1. gyakorlat: Ismétlés

Líneáris algebra

1. Mutassuk meg, hogy az alábbi vektorok generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^4$ vektortérben? Számoljuk ki a generátorvektorokból előállított mátrix rangját!

   (a)
   $$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$
   Itt a rang 3, tehát nem!

   (b)
   $$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\9\\16\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\16\\64\end{pmatrix}$$
   Itt a rang 4, tehát igen!

2. A valós harmadfokú polinomok vektorterében melyik tartalmazás igaz?

   (a) $x^3 + 7x^2 + 5x \in \langle x^3 + 2x, 3x^3 + 4x, 5x^2 + 6x\rangle$

   (b) $x^3 + 7x^2 + 5 \in \langle x^3 + 2x, 3x^3 + 4x, 5x^2 + 6x\rangle$

   (c) $x - 1 \in \langle x^3 - 1, x^3 - x^2, x^3 - x, 2x^2 - 3x + 1\rangle$

   A (b) nem a többi igen. Az (a) generátorrendszer az 1-3 fokú polinomok terén, a (c) generátorrendszer az max. 3. fokú polinomok terén, a (b)-ben pedig a polinomban van x^0 tag.

Indexes számolás

1. $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a} = \sum_i a_i(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{ikl} \varepsilon_{ikl} a_i a_k b_l = -\sum_{ikl} \varepsilon_{kil} a_i a_k b_l = 0$$

   Változócserével az az utolsó előtti összefüggést kajuk, tehát az eredmény 0.

2. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} =?$

   $$[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}]_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j a_k = \sum_{jklm} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\ a_l b_m a_k =$$

$$= \sum_{jklm} \varepsilon_{jki}\varepsilon_{jlm}\ a_l b_m a_k = \sum_{klm} (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}) a_l b_m a_k$$
$$= \sum_{lm} \delta_{im} a_l b_m a_l - \sum_{lm} \delta_{il} a_l b_m a_m = \sum_l a_l b_i a_l - \sum_m a_i b_m a_m =$$
$$= b_i \sum_l a_l a_l - a_i \sum_m b_m a_m = b_i \mathbf{aa} - a_i \mathbf{bb}$$

Azaz $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b}a^2 - \mathbf{a}b^2$

3. grad$r$ =?

$$[\text{grad}r]_i = \partial_i r = \partial_i \sqrt{\sum_j x_j^2} = \frac{1}{2r}\partial_i(\sum_j x_j^2) = \frac{1}{2r}\sum_j \partial_i x_j^2 = \frac{1}{2r}\sum_j 2x_j\delta_{ij} = \frac{x_i}{r}$$

Azaz grad$r = \mathbf{r}/r$

4. grad$1/r$ =?

$$[\text{grad}1/r]_i = \partial_i r = \partial_i \left(\sum_j x_j^2\right)^{-1/2} = \frac{-1}{2}\left(\sum_j x_j^2\right)^{-3/2} \partial_i(\sum_j x_j^2) =$$
$$= \frac{-1}{2r^3}\sum_j \partial_i x_j^2 = \frac{-1}{2r^3}\sum_j 2x_j\delta_{ij} = \frac{x_i}{r^3}$$

Azaz grad$1/r = -\mathbf{r}/r^3$. Lehet mondani az elektromos potenciált!

5. Elektormos dipólus gradiense grad$(\mathbf{pr}/r^3)$ =? Komponensenként kiírva:

$$[\text{grad}(\mathbf{pr}/r^3)]_i = \sum_j -\partial_i \left(\frac{p_j x_j}{r^3}\right) =$$
$$= \sum_j -\left(p_j \frac{1}{r^3}\partial_i x_j + p_j x_j \partial_i \frac{1}{r^3}\right) \tag{1}$$

Itt kihasználtuk azt, hogy a $\mathbf{p}$ állandó. Elvégezve a kijelölt deriválásokat kapjuk, hogy:

$$[\text{grad}(\mathbf{pr}/r^3)]_i = -\sum_j \left(\frac{p_j\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3p_j x_j x_i}{r^5}\right) = -\left(\frac{p_i}{r^3} - \frac{3x_i \sum_j p_j x_j}{r^5}\right) \tag{2}$$

Visszaírva a vektoriális alakot:

$$\text{grad}(\mathbf{pr}/r^3) = \left(\frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}\right). \tag{3}$$

6. Most számoljuk ki a mágneses indukciót!

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \left(\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}\right) \tag{4}$$

Írjuk fel az i komponenst

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\mu_0}B_i(\mathbf{r}) &= \sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}m_l\frac{x_m}{r^3}\right) = \sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} = \\
&= \sum_{jlm}(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} = \\
&= \sum_{jlm}\delta_{il}\delta_{jm}m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} - \sum_{jlm}\delta_{im}\delta_{jl}m_l\partial_j\frac{x_m}{r^3} = \\
&= \sum_{j}m_i\partial_j\frac{x_j}{r^3} - \sum_{l}m_l\partial_l\frac{x_i}{r^3} = \\
&= m_i\sum_{j}\left(\frac{\delta_{jj}}{r^3}-3\frac{x_j^2}{r^5}\right) - \sum_{l}m_l\left(\frac{\delta_{il}}{r^3}-3\frac{x_ix_l}{r^5}\right) = \\
&= m_i\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3r^2}{r^5}\right) - \frac{m_i}{r^3} + 3\frac{x_i(\mathbf{mr})}{r^5}
\end{aligned} \tag{5}$$

Az utolsó sorban az első tag zérus, a második tagot viszont már át tudjuk írni vektoriális alakra:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r}-r^2\mathbf{m}}{r^5} \tag{6}$$