Kiegészítő jegyzet a Cserenkov és az átmeneti sugárzáshoz

Takács Gábor

2013. május 21.

1 Cserenkov sugárzás

1.1 Egyenesvonalú egyenletes mozgást végző ponttöltés terének Fourier komponensei

Vegyünk egy homogén (ϵ, μ) közegben állandó $\vec{v}$ sebességgel mozgó tömegpontot:

$$\rho = q\delta(\vec{x} - \vec{v}t) \qquad \vec{J} = q\vec{v}\delta(\vec{x} - \vec{v}t)$$

A potenciálokra Lorentz mértékben

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \mu\epsilon\partial_t^2\right)\Phi &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \left(\Delta - \mu\epsilon\partial_t^2\right)\vec{A} = -\mu\vec{J} &= -\mu\epsilon\vec{v}\frac{\rho}{\epsilon} \qquad \Rightarrow \vec{A} = \mu\epsilon\vec{v}\Phi\end{aligned}$$

Fourier transzformáció alatt

$$\vec{\nabla} \to i\vec{k} \qquad \partial_t \to -i\omega$$

és

$$\begin{aligned}\rho(\omega, \vec{k}) &= \int d^3x \int dt e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{x}} q\delta(\vec{x} - \vec{v}t) = q\int dt e^{it(\omega - \vec{k}\vec{v})} \\ &= 2\pi q\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})\end{aligned}$$

Innen

$$\left(-k^2 + \mu\epsilon\omega^2\right)\Phi(\omega, \vec{k}) = -\frac{2\pi q}{\epsilon}\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})$$

azaz

$$\Phi(\omega, \vec{k}) = \frac{2\pi q}{\epsilon}\frac{\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{k^2 - \mu\epsilon\omega^2}$$

A térerősségek

$$\begin{aligned}\vec{E}(\omega, \vec{k}) &= -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t\vec{A} = (-i\vec{k} + i\omega\mu\epsilon\vec{v})\Phi \\ &= \frac{2\pi iq}{\epsilon}(\omega\mu\epsilon\vec{v} - \vec{k})\frac{\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{k^2 - \mu\epsilon\omega^2} \\ \vec{B}(\omega, \vec{k}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \mu\epsilon\vec{v}\Phi \\ &= \mu\epsilon\vec{v} \times \vec{E}\end{aligned}$$

Vegyünk fel egy speciális koordinátarendszert

$$\vec{v} = v\vec{e}_z \qquad \vec{x} = x\vec{e}_x \qquad \text{ahol } x > 0 \text{ és } v > 0$$

és térjünk vissza valós $\vec{x}$ térbe. Az elektromos térerősség z irányú komponense

$$E_z(\omega, \vec{x}) = \frac{2\pi iq}{\epsilon}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik_x x}\left(\omega\mu\epsilon v - k_z\right)\frac{\delta(\omega - k_z v)}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \mu\epsilon\omega^2}$$

Bevezetve a

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2}\left(1 - \mu\epsilon v^2\right) = \frac{\omega^2}{v^2}\left(1 - \frac{v^2}{c_n^2}\right)$$

jelölést, ahol c_n a közegbeli fénysebesség és felhasználva, hogy

$$\delta(\omega - k_z v) = \frac{1}{v}\delta(k_z - \omega/v)$$

a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
E_z(\omega, \vec{x}) &= \frac{iq}{4\pi^2\epsilon}\int dk_x dk_y e^{ik_x x}\frac{1}{v}\left(\omega\mu\epsilon v - \frac{\omega}{v}\right)\frac{\delta(\omega - k_z v)}{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \mu\epsilon\omega^2} \\
&= -\frac{iq\lambda^2}{4\pi^2\epsilon\omega}\int dk_x dk_y \frac{e^{ik_x x}}{k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2} \\
&= -\frac{iq\lambda^2}{4\pi\epsilon\omega}\int dk_x \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{k_x^2 + \lambda^2}} \\
&= -\frac{iq\lambda^2}{4\pi\epsilon\omega}\int ds \frac{e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2 + 1}}
\end{aligned}$$

ahol a k_y integráláshoz felhasználtuk a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + a^2} = \left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}$$

formulát és bevezettük az $s = k_x/\lambda$ változót. Hsonlóan meghatározhatók a többi komponensek is, az eredmény:

$$\begin{aligned}
E_x(\omega, \vec{x}) &= -\frac{iq\lambda}{4\pi\epsilon v}\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2 + 1}} \\
E_y(\omega, \vec{x}) &= 0 \\
E_z(\omega, \vec{x}) &= -\frac{iq\lambda^2}{4\pi\epsilon\omega}\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2 + 1}} \\
B_x(\omega, \vec{x}) &= B_z(\omega, \vec{x}) = 0 \\
B_y(\omega, \vec{x}) &= \epsilon\mu v E_x(\omega, \vec{x})
\end{aligned}$$

