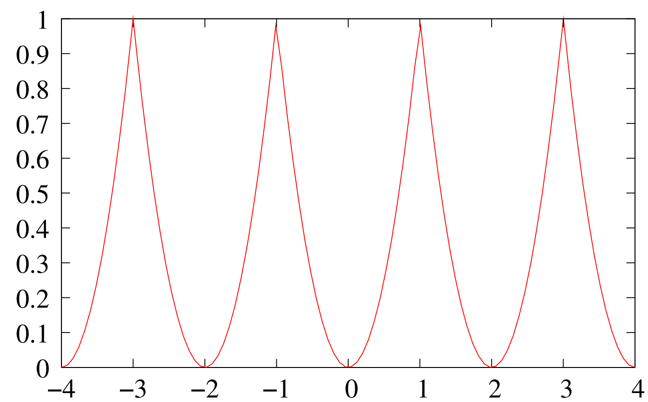
when $-\pi < x < \pi$.

(c)



4. Parabola Fourier-sora

4.1. Direkt megoldás



Számítsuk ki az ábrán látható függvény Fourier-sorát! $-1 \leq x \leq 1$ esetén $g(x) = x^2$. Bizonyítsuk be a korábban használt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{18}$$

képletet!

Megoldás:

17. (a) We find the Fourier series for $f(x) = \{x^2 \quad \text{if } -1 \leq x \leq 1, \quad L = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^{1} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cos(n\pi x)\,dx = \frac{4}{(n\pi)^2} \cos n\pi = \begin{cases} \dfrac{4}{(n\pi)^2} & \text{if } n \text{ even} \\ -\dfrac{4}{(n\pi)^2} & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-1}^{1} x^2 \sin(n\pi x)\,dx = 0 \quad \text{because } x^2 \sin(n\pi x) \text{ is odd.}$$

So we have $x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x)$ for $-1 \leq x \leq 1$.

(b) We let $x = 1$ in the above to obtain

$$1 = \tfrac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi) \qquad \tfrac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \qquad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

4.2. Integrálással az előzőből

A határokat át kell sajnos váltani, de ettől eltekintve: A lényeg, hogy

$$\int_{-\pi}^{x} f(x')dx' = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{x} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx')dx' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \left[\frac{-\cos(nx')}{n} \right]_{-\pi}^{x} \tag{19}$$

Az alsó határ zérust ad, a felső $\cos(nx)/n$-et. A $-$ előjel miatt pont visszakapjuk, ami akartunk!