3. Gyakorlat

Polar koordináta rendszer

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

Határozzuk meg a jobb és baloldal x és y szerinti parciális deriváltjait:

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos(\varphi)\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
0 &= \cos(\varphi)\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
0 &= \sin(\varphi)\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
1 &= \sin(\varphi)\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}
\end{aligned}
$$

Foglaljuk össze a fenti egyenleteket egy mátrix egyenletbe:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}
$$

Az r, φ polár koordináták deriváltjait a fenti mátrix invertálásával állíthatjuk elő:

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{1}
$$

Példaként határozzuk meg a $f(r,\varphi)$ skalár mező gradiensét:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ r\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix},
$$

vagy kifejtve a fenti egyenletet:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

A kétdimenziós Laplace operátor meghatározása polár koorddináta rendszerben valamivel hosszadalmasabb számolást igényel:

$$\begin{aligned}
\Delta f(r,\varphi) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) f(r,\varphi) \\
&+ \left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) f(r,\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(r,\varphi) &= \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && (2) \\
&+ 2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} && (3) \\
&+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial r} && (4) \\
&+ \left(\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial \varphi} && (5) \\
&+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial \varphi} && (6)
\end{aligned}$$

A 1. egyenlet felhasználásával a fenti egyenlet egyes tagjait a következőképpen írhatjuk fel.

2. sor

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 &= \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1 \\
\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 &= \frac{1}{r^2}\left(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\right) = \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

tehát a második sor a következő alakú lesz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\varphi^2}$$

3. sor

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\frac{1}{r}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{1}{r}\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0$$

vagyis a 3. sor nem ad járulékot.

4. sor

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial x} = -\sin(\varphi)\ , \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y} = \cos(\varphi)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\right)\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

5. sor

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\sin(\varphi)\ , \quad \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\cos(\varphi)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{r}\left(\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) = 0$$

6. sor

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\cos(\varphi)\ , \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{r}\sin(\varphi)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial r}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{r}\left(\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\right) = 0$$

Tehát csak a 2. és a 4. sor ad járulékot a Laplace operátor 2D polár koordináta rendszerbeli kifejezésébe:

$$\Delta f(r,\varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\varphi^2}\ .$$

3D henger koordináta rendszerben nyilvánvalóan hasonló alakot fogunk kapni:

$$\Delta f(r,\varphi,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\ .$$

Differenciáloperátorok gömbi koordináta rendszerben

Gömbi koordináták: (r, ϑ, φ)

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\vartheta) \end{aligned}$$

A polár koordinátarendszer esetéhez hasonlóan írjuk fel a deriváltakat mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -r\sin(\vartheta) \\ -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

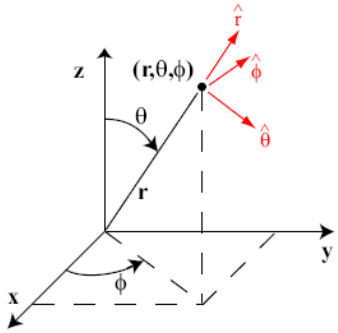
Mielőtt mátrix inverzió segítségével meghatároznánk a Descartes koordináták gömbi koordináták szerinti deriváltját bontsuk szét az előző egyenlet jobb oldalán álló mátrixot két mátrix szorzatára:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -\sin(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

Egyszerűen meggyőződhetünk róla, hogy a második mátrix oszlopai és sorai merőlegesek egymásra, tehát az inverzét a mátrix transzponálásával -a főátlóra való tükrözéssel - kaphatjuk meg. Egy diagonális mátrix inverze diagonális mátrix marad főátlójában a diagonális elemek reciprokával:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin(\vartheta)} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Idézzük fel a helyvektorok deriváltjainál bevezetett egységvektorokat:



$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gömbi koordináta rendszer.
$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{e}_\vartheta$, $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{e}_\varphi$

