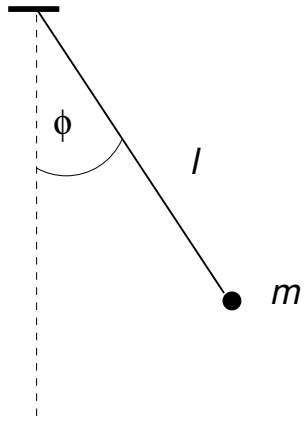
# Közönséges Differenciál Egyenletek

1. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\text{a.)} \quad y' = \ln(x)y$$
$$\text{b.)} \quad y' - \frac{2y}{x} = 0$$

2. Matematikai inga nagy kitérésekre

**Megoldás:**




Egy $l$ hosszúságú fonál végén leng a síkban egy $m$ tömegpont. Polárkoordinátákban az energiája

$$E = \frac{1}{1} m l^2 \dot{\varphi} - mgl\cos(\varphi)$$

alakban írható fel, ahol $\varphi$ a fonál függőlegessel bezárt szöge. Az energia a mozgás során állandó. Fejezzük ki a szögsebességet:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}\left(E + mgl\cos(\varphi)\right)} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos(\varphi)}\,.$$

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét a fenti differenciál egyenletre:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{E}{mgl} + \cos(\varphi)}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}t + C$$

A bal oldalon szereplő integrál egy u.n. másod rendő elliptikus integrál.

3. Írjuk át a $\ddot{y} = ay$ másodrendű közönséges differenciál egyenletet egy elsőrendű, kétváltozós k.d.e. rendszerre és mutassuk meg, hogy a megoldást

$$y = \alpha e^{\sqrt{a}} + \beta e^{-\sqrt{a}}$$

alakban tudjuk felírni, ahol $\alpha$, $\beta$ a kezdeti értékektől függő szabad paraméterek.

**Megoldás**
Vezessük be az $y_1$, $y_2$ függvényeket:

$$y_1 = y, \qquad\qquad y_2 = \dot{y}_1 \,.$$

A differenciál egyenletet az új változókkal a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= a y_1 \end{aligned}$$

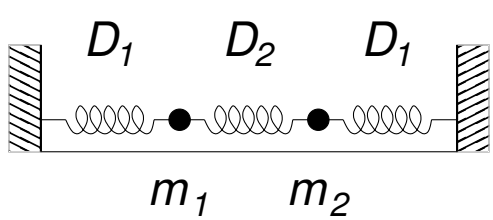
Mátrixalakban:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

A mátrix sajátértékei $\lambda_\pm = \pm\sqrt{a}$ és a hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \qquad\qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

4. Feladat
Határozzuk meg az ábrán látható rendszer jellemző frekvenciáit, ha egyensúlyi helyzetben a rugók nyújtatlanok. A testek csak vízszintesen, egy egyenes mentén mozoghatnak súrlódás nélkül!




**Megoldás**
A diff. egyenlet:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Új változókat bevezetve: $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1$, $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2$ az egyenlet a következő alakra hozható

$$\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{x}} \ ,$$

ahol

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D_1 - D_2 & D_2 \\ D_2 & -D_1 - D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}} \end{pmatrix}$$

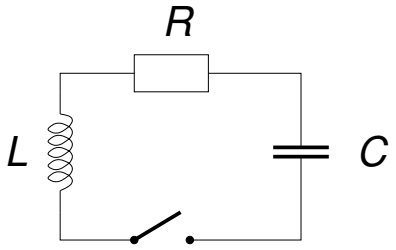
Ez az alak már a szokásos.

5. Feladat
A csillapított harmonikus oszcillátor mozgás egyenlete a következő:

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - Dx \ .$$

Írjuk fel a kezdőfeltételeket, ha a rugót a kezdő pillanatban $A$ hosszúsággal megnyújtjuk és elengedjük! Hogyan változik az időben a rendszer energiája?

6. Feladat




Az ábrán látható áramkörben az áram változását a kapcsoló zárása után a következő egyenlettel írhatjuk le:

$$-L\frac{dI}{dt} = IR + \frac{1}{C}\int I dt \ .$$

Írjuk át az egyenletet differenciál egyenletté! Határozzuk meg az egyenlet tipusát! Adjuk meg az áram időbeli változását, ha a kapcsoló zárása előtt a kondenzátor $Q$ töltést tárolt!