1. gyakorlat (szept. 7.)

1. Spinek összeadásának gyakorlása: $s_1 = 1/2,\ s_2 = 1/2$

   Számítsuk ki a $C(1/2, m_1; 1/2, m_2|1, 1)$, $C(1/2, m_1; 1/2, m_2|1, 0)$, $C(1/2, m_1; 1/2, m_2|1, -1)$ és $C(1/2, m_1; 1/2, m_2|0, 0)$ Clebsh-Gordan együtthatókat!

2. Impulzusmomentum összeadás gyakorlása: $j_1 = 1,\ j_2 = 1$

   Számítsuk ki a $C(1, m_1; 1, m_2|2, 2)$, $C(1, m_1; 1, m_2|2, 1)$, $C(1, m_1; 1, m_2|2, 0)$, $C(1, m_1; 1, m_2|1, 1)$ és $C(1, m_1; 1, m_2|1, 0)$ Clebsh-Gordan együtthatókat!

HF:

Általánosságban adjunk össze egy $j_1 = l,\ j_2 = 1/2$ impulzus momentumot! Határozzuk meg a $C(l, m_1; 1/2, m_2|l + 1/2, M)$ és $C(l, m_1; 1/2, m_2|l - 1/2, M)$ Clebsh-Gordan együtthatókat!

Segítség:

$$J_-^n|l + 1/2, l + 1/2\rangle = (L_- + S_-)^n|l, l\rangle|1/2, 1/2\rangle = L_-^n|l, l\rangle|1/2, 1/2\rangle + nL_-^{n-1}|l, l\rangle|1/2, -1/2\rangle$$

2. gyakorlat (szept. 14.)

1. A He-atom spin szinglett alapállapotában határozzuk meg a kölcsönhatás, $1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ várható értékét! Mindkét elektron hullámfüggvénye megegyezik a H-atom alapállapoti hullámfüggvényével.

2. Mutassuk meg, hogy a He-atomra teljesül $[L_z, 1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|] = 0$, ahol $\mathbf{r}_{1,2}$ az elektronok helyvektora, $L_z = L_{z,1} + L_{z,2}$ a pályamomentumok összegének z komponense.

3. A variációs elvvel megismerkedve határozzuk meg az $x = -a$ és a közötti végtelen potenciálvölgy alapállapoti energiáját a $\Psi_\lambda(x) = a^\lambda - |x|^\lambda$ variációs hullámfüggvénnyel.

HF:

Határozzuk meg a H-atom és a harmonikus oszcillátor alapállapoti energiáját a variációs módszerrel a $\Psi_\beta(r) = \exp(-\beta r)$ illetve a $\Psi_\beta(x) = \exp(-\beta x^2)$ variációs hullámfüggvénnyel!

3. gyakorlat (szept. 21.)

A szórási amplitúdót Born első közelítésében a következőképpen számíthatjuk:

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{qr}} d^3r \ ,$$

ahol $\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$, a nagysága pedig $q = 2k \sin(\vartheta/2)$.

1. Első Born közelítésben határozzuk meg a szórási amplitúdót, a differenciális és a teljes hatáskeresztmetszetet

   a.) Yukawa potenciál esetében:

   $$V(r) = \frac{ke^2}{r} e^{-r/r_0} \ .$$

b.) Véges potenciál lépcső (puha golyó) esetén:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad r > R \\ V_0 & \text{ha} \quad r \leq R \end{cases}$$

HF:

Határozzuk meg a szórási amplitúdót a Gauss potenciál esetére Born első közelítésben:

$$V(r) = V_0 e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} \ .$$

4. gyakorlat (szept. 28.)

1. Tekintsük a következő centrális potenciált:

$$V(r) = \begin{cases} v(r) & \text{ha} \quad r \leq R \\ 0 & \text{ha} \quad r > R \end{cases}$$

   Határozzuk meg a parciális hullámok módszerével a fáziseltolódásokat, ha a gömbön belül ismertnek tételezzük fel a megoldást: $\varphi_{lm}(\mathbf{r}) = f(r)Y_l^m(\vartheta, \varphi)$.

2. Határozzuk meg a fázistolásokat kemény golyó potenciál esetén! Számítsuk ki a teljes hatáskereszt-metszetet az alacsony- és nagyenergiás határesetben!

3. Határozzuk meg a fázistolásokat puha golyó potenciál esetében az $l = 0$ mellékkvantumszámra, melyre a gömbi Bessel- és Neumann-függvények egyszerűek!

HF:

Határozzuk meg a fázistolásokat $V(r) = \gamma\delta(r - R)$ potenciál (Dirac delta héj) esetében!

Segítség:

A radiális Schrödinger egyenlet gömbszimmetrikus potenciál esetén a következő alakú lesz:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(r)\right)\psi(r) = -k^2\psi(r) \ ,$$

ahol $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \quad & \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\gamma\delta(r-R)\right))\psi(r)r^2 dr = 0 \\ = \quad & R^2\left(\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{R+} - \left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{R-}\right) - \frac{2m}{\hbar^2}\gamma R^2\psi(R) = 0 \end{aligned}$$

Vagyis a határ feltétel a radiális hullámfüggvény deriváltjára a következő lesz:

$$\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{R+} - \left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{R-} = \frac{2m}{\hbar^2}\gamma\psi(R)$$

5. gyakorlat (okt. 5.)

