

Elektrodinamika 2 gyakorlat

Újsághy Orsolya, Orosz László

July 29, 2016 – December 3, 2016

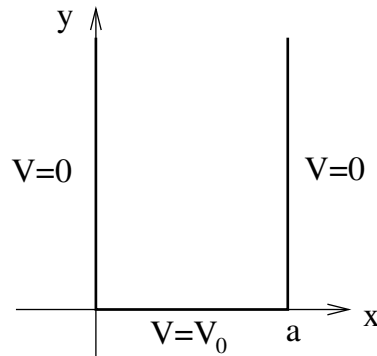
1 gyakorlat

Téma: Laplace egyenlet megoldása Descartes- és gömbi koordinátarendszerben. Határfeltételek.

1.1 feladat

2D-ban félvégtesen téglalap felületén V_0 illetve 0 potenciált rögzítünk az ábrán látható módon. Határozzuk meg a elektromos potenciált és az elektromos térerősséget a téglalap belsejében!

- Írjuk fel a Laplace-egyenletet 2D Descartes koordinátarendszerben! Írjuk fel a megfelelő határfeltételeket!
- Keressük a megoldást szorzat alakban a téglalap belsejében (változók szétválasztása)! Határozzuk meg a faktorokra vonatkozó közönséges másodrendű differenciálegyenleteket!
- Oldjuk meg az egyenleteket! Illesszük a integrációs konstansokat a határfeltételekhez!



1.2 feladat

Tekintsünk egy $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ felületi töltéssűrűségű R sugarú gömbhéjat! Számítsuk ki az elektromos potenciált és elektromos térerősséget a teljes térben!

- Írjuk fel a potenciálra érvényes Laplace-egyenletet és a határfeltételeket!
- Írjuk fel a Laplace egyenlet hengerszimmetrikus esetre érvényes általános megoldását gömbi koordinátarendszerben!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejtési együtthatókat!

1.3 feladat

Tekintsünk egy R sugarú gömbhéjat, amelynek egyik felét V_0 , a másikat $-V_0$ potenciálra hozzuk. Számítsuk ki a teljes térben az elektromos potenciált és térerősséget!

- Írjuk fel a potenciálra érvényes Laplace-egyenletet és a határfeltételeket!
- Írjuk fel a Laplace egyenlet hengerszimmetrikus esetre érvényes általános megoldását gömbi koordinátarendszerben!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejtési együtthatókat!

2 gyakorlat

Téma: Laplace-egyenlet megoldása hengerkoordináta-rendszerben. Határfeltételek. 2D Laplace-egyenlet megoldása polárkoordináta-rendszerben.

2.1 feladat

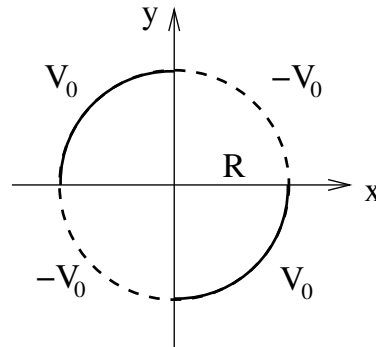
Egy h magasságú, R sugarú, hengeres fémdoboz felső fedőlapjára V_0 , a többi oldalra 0 potenciált adunk. Mekkora lesz az elektromos potenciál a henger belsejében?

- Írjuk fel a potenciálra érvényes Laplace-egyenletet és a határfeltételeket!
- Írjuk fel a Laplace egyenlet hengersizmetrikus esetre érvényes általános megoldását hengerkoordináta-rendszerben!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejtési együtthatókat!

2.2 feladat

Végtelen hosszú, R sugarú hengerpaláston az ábrán látható módon rögzítettük a potenciált. Mekkora az elektromos potenciál a teljes térben?

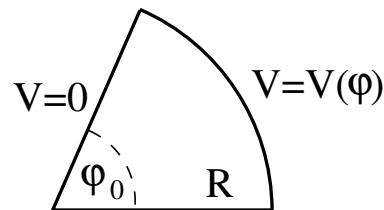
- Írjuk fel a Laplace-egyenletet és a megfelelő határfeltételeket!
- Felhasználva a z irányú eltolási invarianciát adjuk meg az általános megoldást 2D polárkoordináta-rendszerben!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejtési együtthatókat!