Az integrálok Bessel-függvényeket adnak, amelyek aszimptotikus viselkedése nagy x-re jól ismert

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2 + 1}} &= 2K_0(\lambda x) = 2e^{-\lambda x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} + O(x^{-3/2})\right) \\
\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{s e^{is\lambda x}}{\sqrt{s^2 + 1}} &= 2iK_1(\lambda x) = 2ie^{-\lambda x}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} + O(x^{-3/2})\right)
\end{aligned}$$

Ezért nagy x-re a következő eredményeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
E_x(\omega, \vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon v}\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{x}}e^{-\lambda x} + \ldots \\
E_z(\omega, \vec{x}) &= -\frac{iv\lambda}{\omega}E_x(\omega, \vec{x}) + \ldots \\
B_y(\omega, \vec{x}) &= \epsilon\mu v E_x(\omega, \vec{x})
\end{aligned}$$

1.2 Sugárzási feltétel és kisugárzott energia

A közegbeli fénysebesség

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{c}{n(\omega)} \\
n(\omega) &= \sqrt{\epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)}
\end{aligned}$$

frekvenciafüggő. Azokon a frekvenciákon, amelyeken

$$v < \frac{c}{n(\omega)}$$

a megoldás exponenciálisan lecseng, mivel λ^2 valós (és λ értékére a megoldás korlátossága miatt csak a $\lambda > 0$ gyök fogadható el). Azokon a frekvenciákon azonban, ahol

$$v > \frac{c}{n(\omega)}$$

λ imaginárius, így a térerősségek a részecske pályájától számított távolság négyzetgyökével arányosan csökkennek, azaz egy hengerhullámot írnak le. A Poynting vektor

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} \\ \Rightarrow \qquad & S_x = -\epsilon v E_z E_x \qquad S_z = \epsilon v^2 E_x^2\end{aligned}$$

A sugárzás a z-tengellyel θ szöget zár be, amire

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{S_x}{S_z} = i\frac{v\lambda}{\omega} = \sqrt{\frac{v^2}{c_n^2} - 1} \\ \Rightarrow \qquad & \cos\theta = \frac{c_n}{v}\end{aligned}$$

ez egy lökéshullám kúpnak felel meg, ami analóg a hangsebességnél gyorsabban mozgó test által a közegben létrehozott Mach-kúppal.

Az egységnyi úton kisugárzott teljesítményt abból kapjuk meg, ha először a kisugárzott teljesítményt egy x sugarú, z tengelyű hengerfelületre kiintegráljuk:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oiint d\vec{f}\cdot\vec{S} = 2\pi x \int dz S_x = -2\pi x \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\mu} B_y E_z$$

Ebből kifejezhetjük az egységnyi útra jutó energiaveszteséget

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dz} &= \frac{d\mathcal{E}}{dt}\frac{dt}{dz} = -2\pi x \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\mu} B_y(t) E_z(t) \\ &= -x \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\mu} B_y(\omega)^* E_z(\omega)\end{aligned}$$

A frekvencia integrált felírhatjuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega = 2\int_0^{\infty} d\omega$$

alakban. A fentiekben kihasználtuk, hogy a térerősségek valóssága miatt az időbeli Fourier transzformáltakra fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\vec{E}(\omega)^* &= \vec{E}(-\omega) \\ \vec{B}(\omega)^* &= \vec{B}(-\omega)\end{aligned}$$

Mivel a sugárzási teljesítményt $x \to \infty$ mellett számoljuk, elég azokra a frekvenciákra integrálni, amelyekre a sugárzási feltétel teljesül. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dz} &= -\frac{q^2}{4\pi}\int_{v>\frac{c}{n(\omega)}} d\omega\omega \frac{\left|1 - \frac{v^2 n^2(\omega)}{c^2}\right|}{v^2\epsilon(\omega)} \\ &= -\frac{q^2}{4\pi}\int_{v>\frac{c}{n(\omega)}} d\omega\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n(\omega)^2}\right)\mu(\omega)\end{aligned}$$

Ez a Frank-Tamm formula.

