Relativitáselmélet feladatok 4.

1. feladat. Tekintsük a $2+1$ dimenziós $(\mathbb{M}, g) \equiv (\mathbb{R}^{2,1}, g)$ Minkowski téridőt! Egy tetszőleges $\xi \in \mathbb{M}$-re $\xi = \xi^a e_a$. (Ismétlődő indexekre automatikusan összegzünk.) (M, g)-n az ívelem négyzet a

$$ds^2 = -d\tau^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 - (d\xi^3)^2 = \eta_{ab} d\xi^a d\xi^a, \quad a, b = 1, 2, 3$$

alakot ölti. Ekkor a

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = -R^2, \qquad \xi^3 \geq R, \qquad R \in \mathbb{R}^+, \qquad R = \text{konstans}$$

egyenlet $\mathbb{R}^{2,1}$-ben egy kétdimenziós felületet, az R "sugarú" kétköpenyű $\mathbb{H}$ hiperboloid felső levelét határozza meg.

1. Tekintsük most a

$$\xi^1(x, y) = \frac{-R^2 + x^2 + y^2}{2y}, \quad \xi^2(x, y) = R\frac{x}{y}, \quad \xi^3(x, y) = \frac{R^2 + x^2 + y^2}{2y}$$

parametrizációt! Mutassuk meg, hogy $-\infty < x < \infty$ és $0 < y < \infty$ görbevonalú koordinátákat ad meg a $\mathbb{H}$ hiperboloidon!

2. Tekintsük most a görbevonalú koordináták által meghatározott

$$\mathbb{U} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$$

felső félsíkot! Számoljuk ki a felső félsík indukált ívelem négyzetét azaz a

$$ds^2{}_{\mathbb{U}} = h_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \qquad (x^1, x^2) \equiv (x, y)$$

mennyiséget, ahol

$$h_{\mu\nu} = \eta_{ab} \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\nu}.$$

2. feladat. Fogjuk fel az

$$L(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = h_{\mu\nu}(x, y) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = T - V$$

mennyiséget mint egy Lagrange függvényt ($V \equiv 0$), ahol az általánosított koordináták $(x(t), y(t))$, és L explicit módon *nem függ* t-től.

Az előző feladat eredményét felhasználva határozzuk meg az Euler-Lagrange egyenleteket! Keressünk megmaradó mennyiségeket! Próbáljuk a mozgásegyenleteket megoldani! Milyen görbéket fognak a megoldásul kapott $(x(t), y(t))$ mennyiségek $\mathbb{U}$-n megadni?