Relativitáselmélet feladatok 1.

1. feladat: Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{L}^\uparrow$ ortokrón Lorentz transzformációk csoportot alkotnak! Megjegyzés: Az $L \in \mathcal{L}^\uparrow$ ortokrón Lorentz transzformációkat reprezentáló $\Lambda^a{}_b, \quad a, b = 1, 2, 3, 4$ mátrixokra teljesül, hogy $\Lambda^4{}_4 \geq 1$ és $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

2. feladat: Ismeretes, hogy u, v időszerű vektorok esetén az $u \cdot v \equiv g(u, v) < 0$ Lorentz invariáns feltételt felhasználhatjuk arra, hogy u, v *azonos időirányításáról* beszélhessünk. Mutassuk meg, hogy ezt a feltételt $u \cdot n \equiv g(u, n) < 0$ alakban egy n nem zérus fényszerű vektor esetén is használhatjuk!

3. feladat: Határozzuk meg az ortokrón Lorentz transzformációt reprezentáló $\Lambda^a{}_b$ hiányzó mátrixelemeit abban az esetben ha ismeretes, hogy

$$\Lambda^4{}_4 = \gamma, \quad \Lambda^4{}_1 = \Lambda^1{}_4 = -\beta\gamma \quad \Lambda^4{}_i = \Lambda^i{}_4 = 0, \quad i = 2, 3.$$

4. feladat: Egy tetszőleges $x \in (\mathbb{M}, g)$ Minkowski téridőbeli vektorra tekintsük az alábbi Hermitikus mátrixot

$$X(x) \equiv \begin{pmatrix} x^4 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^4 - x^3 \end{pmatrix} = X^\dagger(x).$$

Ekkor $\mathrm{Det} X(x) = -x \cdot x = -g(x, x) = -Q(x)$. Hogyan írható fel $g(x, y)$ a megfelelő $X(x)$ és $Y(y)$ mátrixok segítségével? Az eredményt írjuk fel az

$$\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2×2 antiszimmetrikus mátrix segítségével!

5. feladat: Legyen

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} & -i \sinh \frac{\theta}{2} \\ -i \sinh \frac{\theta}{2} & \cosh \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \infty < \theta < \infty.$$

Számítsuk ki az

$$X(\hat{x}) \equiv S X(x) S^\dagger \tag{1}$$

mátrixot! A kapott $\hat{x} \in \mathbb{M}$ vektort írhatjuk-e az $\hat{x}^a = M^a{}_b x^b$ alakba ahol $M^a{}_b$ egy 4×4-es mátrix? Mi az $x \mapsto \hat{x}$ transzformáció fizikai jelentése?