1.3 A Cserenkov sugárzás spektruma

Az integrál alatti ω faktor miatt a kisugárzott fényt a nagyfrekvenciás komponensek dominálják. A Frank-Tamm integrál azért véges, mert elég nagy frekvencián $n(\omega) < 1$ lesz, ugyanis

$$\mu_r(\omega) \approx 1 \qquad \text{és} \qquad \epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

amennyiben ω nagyobb az anyagra jellemző összes sajátfrekvenciánál, emiatt pedig

$$n(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}$$

Másfelől normál szilárd vagy folyékony anyag sűrűsége tipikusan $1 - 10\, g/cm^3$. Mivel a protonok és neutronok aránya egyhez elég közel van, és egy protonra egy elektron jut, ezért ez azt jelenti, hogy egy ilyen anyagban az elektronsűrűség nagyságrendileg

$$n_e \sim 0.5 \ldots 5\ mol/cm^3 \sim 3 \ldots 30 \times 10^{29} 1/m^3$$

Ebből könnyen megbecsülhető, hogy a plazmafrekvenciára a

$$\omega_p^2 = \frac{n_e q^2}{m_e \epsilon_0}$$

képlet alapján

$$\omega_p = 3 \ldots 10 \times 10^{16}\, Hz$$

adódik, ami

$$\hbar\omega_p = 20 \ldots 60\, eV$$

energiájú fotonoknak felel meg, ez pedig az ultraibolya tartományban fekszik (az ultraibolya fotonok energiatartománya nagyjából $3 \ldots 120\, eV$, közvetlenül ezalatt látható, felette pedig nagyjából $100\, keV$-ig röntgen sugárzásról beszélünk). Mivel az emberi szem csak a látható tartományban érzékeny (az érzékenység maximuma a zöldnél van), ezért a Cserenkov sugárzást derengő kékségnek látjuk.

2 Átmeneti sugárzás

Ez akkor lép fel, amikor egy részecske egy adott közegből egy másikba lép át. Oka, hogy a két közegben a mozgó részecske által keltett elektromágneses mező eltérő. A közeghatár átlépésekor a részecske mezője átrendeződik, eközben egy része leválik és hullámként kisugárzódik. Az átmeneti sugárzás tehát a közeghatár környezetéből ered.

Vegyünk egy részecskét, amely a vákuumból egy másik közegbe lép be (természetesen kilépéskor is hasonló folyamat játszódik le, csak a két közeg szerepét kell megcserélni). Az egyszerűség kedvéért tekintsük azt az esetet, amikor a közeghatáron merőlegesen halad át, és vegyük fel a z tengelyt a részecske mozgása irányába.

2.1 Kvalitatív analízis

Amennyiben a sugárzást az $\vec{x}$ pontban, $r = |\vec{x}|$ távolságból és $\hat{x} = \vec{x}/r$ egységvektor jelezte irányból, figyeljük meg, a közeg $\vec{x}'$ pontból kiinduló sugárzási mező komponenseket az

$$A(\vec{x}')\frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\hat{x}\cdot\vec{x}'}$$

alakban kapjuk, ahol A a közeg polarizációjával arányos az $\vec{x}'$ pontban. A közeg polarizációját a mozgó töltés által keltett $\vec{P}(\vec{x}', t)$ elektromos polarizáció (és $\vec{M}(\vec{x}', t)$ mágnesezettség) írja le, aminek ω frekvenciájú Fourier komponense $\vec{P}(\vec{x}', \omega)$ (illetve $\vec{M}(\vec{x}', \omega)$) arányos a részecske által az $\vec{x}'$ pontban keltett elektromos (mágneses) mező ω frekvenciájú komponensével.

Hengerkoordinátákat bevezetve:

$$\vec{x}' = (\rho' \cos\phi', \rho' \sin\phi', z')$$

kvalitatíve könnyen fel tudjuk írni, hogyan polarizálódik a közeg (ami a $z' > 0$ féltérben van). Egy adott ω körfrekvenciánál a részecske által keltett elektromos térerősségnek csak

$$k_z = \frac{\omega}{v}$$

z irányú hullámszámú komponense van. Így az elektromos tér fázisa

$$e^{i\frac{\omega}{v}z'}$$

nagysága pedig exponenciálisan csökken a tengelytől mért ρ' távolsággal a

$$e^{-\lambda\rho'}$$

faktor szerint, ahol

$$\lambda = \frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\omega}{\gamma v}$$

