9. Házi feladat

1. Vizsgáljuk meg egy harmonikus oszcillátor mozgását. A Newton egyenlet a következőképpen írható fel:

$$m\ddot{x} = -kx \ ,$$

ahol k a rugó állandó. Ennek a közönséges másodrendű differenciál egyenletnek tudjuk, hogy a megoldását $x = x_0 \sin(x + \alpha)$ alakban adhatjuk meg, ahol x_0 és α a kezdeti feltételektől függő állandók. Írjuk fel az energiáját, amely a mozgás során állandó marad:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \ .$$

A fenti egyenletet átalakítva a

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}$$

elsőrendű, nemlineáris differenciál egyenletet kapjuk, amelyet a változók szátválasztása módszerrel meg tudunk oldani. Mutassuk meg, hogy mindkét differenciál egyenletnek ugyanolyan alakúak a megoldásaik!

2. Mutassuk meg, hogy az

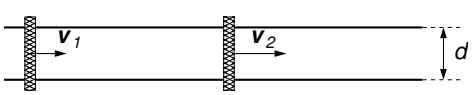
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

állandó együtthatós, lineáris, homogén diffegyenlet rendszer megoldását az

$$\mathbf{y} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}_0$$

alakban adhatjuk meg!

3. Egy hosszú sínpáron két m tömegű fémrúd csúszhat surlódás nélkül a sín síkjára merőleges, $\mathbf{B}$ homogén, mágneses térben. A két rúd együttes ellenállása legyen R és a sinek közötti távolság d. Hogyan mozognak a a rudak?



A hurokban indukált feszültség

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -(v_2 - v_1)Bd \ ,$$

melynek hatására $I = U/R$ áram folyik a fémrudak és a sín alkotta hurokban.

A rudakra a sebességükkel ellentétes irányú $F = IdB$ Lorentz erő hat. A mozgásegyenleteket a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\alpha(v_1 - v_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -\alpha(v_2 - v_1)\ , \end{aligned}$$

ahol $\alpha = \frac{d^2B^2}{R}$. A gyorsulásokat fejezzük ki a sebesség deriváltjaként:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1 &= -\alpha(v_1 - v_2) \\ m\dot{v}_2 &= -\alpha(v_2 - v_1)\ . \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

vektort, ekkor a fenti egyenletet a következőképp írhatjuk fel:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\alpha}{m} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} \tag{1}$$

Hogyan fognak a rudak mozogni, ha kezdetben a sebességük v_{10} és v_{20} volt?