2.3 feladat

Tekintsünk egy φ_0 nyílásszögű 2D körszeletet, amelynek határoló sugarain nulla potenciált, a köríven pedig $V(\varphi) = V_0$ potenciált rögzítünk. Mekkora az elektromos potenciál és a térerősség a körszelet belsejében?

- Írjuk fel a Laplace-egyenletet és a megfelelő határfeltételeket!
- Adjuk meg az általános megoldást 2D polárkoordináta-rendszerben!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejtési együtthatókat!



3 gyakorlat

Téma: Laplace egyenlet megoldása hengerkoordináta-rendszerben. Mágneses skalárpotenciál és Laplace egyenlet. Mágneses monopólus.

3.1 feladat

Adott egy h magasságú, R sugarú földelt fémhenger, amelynek a középpontjába egy q töltést helyezünk. Milyen lesz a potenciál a henger belsejében?

- Keressük a megoldást a töltés felett és alatt különböző elektromos potenciálok formájában! Írjuk fel az ezekre vonatkozó egyenleteket és határfeltételeket!
- Adjuk meg az általános megoldást hengerkoordináta-rendszerben!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejtési együtthatókat!

3.2 feladat

Egy R_k sugarú, μ permeabilitású gömbből kivágunk egy R_b sugarú, azonos középpontú gömböt. Erre a rendszerre kívülről B nagyságú homogén mágneses indukciót adunk. Számítsuk ki a mágneses indukciót a belső gömbben (mágneses tér árnyékolása)!

- Írjuk fel a három térrészben a mágneses potenciálra vonatkozó egyenleteket és a határfeltételeket!
- Adjuk meg az általános megoldást gömbi koordinátarendszerben!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejtési együtthatókat!

3.3 feladat

Tekintsünk egy félvégtelen, R sugarú, n menetsűrűségű egyenes szolenoidot, amelyben I áram folyik, és határozzuk meg a mágneses indukciót a szolenoid végétől nagy távolságra! Értelmezzük az eredményt mint "mágneses monopólust", vezessünk le rá differenciálegyenletet! A mágneses monopólussal mutassunk rá a Maxwell-egyenletek elektromos-mágneses szimmetriájára!

- Bontsuk fel a szolenoidot elemi körgyűrűkre! Adjuk meg egy körgyűrű mágneses indukcióját nagy távolságra (mágneses dipól tere)!
- Vezessünk be mágneses skalárpotenciált a nagy távolságú viselkedés leírására!
- Összegezzük fel az elemi körgyűrűk járulékát a mágneses potenciálhoz!
- Számoljuk ki a mágneses indukciót, és mutassuk meg, hogy forrásos! Hogyan módosulnak a Maxwell-egyenletek?
- Elemezzük, hogy az elektromos és mágneses szektor között milyen szimmetria van!

4 gyakorlat

Téma: Mágneses skalárpotenciál alkalmazása. Dielektrikumok és polarizációs töltések

4.1 feladat

Adott egy R sugarú gömb alakú állandó (permanens) mágnes, M homogén mágnesezettséggel. Határozzuk meg a mágneses teret és mágneses indukciót a teljes térben!

- Használjunk mágneses skalárpotenciált! Írjuk fel az arra vonatkozó egyenleteket és határfeltételeket!
- Gömbi koordinátarendszerben adjuk meg az általános megoldást!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejeési együtthatókat!

4.2 feladat

Egy R sugarú, egyenletes σ felületi töltéssűrűséggel töltött gömbhéjat ω szögsebességgel forgatunk. Határozzuk meg a kialakuló mágneses teret és indukciót!

- Írjuk fel a felületi áramsűrűséget!
- Kihhasználva, hogy a csak a gömbhéjon folyik áram, jellemezzük a kialakuló teret mágneses skalárpotenciállal! Írjuk fel a rá vonatkozó egyenleteket és határfeltételeket!
- Gömbi koordinátarendszerben adjuk meg az általános megoldást!
- A határfeltételek segítségével határozzuk meg a kifejeési együtthatókat!