Emiatt a közeg polarizációja csak a

$$\rho' < \rho'_{max} = \frac{\gamma v}{\omega}$$

tartományban jelentős, azaz a részecske mozgásának tengelyéhez közel. A közeg polarizációja folytán ω frekvenciával rezgő dipólmomentum keletkezik, és az ezáltal kibocsátott sugárzás helyfüggése a fentiek alapján

$$\frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\hat{x}\cdot\vec{x}'} = \frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik(z'\cos\theta+\rho'\sin\theta\cos\phi')}$$

Összeszedve a megjelent fázisokat

$$\begin{aligned} & e^{i\frac{\omega}{v}z'}e^{-i\frac{\omega}{c}n(\omega)z'\cos\theta}e^{-i\frac{\omega}{c}n(\omega)\rho'\sin\theta\cos\phi'} \\ = \quad & e^{-i\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta}-n(\omega)\cos\theta\right)z'}e^{-i\frac{\omega}{c}n(\omega)\rho'\sin\theta\cos\phi'} \end{aligned}$$

A sugárzás csak onnan jöhet, ahol a fázis nem függ jelentősen az $\vec{x}'$ koordinátától, mert különben az egymás közel lévő, emiatt hasonló A amplitúdójú, de eltérő fázisú járulékok kiátlagolják és kioltják egymást. Egyfelől az kell, hogy a $\cos\phi'$ tag együtthatója ne legyen túl nagy:

$$\frac{\omega}{c}n(\omega)\rho'\sin\theta \lesssim 1$$

különben amikor ϕ'-re integrálunk, az integrálási tartomány egyes darabjaiból érkező hullámok kioltják egymást. Vagyis

$$\frac{\omega}{c}n(\omega)\frac{\gamma v}{\omega}\sin\theta \lesssim 1$$

Felhasználva, hogy a törésmutató tipikusan egységnyi nagyságrendű, amennyiben a részecske ultrarelativisztikus ($v \approx c$), akkor a részecske mozgása mentén előre és hátra mutató kis nyílásszögű kúpokba kimenő sugárzást kapunk

$$\sin\theta \lesssim 1/\gamma$$

azaz

$$\theta \lesssim 1/\gamma \qquad \text{vagy} \qquad \pi-\theta \lesssim 1/\gamma$$

Másrészt pedig z' együtthatójából megkapjuk a maximális $d(\omega)$ mélységet, ahonnan az adott frekvenciájú sugárzás érkezik:

$$\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta}-n(\omega)\cos\theta\right)d(\omega) \simeq 1$$

Látni fogjuk, hogy a sugárzás nagy része a röntgen tartományban van, ezért használhatjuk a plazma formulát:

$$n(\omega) = 1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}$$

Alkalmazzuk a szokásos közelítéseket

$$\frac{1}{\beta} = 1+\frac{1}{2\gamma^2}+O(\gamma^{-4}) \qquad \cos\theta \approx 1$$

innen pedig

$$d(\nu) = \frac{2\gamma c/\omega_p}{\nu+\nu^{-1}} \qquad \nu = \frac{\omega}{\gamma\omega_p}$$

Ennek a maximuma $\nu = 1$-nél van:

$$D = d(1) = \frac{\gamma c}{\omega_p}$$

Mivel ω_p tipikus értéke $3\times 10^{16}\,Hz$, ebből

$$\frac{c}{\omega_p} \simeq 10^{-8}m$$

Tipikus ultrarelativisztikus részecskére $10 \lesssim \gamma \lesssim 10^3$ vehető, azaz a maximális forrásmélység nagyságrendileg $0.1\ldots 10\,\mu m$. (Megjegyzés: a levegő sűrűsége kb. ezredrésze a szilárd anyagoknak, így a plazma frekvencia kb. 30-adrésze, a sugárzási mélység pedig 30-szorosa a fentinek).

A forrás térfogata

$$V(\omega) \simeq \pi\rho_{max}(\omega)^2 d(\omega) \simeq 2\pi\gamma\left(\frac{c}{\omega_p}\right)^3\frac{1}{\nu(1+\nu^2)}$$

Ez azt jelenti, hogy az intenzitás $\nu > 1$ esetén rohamosan csökken, vagyis a sugárzás levágási frekvenciája

$$\gamma\omega_p$$

Ultrarelativisztikus részecskére ($\gamma \gg 1$) ez tipikusan röntgen tartományba esik.

