Az általunk használt konvenció a következő:

$$\begin{aligned} X(\omega) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \\ x(t) =& \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{1}$$

1. Számoljuk ki egy lépcsőből álló a lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltját!

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \tag{2}$$

Adefiníció alapján

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\omega t}dt = \\ =\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi\omega}\frac{e^{i\omega/2}-e^{-i\omega/2}}{2i} = \frac{\sin(\omega/2)}{\pi\omega} = \\ =\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{1}{2\pi}\text{sinc}(\omega/2) \end{aligned} \tag{3}$$

2. Most számoljuk ki visszafelé, a

$$x(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \tag{4}$$

Fourier-transzformáltját!

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-i\omega t}dt \tag{5}$$

Használjuk ki, hogy

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\nu t}d\nu = \left[\frac{e^{i\nu t}}{2it}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin(t)}{t} \tag{6}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\nu t}d\nu\right)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\nu\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{i(\nu-\omega)t}dt \tag{7}$$

Az órán volt, hogy

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}dt \tag{8}$$

Tehát

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \delta(\nu - \omega) d\nu = \frac{1}{2}\theta(1-\omega)\theta(\omega+1) \tag{9}$$

A vége az integrálási határok miatt van. A végeredmény tehát egy $[-1:1]$ intervallumon egy féllépcső.

FONTOS! Mutassunk rá, hogy a két feladatot meg tudtuk volna oldani, az alábbi azonossággal:

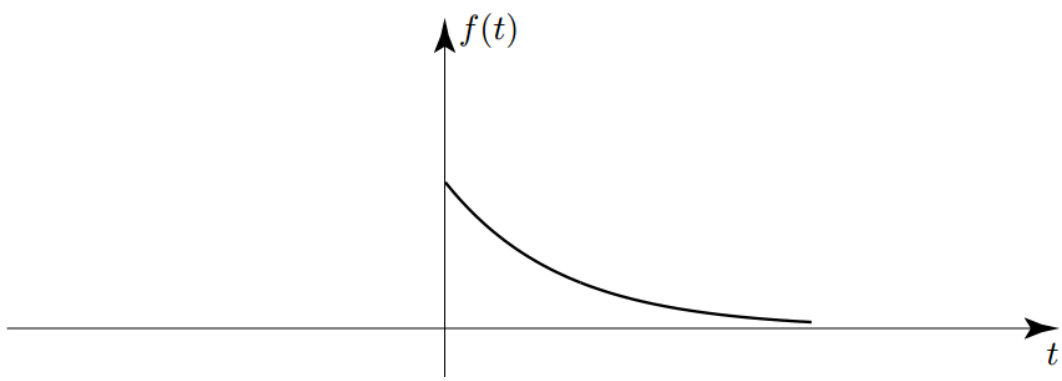
$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\omega/a) \tag{10}$$

3. Egyoldalú exponenciális függvény Fourier-transzformáltja. Fontos, hogy $x < 0$ esetén a függvény zérus, ezért ott nem kell integrálni.

   Find the Fourier Transform of the one-sided exponential function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}$$

   where α is a positive constant.



$$2\pi F(\omega) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)}\right]_0^\infty = \\ = \frac{1}{\alpha + i\omega} \tag{11}$$

4. A fentiek alapján határozzuk meg a

$$f(x) = \exp(|\alpha t|) \tag{12}$$

   függvény Fourier-transzformáltját!

$$
\begin{aligned}
2\pi F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \\
&= \left[\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)} \right]_0^\infty + \left[\frac{e^{(\alpha-i\omega)t}}{(\alpha-i\omega)} \right]_{-\infty}^0 = \\
&= \frac{1}{\alpha+i\omega} + \frac{1}{\alpha-i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}
\end{aligned} \tag{13}
$$

5. Az előadáson lesz, hogy a cosinus Fourier-transzformáltja a következő, de gyorsan le is lehet vezetni, ha tiltakoznak, hogy elmaradt:

$$
\mathcal{F}[\cos(ax)] = \frac{1}{2}[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)] \tag{14}
$$

Ekkor a konvolúciós szabály (ami visszafelé is igaz!):

$$
\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt' \right] = 2\pi \mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[g(t)] \tag{15}
$$

ami visszafelé is igaz!:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')G(\omega-\omega')d\omega' = \mathcal{F}[f(t)g(t)] \tag{16}
$$

alaján (itt 2π-vel szorozza a mi Fourier-transzformáltunkat)

6. A konvolúciós képlet használata. HAtározzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját!

$$
f(t) = e^{-\alpha|t|}\cos(2t) \tag{17}
$$

Ismerjük, hogy

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right] &= \frac{1}{2\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \\
\mathcal{F}\left[\cos(2t)\right] &= \frac{1}{2}[\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)]
\end{aligned} \tag{18}
$$

Ekkor

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t|}\cos(2t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[e^{-\alpha|t-t'|}\right] \mathcal{F}\left[\cos(2t')\right] dt' = \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+(\omega-\omega')^2}[\delta(\omega'-2)+\delta(\omega'+2)]d\omega' = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-2)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+2)^2} \right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

7. A háromszögjel Fourier-transzformáltja:

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{ha } -1 < t < 0 \\ 1-t & \text{ha } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \tag{20}$$

a) hagyományos módszer:

$$\begin{aligned} 2\pi\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-1}^{0}(1+t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{1}(1-t)e^{-i\omega t}dt = \\ &= \left[\frac{1+i\omega(x+1)}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1+i\omega(x-1)}{\omega^2}e^{-i\omega t}\right]_{0}^{1} = \\ &= \frac{1+i\omega}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{i\omega-1}{\omega^2} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} = \\ &= \frac{e^{-i\omega}-2+e^{i\omega}}{\omega^2} = \frac{\sin(\omega/2)^2}{\omega^2} = 4\text{sinc}^2(\omega/2) \end{aligned} \tag{21}$$

b) módszer, konvolúció:

Mutassuk meg, hogy a négyszögjel $g(x)$(1. példa) konvolúciója önnmagával a háromszögjelet adja.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt' \tag{22}$$

Ekkor a konvolúciós szabály értelmében:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t')g(t-t')dt'\right] = 2\pi\mathcal{F}[g(t)]\mathcal{F}[g(t)] \tag{23}$$

kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}[f(x)] = 2\pi\mathcal{F}[g(x)]^2 = \frac{1}{2\pi}\text{sinc}^2(\omega/2) \tag{24}$$