Oldjuk meg a pótzh egyik feladatát, mert komplett katasztrófa volt. Kaptam 2, azaz kettő darab jó megoldást. Bátran ki lehet hívni kevésbé jó diákot megoldáshoz!

Legyen adott a $z = b - a(x^2 + y^2)$ egyenletű paraboloid

1. Paraméterezze hengerkoordináta rendszerben!
   Ez ment.
2. Ha $z \geq 0$ mekkora a paraboloid térfogata?
   Itt a Jakobi-t hagyta le a fél társaság, a másik fele meg hengerre integrált, tehát nem vette figyelembe, a határoknál a paraboloidot. A harmadik hiba, akinek igazából fogalma se volt, hogy mit csinál, az ráadásul nem is az 1-et integrálta, hanem valami random dolgot.
3. Mekkora a paraboloid felszíne?
   Itt elfogadtam azt is, ha valaki a Gnädig-könyvbeli képlettel számolt:

$$\int_{-\sqrt{b/a}}^{\sqrt{b/a}} dx \int_{-\sqrt{b/a-x^2}}^{\sqrt{b/a-x^2}} dy \sqrt{1 + \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}}$$

   A hivatalos megoldás a

$$\int_0^{\sqrt{b/a}} dr \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{\partial \mathbf{r}(r,\phi)}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}(r,\phi)}{\partial \phi} \right|$$

   Itt is a bő többségnél hiányzott a felületelem.
4. Mekkora a paraboloid fluxusa a $\mathbf{F} = (x, y, z)$ vektormezővel? Itt a fenti módosítva:

$$\int_0^{\sqrt{b/a}} dr \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{\partial \mathbf{r}(r,\phi)}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}(r,\phi)}{\partial \phi} \right) \mathbf{F}$$

   Többen próbálkoztak Gauss-Osztrogradszkijjal, amit lehet, csak itt a $\mathrm{div} F = 3$. Persze azzal is megy, mert utána a záró körlapra meg zérus a fluxus.

Fourier-transzformáció

Az általunk használt konvenció a következő:

$$\begin{aligned} X(\omega) =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ x(t) =& \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{1}$$

Az ismert Fourier-transzformáltak a következők ($\alpha > 0$):

$$
\begin{aligned}
f(t) = \exp(-\alpha t)H(t) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha + i\omega} \\
f(t) = \exp(-|\alpha t|) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\
f(t) = \frac{1}{t} \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{i}{2}\mathrm{sgn}(\omega) \\
f(t) = H(t) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\pi\omega} + \delta(\omega)\right) \\
f(t) = \sin(at) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{2i}\left[\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)\right] \\
f(t) = \cos(at) \quad &\rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{2}\left[\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

1. Számoljuk ki a következő függvény Fourier-transzformáltját a konvolúciós szabály használatával!

$$f(t) = e^{\alpha|t|}/t \tag{3}$$

Megoldás:
A konvolúciós képlet:

$$\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')G(\omega - \omega')d\omega' \tag{4}$$

Ahonnét

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{\alpha|t|}/t] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2}\mathrm{sgn}(\omega - \omega')\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega'^2}d\omega' = \\
&= -\int_{\omega}^{\infty} \frac{i}{2}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega'^2}d\omega' + \int_{-\infty}^{\omega} \frac{i}{2}\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega'^2}d\omega' = \\
&= -i\left[\arctan(\omega'/a)\right]_{\omega}^{\infty} + i\left[\arctan(\omega'/a)\right]_{-\infty}^{\omega} = \\
&= 2i\arctan(\omega/a)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. Számoljuk ki a következő függvény Fourier-transzformáltját! Használjuk a skálázási és eltolási szabályokat:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t + \beta t_0} & t > t_0\beta/\alpha \\ 0 & t < t_0\beta/\alpha \end{cases} \tag{6}$$

Megoldás:

$$e^{\alpha t + \beta t_0} = e^{-\alpha(t - t0\beta/\alpha)} \tag{7}$$

Tudván, hogy

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)] \tag{8}$$

Az eredmény

$$F(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0 \beta/\alpha}}{\alpha + i\omega} \tag{9}$$

A fontos, hogy az eltolást jól definiálják!

3. Ha tudjuk, hogy $f(t) = \exp(-t^2/2)$ és $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\omega^2/2)$. Akkor ha $g(t) = f(2t+1)$, mennyi $G(\omega)$?

4. A konvolúciós összefüggés használatával határozzuk meg az alábbi Fourier-transzformáltakat:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin(at)\cos(bt) \\ f_2(t) &= \cos(bt)H(t+\pi/2) \\ f_3(t) &= \sin^2(at)\cos(bt) \end{aligned} \tag{10}$$

Megoldás:

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4i}\left[\delta(\omega'-a) - \delta(\omega'+a)\right]\left[\delta(\omega-\omega'-b) + \delta(\omega-\omega'+b)\right] d\omega' \tag{11}$$

A fenti képletben az első adag Dirac-deltára integrálunk, az elsőből $\omega' = a$, a másodikból $\omega' = -a$:

$$F_1(\omega) = \frac{1}{4i}\left[\delta(\omega-a-b) + \delta(\omega-a+b) - \delta(\omega+a-b) - \delta(\omega+a+b)\right] \tag{12}$$

Ami a végeredmény.

$$\begin{aligned} F_2'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\left[\delta(\omega'-b) + \delta(\omega'+b)\right]\left[\frac{1}{i(\omega-\omega')\pi} + \delta(\omega-\omega')\right] d\omega' = \\ &= \frac{1}{4i(\omega-b)\pi} - \frac{1}{4i(\omega+b)\pi} + \frac{1}{4}\delta(b+a) - \frac{1}{4}\delta(a-b) \end{aligned} \tag{13}$$

A $\pi/2$-es eltolás iss is csak egy $\exp(-i\pi\omega)$ eltolást jelent a fenti eredményhez képest.

Az $f_3(t)$ esetben az $F_1(\omega)$ eredményét kell konvolválni még egy szinusszal. Azonosságok miatt, 6 darab Dirac-delta lesz:

$$\begin{aligned} F_3(\omega) =& \frac{-1}{8}\left[\delta(2a+b-\omega) + \delta(2a-b+\omega) + \delta(-2a+b+\omega) + \delta(2a+b+\omega)\right] + \\ &+ \frac{1}{4}\left[\delta(\omega-b) + \delta(\omega+b)\right] \end{aligned} \tag{14}$$