4.3 feladat

Egy R sugarú, ϵ dielektromos állandójú gömbre E_0 nagyságú homogén külső elektromos teret adunk. Mekkora a kialakuló elektromos tér? Mekkora a felületi töltéssűrűség?

- Írjuk fel a potenciálra érvényes Laplace-egyenletet, és a határfeltételeket!
- Ismerjük fel az analógiát a korábban megoldott mágnesezhető gömbbel (l. 3.2 feladat)!
- Adjuk meg a kialakuló elektromos teret, és a felületi (polarizációs) töltéssűrűséget!

5 gyakorlat

Téma: Hullámvezetők.

5.1 feladat

Határozzuk meg egy a és b oldalhosszúságú téglalap keresztmetszetű hullámvezetőben (amelynek falát ideális vezetőnek tekinthetjük) a transzverz elektromos (TE) módusok elektromos és mágneses terét! Adjuk meg a csoport- és fázissebességet!

- Írjuk fel az elektromos és mágneses tér mozgásegyenleteit és a határfeltételeket!
- Oldjuk meg az egyenleteket a TE módusok esetére!
- Határozzuk meg a csoport- és fázissebességeket!

5.2 feladat

Adjuk meg egy R sugarú kör keresztmetszetű hullámvezetőben terjedő transzverz mágneses (TM) módusok elektromos és mágneses terét! Határozzuk meg a Poynting vektort!

- Írjuk fel az elektromos és mágneses tér mozgásegyenleteit és a határfeltételeket!
- Oldjuk meg az egyenleteket polárkoordinátákban a TM módusok esetére!
- Adjuk meg a Poynting vektort!

5.3 feladat

Egy R külső és r belső sugarú koaxiális kábelben vizsgáljuk meg a TEM módusok kialakulásának lehetőségét!

- Határozzuk meg a TEM módusokra vonatkozó differenciálegyenletet!
- Oldjuk meg az egyenleteket!

6 gyakorlat

Téma: Üregrezonátorok, szférikus Bessel-függvények.

6.1 feladat

Írjuk fel egy ideális vezető határolta a , b és c oldalélű téglatest alakú üregben a Maxwell-egyenleteket! Határozzuk meg a TE módusok elektromos és mágneses terét, és adjuk meg a lehetséges módusok frekvenciáját! Mekkora az energiaveszteség, ha az üreg falának véges, de nagy σ nagyságú vezetőképessége van?

6.2 feladat

Adjuk meg egy R sugarú, gömb alakú fém falú üregrezonátor lehetséges sajátfrekvenciáit!

- Írjuk fel az $\mathbf{rB}$ -re illetve $\mathbf{rE}$ -re érvényes Maxwell-egyenleteket! Határozzuk meg a határfeltételeket a TE és TM módusok esetén!
- Oldjuk meg az egyenleteket gömbi koordinátarendszerben (szférikus Bessel-függvények)!
- Határozzuk meg a sajátfrekvenciákat a határfeltételek segítségével!

7 gyakorlat

Téma: Nagyfrekvenciás áramkiszorítás, skin effektus.

7.1 feladat

ω frekvenciájú áram folyik egy R sugarú, henger alakú vezetőben, melynek vezetőképessége σ , permeabilitása μ . Milyen lesz az áram sugárirányú eloszlása?

- Írjuk fel a távíró-egyenletet kvázistacionárius limeszben!
- Oldjuk meg az egyenletet hengerkoordináta-rendszerben!
- Vizsgáljuk meg a δ skin-mélység nagy és kis értékei esetén az árameloszlást!
- Adjuk meg az egy periódus alatt átlagosan leadott teljesítményt!

8 gyakorlat

Téma: Kauzalitás, Kramers-Krönig relációk, elektromágneses hullámok visszaverődése fémfelületen.