Vegyük észre, hogy a 7. számú egyenletben szereplő mátrix az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ oszlopvektorokból épül fel. A gradiens műveletét (operátorát) mátrixos jelöléssel a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Behelyettesítve a 7. egyenletet a gradiens operátort a következő alakban írhjatjuk fel a három egységvektor segítségével:

$$\boxed{\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (8)}$$

Természetesen az $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ vektorok nem állandó vektorok. Határozzuk meg a gömbi koordináták szerinti parciális deriváltjaikat:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\vartheta \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \sin(\vartheta)\mathbf{e}_\varphi \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} &= \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_r \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\vartheta)\mathbf{e}_\varphi \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \vartheta} &= 0 \ , \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin(\vartheta)\mathbf{e}_r - \cos(\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta \ .
\end{aligned}
$$

Határozzuk meg egy V vektortér divergenciáját gömbi koordináta rendszerben!
Alkalmazzuk a 10. képletet:

$$
div\mathbf{V} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{V} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{V} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{V}
$$

Gyakran célszerű a vektorteret is az $\mathbf{e}_r$,$\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ vektorok segítségével megadni:

$$
\mathbf{V} = \mathbf{e}_r V_r + \mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta + \mathbf{e}_\varphi V_\varphi \ ,
$$

ahol $V_r = \mathbf{e}_r\mathbf{V}$, $V_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta\mathbf{V}$ és $V_\varphi = \mathbf{e}_\varphi\mathbf{B}$. Helyettesítsük be a divergencia képletébe:

$$
\begin{aligned}
div\mathbf{V} &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_r) + \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta) + \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{e}_\varphi V_\varphi) \\
&+ \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\mathbf{e}_r V_r) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta) + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\mathbf{e}_\varphi V_\varphi) \\
&+ \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{e}_r V_r) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{e}_\vartheta V_\vartheta) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{e}_\varphi V_\varphi)
\end{aligned}
$$

Helyettesítsük be a $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$, $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok deriváltjait és használjuk ki azt a tényt, hogy

merőlegesek (ortogonálisak) egymásra:

$$\begin{aligned} div\mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial r}V_r + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}V_\vartheta + \frac{1}{r}V_r + \frac{\cos(\vartheta)V_\vartheta}{r\sin(\vartheta)} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}V_\varphi \\ &= \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2V_r}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{V_\vartheta\cos(\vartheta)}{r\sin(\vartheta)}\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(V_\vartheta\sin(\vartheta)\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$\boxed{div\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(V_\vartheta\sin(\vartheta)\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (9)}$$

Laplace operátor gömbi koordináta rendszerben:
Legyen $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ egy skalár tér. A Laplace operátor hatását a skalár téren úgy kaphatjuk meg, ha meghatározzuk a gradiensének a divergenciáját:

$$\begin{aligned} div\nabla\Phi &= div\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\ . \end{aligned}$$

Az divergencia kifejezésében szereplő vektorterek komponensei ebben az esetben rendre:

$$V_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\ , \quad V_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\ , \quad V_\varphi = \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\ ,$$

amelyeket a divergencia 9. számú képletébe helyettesítettünk be.

1. Vezessük le a rotáció differenciál operátorát gömbi koordináta rendszerben! Használjuk fel a gradiensre kapott formulát:

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (10)$$

2. írjuk fel a mozgás egyenletét polár koordináta rendszerben egy síkban mozgó, l_0 nyugalmi hosszúságú, D direkciós állandójú rugó végére kötött tömegpontnak. A potenciális energiáját a következőképpen adhatjuk meg:

$$V = \frac{D}{2}\left(r - l_0\right)^2 \ .$$

3. Határozzuk meg egyenletes körmozgás esetén a sebesség rotációját!

4. Az 1. előadás három legye esetében határozzuk meg a sebesség rotációját!

5. Számítsuk ki a gradiensét gömbi koordináta rendszerben a következő potenciálnak:

$$\Phi = \frac{\mathbf{P}\mathbf{r}}{r^3} \ ,$$

   ahol $\mathbf{P}$ állandó vektor!

6. Számítsuk ki a rotációját henger vagy gömbi koordináta rendszerben a következő vektortérnek:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \ ,$$

   ahol $\mathbf{m}$ egy állandó vektor! Henger koordináta rendszerben célszerű a z tengely irányát $\mathbf{m}$-mel párhuzamosan választani.

7. Határozzuk meg a divergenciáját gömbi koordináta rendszerben a következő áramsűrűségnek:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}\sin\left(kr\right)$$