A fenti jellemzők az átmeneti sugárzás könnyen megkülönböztethető a Cserenkov sugárzástól, ami egyrészt ultraibolya tartomány felett levág, másrészt tipikusan jóval nagyobb szögű kúpban jön, harmadrészt pedig folyamatosan keletkezik a közeg belsejében is.

Az átmeneti sugárzás jellemzői függnek γ-tól, ezért detektálását lehet részecskeazonosításra használni. Amennyiben pl. B mágneses térben kimért részecske pálya R görbületi sugarából ismerjük a részecske impulzusát, γ mérésével megkaphatjuk a tömegét:

$$p = qBR = \gamma m_0 v$$

Mivel

$$\beta = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} + O(\gamma^{-4})$$

ezért v helyébe ultrarelativisztikus részecske esetén c írható, ahonnan:

$$m_0 = \frac{qBR}{\gamma c}$$

Az egyetlen probléma, hogy a keletkező sugárzás általában kis intenzitású (egyetlen közeghatár átlépésekor általában kisszámú foton keletkezik), így a detektáláshoz több, egyenként pár 10 μm vastagságú (pl. Mylar) fóliát helyeznek egymás mögé, megfelelő hosszúságú légrést hagyva köztük.

2.2 A sugárzás kvantitatív leírása

2.2.1 Általános formalizmus

Tegyük fel, hogy a közeg nem ferromágneses anyag, ekkor tipikusan μ nagyon jó közelítéssel ugyanaz, mint vákuumban, azaz csak a dielektromos állandó változását kell figyelembe vennünk. A határfeltételek:

$$\begin{aligned}
E^{+}_{x,y}(t,x,y,z=0) &= E^{-}_{x,y}(t,x,y,z=0) \\
\epsilon E^{+}_{x,y}(t,x,y,z=0) &= \epsilon_0 E^{-}_{x,y}(t,x,y,z=0) \\
\vec{H}^{+}(t,x,y,z=0) &= \vec{H}^{-}(t,x,y,z=0)
\end{aligned}$$

A két közegben az elektromágneses térerősségeket a forrásból származó inhomogén megoldás és egy általános homogén megoldás kombinációjával kapjuk:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_{inhom} + \vec{E}_{hom} \\
\vec{E}_{inhom} &= \frac{2\pi i q}{\epsilon}(\omega\mu_0\epsilon\vec{v} - \vec{k})\frac{\delta(\omega - k_z v)}{k^2 - \mu_0\epsilon\omega^2}
\end{aligned}$$

ahol

$$k^2 = k_T^2 + k_z^2 \qquad k_T = (k_x, k_y)$$

A határfeltétel minden t, x, y-ra teljesül, ezért ezekben a változókban Fourier-térben is igaz. Ezért csak k_z-ből kell z-re visszatranszformálnunk:

$$\vec{E}(\omega, \vec{k}_T, z) = \int \frac{dk_z}{2\pi}\vec{E}(\omega, \vec{k})e^{ik_z z}$$

A Dirac-delta miatt az integrált triviálisan el tudjuk végezni:

$$\delta(\omega - k_z v) = \frac{1}{v}\delta(k_z - \omega/v)$$

Innen a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_T(\omega, \vec{k}_T, z) &= -\frac{iq\vec{k}_T}{\epsilon v}\frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2} \\
\vec{E}_T(\omega, \vec{k}_T, z) &= -\frac{iq\lambda^2}{\epsilon\omega}\frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2}
\end{aligned}$$

Fel kell írnunk a homogén megoldást is ilyen alakban:

$$\vec{E}_{hom}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\vec{e}E_0(k)e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}2\pi\delta(\omega - kc)\vec{e}E_0(k)e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}$$

azaz

$$\vec{E}_{hom}(\omega, \vec{k}) = 2\pi\delta(\omega - kc)\vec{e}E_0(k)$$

Innen

$$\vec{E}_{hom}(\omega, \vec{k}_T, z) = \int \frac{dk_z}{2\pi} 2\pi\delta(\omega - kc)\vec{e}E_0(\vec{k})e^{ik_z z}$$

Ugyanakkor

$$\delta(\omega - kc) = \frac{k}{c\sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_T^2}} \left[\delta\left(k_z - \sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_T^2}\right) + \delta\left(k_z + \sqrt{\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_T^2}\right)\right]$$