8.1 feladat

A kauzális válaszfüggvény tulajdonságaiból vezessük le a Kramers-Krönig relációkat (ismétlés)!
Ha adott egy anyag, amely relatív dielektromos állandójának imaginárius része

$$\text{Im}\varepsilon_r = \lambda [\Theta(\omega - \omega_1) - \Theta(\omega - \omega_2)], \quad \omega_2 > \omega_1 > 0,$$

akkor mekkora lesz a valós része?

8.2 feladat

Tekintsük a harmonikusan kötött elektron modellt (Lorentz-modell).

- Vezessük le a dielektromos állandó képletét!
- Írjuk fel a törésmutató képletét!
- Adjuk meg a vezetőképesség és a dielektromos állandó kapcsolatát a polarizációs áram definíciójából és a távíróegyenlet segítségével!
- Elemezzük a szabad és a csillapított elektrongáz esetét!

8.3 feladat

Számítsuk ki egy fémlapra merőlegesen érkező elektromágneses hullám reflexiós tényezőjét!

- Írjuk fel a beeső, visszavert és átmenő hullám elektromos és mágneses terét!
- Adjuk meg a határfeltételeket!
- Fejezzük ki az egyenletekből a visszavert hullám elektromos térerősségét!
- Adjuk meg a visszavert és a beeső hullám Poynting vektorának arányát (reflexiós tényező)!

9 gyakorlat

Retardálás. Pontszerű dipólus sugrása.

9.1 feladat

Végtelen hosszú egyenes vezetőben $t = 0$ -nál I erősségű áramot indítunk el. Mekkora lesz a kialakuló elektromos és mágneses tér?

- Írjuk fel a vektorpotenciálra vonatkozó retardálási képletet!
- Számítsuk ki az integrálokat!
- Határozzuk meg az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ mennyiségeket!

9.2 feladat

Tekintsünk egy kis méretű, ω frekvenciával rezgő mágneses dipólust! Számítsuk ki a fellépő elektromos és mágneses teret, valamint a kisugárzott teljesítményt!

- Írjuk fel a vektorpotenciál kifejezését!
- Számítsuk ki az elektromos és mágneses teret!
- Mutassunk rá az elektromos és mágneses szektor közötti szimmetriára, és annak alapján számítsuk ki a kisugárzott teljesítményt!

10 gyakorlat

Téma: Hertz-dipólus. Makroszkopikus méretű antennák sugárzása.

10.1 feladat

Két kis méretű vezető gömböt ℓ távolságra helyezünk, és vékony huzallal összekötjük őket. A felső gömbre $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$ töltést teszünk, az alsó gömbre $-q(t)$ töltést. Milyen az így kialakult antenna (*Hertz-dipólus*) sugárzási tere az antennától nagy távolságra?

- Írjuk fel a vektorpotenciált, majd számítsuk ki az elektromos és mágneses teret!
- Mekkora a leadott teljesítmény? Milyen effektív ellenálláson esik ugyanekkora teljesítmény (sugárzási ellenállás)?

Használjuk a Hertz-dipólust antennának, azaz valamilyen bejövő sugárzás felfogására! Ehhez egy áramkört szerkesztünk, amelyben az antenna, mint feszültségforrás szerepel, mellé pedig egy R ellenállást helyezünk.

- Mekkora legyen az R ellenállás, hogy a legnagyobb teljesítmény essen rajta? Mekkora az így levehető teljesítmény?
- Az antenna felfogható úgy, mint a sugárzást teljes egészében elnyelő A_{eff} felületű ernyő. Mekkora a Hertz-dipólushoz tartozó ernyő effektív felülete (effektív apertúrája)?

10.2 feladat

ℓ hosszúságú egyenes antennához középen áramgenerátort kapcsolunk (középen táplált egyenes antenna).

- Határozzuk meg a vektorpotenciált, az elektromos és mágneses teret az antennától nagy távolságra!
- Adjuk meg a teljesítmény szögeloszlását az $\ell \ll \lambda$ nagy hullámhosszú, az $\ell = \lambda/2$ fél hullámhosszú és a $\ell = \lambda$ egész hullámhosszú antennák esetében!