1. A Heisenberg-képet használva határozzuk meg a hely és az impulzus operátor időfüggését egy szabad részecske illetve egy harmónikus oszcillátor esetén!
2. Számítsuk ki a különböző időpontokban vett hely és impulzus operatorok összes lehetséges kommutátorát!
3. Tekintsünk egy harmónikus oszcillátor egy térben homogén elektromos térben, amit a $t = 0$ pillanatban kapcsolunk be. A Dirac-képet használva írjuk fel az időfejlesztő operátor egyenletét, majd ennek elsőrendű közelítéséről mutassuk meg, hogy megegyezik az időfüggő perturbáció számításnál találtakkal.

HF:

Határozzuk meg a 3. példában vett rendszer időfejlesztő operátorát az elektromos térben másodrendben!

7. gyakorlat (okt. 19.)

1. Határozzuk meg a hullámfüggvényt egy igen vékony és hosszú szolenoid esetében, amely fluxusa Φ_0.
2. Határozzuk meg az alapállapotú hidrogén atom diamágneses szuszceptibilitását az időfüggetlen perturbáció számítás segítségével. Tételezzük fel, hogy a hidrogén atom energiáját az $E = E_0 + \mathbf{BM}$ alakban kereshetjük. Ezek szerint az energia külső mágneses tér szerinti első deriváltja a mágneses momentum, a második deriváltja pedig a szuszceptibilitás.

HF:

Mekkora lesz egy homogén térbe helyezett harmonikus oszcillátor diamágneses szuszceptibilitása a perturbációszámítás első rendjében és az egzakt megoldás ismeretében?

8. gyakorlat (okt. 26.)

1. Szabad elektronok mozgása homogén mágneses térben: Landau-nívók.
2. Határozzuk meg egy homogén z irányú mágneses térbe helyezett izotróp 3D harmonikus oszcillátor energia nívóit! Dolgozzunk a léptető operátorok felhasználásával!

HF:

Mutassuk meg, hogy $a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y$ felcserélhető $a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x$-szel!

9. gyakorlat (nov. 7.)

1. Oldjuk meg a homogén, z irányú mágneses térben mozgó szabad elektron sajátértékproblémáját az $A = (-By, 0, 0)$ valamint az $A = (0, Bx, 0)$ Landau-mértékeket használva! Milyen (unitér) transzformáció köti össze a két sajátfüggvény rendszert? Mutassuk meg az alapállapotok kapcsolatát a kétféle mértékben.

2. Klein-Gordon egyenlet, valószínűség sűrűség és áramsűrűség.

HF:

Határozzuk meg egy homogén z irányú mágneses térbe és x irányú elektromos térbe helyezett szabad elektron energia nívóit! Dolgozzunk az $A = (0, Bx, 0)$ Landau-mértékben, és alakítsuk teljes négyzetté x-ben a Schrödinger egyenletet!

10. gyakorlat (nov. 9.)

1. Írjuk fel a Klein–Gordon egyenletet szabad részecskére! Határozzuk meg az áramsűrűséget, majd egy V_0 magas potenciál lépcső esetében határozzuk meg a visszaverődési és átmeneti együtthatókat. Diszkutáljuk a különböző V_0 potenciál esetén adódó megoldásokat (Klein paradoxon)!

2. Határozzuk meg a Klein–Gordon egyenlet spektrumát egy z irányú homogén mágneses tér jelenlétében!

HF:

Mutassuk meg, hogy a

$$\Psi(x) = \int \mathrm{d}^4 x \delta \left(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) g(k) \exp(-ikx)$$

hullámfüggvény megoldása a Klein–Gordon egyenletnek tetszőleges komplex $g(k)$ függvényre, k egy tetszőleges négyesvektor, $x = (t, \mathbf{x})$.

11. gyakorlat (nov. 16.)

1. Határozzuk meg a Dirac-féle Hamilton operátor négyzetét!

2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{r} \times \nabla q \phi(\mathbf{r}),$$

   ahol $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, és $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$. Használjuk a relativisztikus Hamilton-operátor

$$H = \beta mc^2 + c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + q\phi$$

   alakját.

3. A stacionárius, $A = \phi = 0$ Dirac-egyenlet megoldásával határozzuk meg a hullámfüggvény spinor komponenseit $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ és mozgó elektron esetén. Mutassuk meg, hogy az utóbbi esetben megmaradó mennyiség a helicitás, $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}$.

HF:

Ami a 3. példából kimaradt.

12. gyakorlat (nov. 23.)

1. Határozzuk meg a hidrogén atom Pauli-Schrödinger egyenletében az $1/c^2$-es tagok járulékát. Számítsuk ki a relativisztikus tömegnövekedés, a spin-pálya kölcsönhatás és a Darwin-tag hatását a perturbáció számítás első rendjében.

HF:

Az eddigi feladatokat átnézni.