Itt használtuk azt, hogy

$$\delta(f(x)) = \sum_{a:\, f(a)=0} \frac{1}{|f'(a)|}\delta(x - a)$$

Ezért

$$\begin{aligned} \vec{E}_{hom}(\omega, \vec{k}_T, z) &= \vec{e}\frac{kE_0(\vec{k})}{ck_z}e^{\pm ik_z z} \qquad k_z = \sqrt{\epsilon_r\frac{\omega^2}{c^2} - k_T^2} \\ &= \vec{e}\bar{E}_0(\vec{k})e^{\pm ik_z z} \end{aligned}$$

Polarizációs vektorok:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\perp &: \text{ merőleges } \vec{k}_T\text{-re és } \vec{e}_z\text{-re} \\ \vec{e}_\parallel &: \ \vec{k}_T \text{ és } \vec{e}_z \text{ síkjában van} \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \vec{e}_\parallel \ &\propto \ \vec{e}_z \mp \alpha\vec{k}_T \\ & \left(\vec{e}_z \mp \alpha\vec{k}_T\right) \cdot \left(\pm k\vec{e}_z + \vec{k}_T\right) = 0 \\ & \Downarrow \\ & \alpha = \frac{k_z}{k_T^2} \end{aligned}$$

Vagyis

$$\vec{E}_{hom}(\omega, \vec{k}_T, z) = \left\{\bar{E}_\parallel^\pm\left(\vec{e}_z \mp \frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T\right) + \bar{E}_\perp^\pm\vec{e}_\perp\right\}e^{\pm ik_z z}$$

A fizikai határfeltétel az, hogy minden sugárzás a közeghatár közeléből indul, azaz nincs bejövő sugárzás, ezért a $z < 0$ térrészben csak $e^{-ik_z z}$, a $z > 0$ térrészben csak $e^{ik_z z}$ hullám van jelen. Azaz az elektromos térerősség a két féltérben

$$\begin{aligned} \vec{E}^-(\omega, \vec{k}_T, z) &= \left\{\bar{E}_\parallel^-\left(\vec{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T\right) + \bar{E}_\perp^-\vec{e}_\perp\right\}e^{-ik_z z} - \frac{iq}{\epsilon_0 v}\left(\vec{k}_T + \frac{\lambda_0^2 v}{\omega}\vec{e}_z\right)\frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda_0^2} \\ \vec{E}^+(\omega, \vec{k}_T, z) &= \left\{\bar{E}_\parallel^+\left(\vec{e}_z - \frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T\right) + \bar{E}_\perp^+\vec{e}_\perp\right\}e^{-ik_z z} - \frac{iq}{\epsilon v}\left(\vec{k}_T + \frac{\lambda^2 v}{\omega}\vec{e}_z\right)\frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2} \\ \lambda^2 &= \frac{\omega^2}{v^2}\left(1 - \mu_0\epsilon v^2\right) \qquad \lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{v^2}\left(1 - \mu_0\epsilon_0 v^2\right) \end{aligned}$$

Fenn kell állnia a közeghatáron a térerősségekre a határfeltételeknek:

1. $\bar{E}_\perp^- = \bar{E}_\perp^+$ és H folytonossága miatt $\bar{E}_\perp^-/c = \bar{E}_\perp^+/c_n$: ennek megoldása $\bar{E}_\perp^- = \bar{E}_\perp^+ = 0$, azaz nincs merőleges irányú polarizáció (ami a bejövő részecske sebességének irányára merőleges).

2. A bejövő részecske sebességének és a kimenő sugárzás irányának síkjában polarizált ($\parallel$) komponens általános esetben elég bonyolult (a megoldás megtalálható a Landau-Lifshitz VIII. kötetében). Az alábbiakban egy egyszerű esetre bemutatjuk a számolást.

2.2.2 Alkalmazás ideális fémre

Amennyiben ideális fém határfeltételt alkalmazhatunk (ami formálisan $\epsilon \to \infty$-nek felel meg), akkor az elektromos tér nem hatol be a fémbe. Ezért $\vec{E}^+ = 0$, valamint a tangenciális elektromos térerősség folytonossága miatt $\vec{E}^-$ merőleges kell legyen a fém felületre, azaz csak z irányú komponense lehet:

$$\bar{E}_\parallel^-\frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T - \frac{iq}{\epsilon_0 v}\vec{k}_T\frac{1}{k_T^2 + \lambda_0^2} = 0$$

ahonnan

$$\bar{E}_{\parallel}^{-} = \frac{iqk_T^2}{\epsilon_0 v k_z}\frac{1}{k_T^2+\lambda_0^2}$$

