ez a változat megegyezik az **M 20.4**-ben leírt Gauss-módszerrel, azzal a különbséggel, hogy nincsenek oszlopcserék.

T 20.6 Lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenletrendszer mátrixának és kiegészített mátrixának rangja megegyezik. A megoldás akkor egyértelmű, ha a közös rang az ismeretlenek számával is megegyezik.
Megjegyzés. A megoldhatóság $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}')$ feltétele ellenőrizhető úgy is, hogy az $\mathbf{A}'$ mátrixot a módosított Gauss-módszernek megfelelő sorátalakításokkal a (4) alakra hozzuk.

T 20.7 Homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális – tehát nem azonosan nulla – megoldása, ha a rendszer mátrixának rangja kisebb az ismeretlenek számánál.
Következmény. Az n egyenletből álló n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha az egyenletrendszer determinánsa zérus.

Feladatok

Gauss-módszerrel oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

16.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 17 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 15 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 7x_1 + 14x_2 - 21x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 &= 2 \\ -3x_1 + 5x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 &= -8 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -4 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 + 15x_2 + 10x_3 &= 2 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_5 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_4 - 3x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_5 &= 6 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 &= -1 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

31.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= -2 \\ 12x_1 - 4x_2 - 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

A Gauss-módszer alkalmazásával oldjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket. (Homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának és kiegészített mátrixának rangja mindig megegyezik, és a Gauss-módszernél megengedett elemi mátrixátalakítások közben a kiegészített mátrix utolsó, csupa nullából álló oszlopa nem változik; ezért a számítás közben ez az oszlop elhagyható, akár a közös rang meghatározása, akár a megoldás előállítása a kérdés.)

32.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

33.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer mátrixának a rangja, vagy – ha létezik – determinánsa alapján döntsük el, hogy a következő homogén lineáris egyenletrendszereknek van-e nemtriviális megoldásuk.

36.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 6x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_3 - 7x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

38.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

39. Állítsuk elő az $x^2 - 3x + 5$ polinomot az $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$, $x - 2$ polinomok lineáris kombinációjaként.