A csillagozott feladatok nehezebbek, azok közül egy megoldása kell az 5-ös jegyhez, de több ilyen megoldását beszámítjuk a megajánlott jegyeknél. Segédletek:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[\cos(at)] = \frac{1}{2}(\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)) \tag{1}$$

1. **Feladat:** Fourier-transzformáció

   a) Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját!

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{egyébkent} \end{cases} \tag{2}$$

   b) Az előző feladat eredményét felhasználva határozzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját!

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 4 < t < 6 \\ 0 & \text{egyébkent} \end{cases} \tag{3}$$

   c)* Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier-transzformáltját az előző két eredményének és a segédlet segítségével! (Csak erre a megoldásra jár pont.)

$$f_3(t) = \begin{cases} \cos(\pi t) & \text{ha } 4 < t < 6 \\ 0 & \text{egyébkent} \end{cases} \tag{4}$$

2. **Feladat:** Differenciálegyenlet

   a) Határozzuk meg az alábbi homogén differenciálegyenletet általános megoldását!

$$y''(t) + \lambda^2 y(t) = 0 \tag{5}$$

   Adjuk meg a speciális megoldást a $y(0)=1/2$ és $y'(0)=\lambda/2$ peremfeltételekkel!

   b) Keressünk egy partikuláris megoldást az alábbi inhomogén differenciálegyenletre!

$$y''(t) + \lambda^2 y(t) = a(t-1) \tag{6}$$

   Adjuk meg a speciális megoldását a $y(0)=0$ és $y'(0)=\lambda$ peremfeltételekkel!

   c)* Keressünk egy partikuláris megoldást az alábbi inhomogén differenciálegyenletre!

$$y''(t) + \lambda^2 y(t) = ae^{bt} \tag{7}$$

3. **Feladat:** Green-függvény Fourier-tér:

$$y''(t) + \lambda^2 y(t) = 0 \tag{8}$$

a) Fourier-térben határozzuk meg a (8) egyenlet Green-függvényét!

b) Adjuk meg Fourier-térben a partikuláris megoldását a (8) egyenletnek, ha a gerjesztés $\cos(\omega_0 t)$!

c)* Transzformáljuk vissza normál t térbe a kapott megoldást! Mekkora a rezgés amplitúdója és frekvenciája?

4. **Feladat:** Green-függvény normál-tér:

a) Határozzuk meg a (8) egyenlet Green-függvényét normál t-térben! Figyeljünk a kauzalitásra! Milyen peremfeltételeket kell használnunk?

b) Határozzuk meg a partikuláris $y(t)$ válaszfüggvényt konstans gerjesztésre, Green-függvény segítségével:

$$y''(t) + \lambda^2 y(t) = \theta(t) \tag{9}$$

c)* Határozzuk meg a válaszfüggvényt, ha a (8) egyenlet által leírt rendszert az alábbi egyenlet $f_2(t)$ függvénye gerjeszti!

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 4 < t < 6 \\ 0 & \text{egyébkent} \end{cases} \tag{10}$$