Ide beírhatjuk, hogy

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad k_z = \frac{\omega}{c}\cos\theta \qquad k_T = \frac{\omega}{c}\sin\theta$$

így

$$\bar{E}_{\parallel}^{-} = \frac{iq\beta}{\epsilon_0\omega}\frac{\sin\theta\tan\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)}$$

és

$$\vec{E}_{hom}^{-}(\omega,\vec{k}_T,z) = \bar{E}_{\parallel}^{-}\left(\vec{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T\right)e^{-ik_z z}$$

A továbbiakat egyszerűsítendő, vezessük be az

$$A(\omega,\vec{k}_T) = \bar{E}_{\parallel}^{-}\left(\vec{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T\right)$$

jelölést.

A kimenő energia kiszámításához kihasználjuk, hogy ha a teljes térre integráljuk a hullám energiasűrűségét, akkor kétszeres eredményt kapunk (mivel az ideális fémben nincs hullám, viszont a tükörtöltés elv alapján megoldásunk energiasűrűsége ott pontosan annyi, mint kívül), valamint azt, hogy az elektromágneses hullámban időátlagban az elektromos és mágneses energiajárulék megegyezik, így elég az

$$\frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2$$

elektromos energiasűrűség kétszeresét vennünk:

$$2U = \int d^3x\epsilon_0\left|\vec{E}_{hom}^{-}(t,\vec{x})\right|^2$$

Ugyanakkor viszont

$$\begin{aligned}\vec{E}_{hom}^{-}(t,\vec{x}) &= \int\frac{d\omega d^2k_T}{(2\pi)^3}\vec{E}_{hom}^{-}(\omega,\vec{k}_T,z)e^{-i\omega t+i\vec{k}_T\vec{x}} \\ &= \int\frac{d\omega d^2k_T}{(2\pi)^3}A(\omega,\vec{k}_T)e^{-ik_z z}e^{-i\omega t+i\vec{k}_T\vec{x}}\end{aligned}$$

Ezt beírva

$$\begin{aligned}2U &= \epsilon_0\int dzd^2x_T\int\frac{d\omega d^2k_T}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega' d^2k_T'}{(2\pi)^3}e^{-i(k_z-k_z')z}e^{-i(\omega-\omega')t+i(\vec{k}_T-\vec{k}_T')\vec{x}_T}A(\omega,\vec{k}_T)A(\omega',\vec{k}_T')^* \\ &= \epsilon_0\int\frac{d\omega' d\omega d^2k_T}{(2\pi)^4}2\pi\delta\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_T^2}-\sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2}-k_T^2}\right)A(\omega,\vec{k}_T)A(\omega',\vec{k}_T)^*\end{aligned}$$

A δ-függvény megoldásai $\omega' = \pm\omega$, ennek segítségével az ω' integrál elvégezhető. Ismét felhasználva a Dirac-δ-ra vonatkozó változó transzformációs formulát:

$$\delta\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_T^2}-\sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2}-k_T^2}\right) = \left|\frac{\omega/c^2}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_T^2}}\right|^{-1}[\delta(\omega'-\omega)+\delta(\omega'+\omega)]$$

A $\delta(\omega'+\omega)$ tag $e^{-2i\omega t}$ időfüggésre vezet; mivel a hullám szállította energiát időben átlagoljuk, ezt a tagot elhagyjuk. Így azt kapjuk, hogy

$$2U = \epsilon_0\int\frac{d\omega d^2k_T}{(2\pi)^3}c\sqrt{1-\frac{c^2k_T^2}{\omega^2}}\left|A(\omega,\vec{k}_T)\right|^2$$

Következő lépésben a frekvencia integrál $\omega \leftrightarrow -\omega$ szimmetriáját felhasználva, átírjuk

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\omega = 2\int_0^{\infty}d\omega$$

alakba. Továbbá

$$
\begin{aligned}
A(\omega,\vec{k}_T) &= \bar{E}_\parallel^- \left(\vec{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T\right) \\
&\Downarrow \\
\left|A(\omega,\vec{k}_T)\right|^2 &= \left|\bar{E}_\parallel^-\right|^2 \left(\vec{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2}\vec{k}_T\right)^2 = \left|\bar{E}_\parallel^-\right|^2 \left(1+\frac{k_z^2}{k_T^2}\right) \\
&= \left|\bar{E}_\parallel^-\right|^2 \frac{k^2}{k_T^2} = \left|\bar{E}_\parallel^-\right|^2 \frac{\omega^2}{c^2 k_T^2}
\end{aligned}
$$

így azt kapjuk, hogy

$$
2U = \frac{\epsilon_0}{4\pi^3}\int_0^\infty d\omega \int d^2k_T \frac{\omega^2}{ck_T^2}\sqrt{1-\frac{c^2k_T^2}{\omega^2}}\left|\bar{E}_\parallel^-\right|^2
$$

Beírva, hogy

$$
d^2k_T = k_T dk_T d\phi
$$

és mivel

$$
k_T = \frac{\omega}{c}\sin\theta
$$

ezért

$$
\begin{aligned}
d^2k_T &= \frac{\omega^2}{c^2}\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi \\
\frac{\omega^2}{ck_T^2} &= \frac{c}{\sin^2\theta} \\
\sqrt{1-\frac{c^2k_T^2}{\omega^2}} &= \cos\theta
\end{aligned}
$$

azaz

$$
2U = \frac{\epsilon_0}{4\pi^3}\int_0^\infty d\omega \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\omega^2}{c}\left|\bar{E}_\parallel^-\right|^2
$$

Másrészől viszont

$$
2U = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d^2W}{d\omega d\Omega}
$$

ahol

$$
\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{\epsilon_0}{4\pi^3}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\frac{\omega^2}{c}\left|\bar{E}_\parallel^-\right|^2
$$

az egységnyi térszögbe és egységnyi frekvenciaintervallumba kisugárzott energia. Ebből azt kapjuk, hogy

$$
\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{v^2}{\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2}
$$

Ez páros $\theta \to \pi-\theta$-ra, ami annak felel meg, hogy a két féltérben ugyanannyi energiát számoltunk, így a $2U$ kettes faktora elmegy azzal, hogy a θ integrálási tartományát megszorítjuk a $z<0$ féltérre ($\pi/2<\theta<\pi$), mivel ideális fém esetén a másik féltérbe nem megy ki sugárzás. A teljes (fél)térszögre kiintegrálva a kimenő frekvenciaspektrum

$$
\frac{dW}{d\omega} = 2\pi\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\sin\theta\frac{d^2W}{d\omega d\Omega}
$$

Ez egy $t=\tan\frac{\theta}{2}$ helyettesítéssel racionális törtfüggvény integráljára vezethető vissza, amit parciális törtekre bontással kiintegrálhatunk:

$$
\frac{dW}{d\omega} \propto \left(\frac{-2\beta^2-\beta^4-2\log(1-\beta^2)}{\beta^4}\right)
$$

Ultrarelativisztikus határesetben ($\gamma \gg 1$):

$$
\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} \propto \frac{\left(\gamma\tilde{\theta}\right)^2}{\left(1+\gamma^2\tilde{\theta}^2/2\right)^2} \qquad \tilde{\theta} = \pi-\theta
$$

így a maximális intenzitás iránya

$$
\tilde{\theta}_{max} = \frac{\sqrt{2}}{\gamma}
$$

ami konzisztens a korábbi eredményünkkel. A frekvenciaeloszlást pedig ilyenkor a logaritmus dominálja, hiszen β nagyon jó közelítéssel 1:

$$\frac{dW}{d\omega} \propto \log \gamma$$

Ami az eredményben meglepő, hogy nem függ a frekvenciától! Azonban némi gondolkodás után világos, miért nem látszik a korábban tárgyalt levágási frekvencia: ez ugyanis akkor jön ki, ha nagy frekvencián a plazma képletet használjuk a törésmutatóra. Ugyanakkor az $\omega \gg \omega_p$ frekvenciákon, ahol a levágás is található, a fém már átlátszó, vagyis az ideális fém határfeltétel nem alkalmazható, tehát a fenti egyszerűsített számolás ott nem érvényes (részletes analízis található a Landau VIII kötetben, ahol tetszőleges frekvenciafüggő dielektromos állandó mellett számolják ki $\bar{E}_{\parallel}^{-}$-t és ezzel a sugárzás intenzitáseloszlását).

Megjegyzés: a frekvenciaeloszlásnak a látszat ellenére nincs szingularitása kis β-ra, azaz nemrelativisztikus esetben, ugyanis

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

így egyszerű számolással kapható, hogy

$$\frac{dW}{d\omega} \propto \beta^2$$

vagyis nemrelativisztikus részecskékre a sugárzás elhanyagolható. Ezt vártuk is, hiszen a sugárzás az elektromágneses mezőnek a két közegben eltérő terjedési sebessége (azaz a retardálás eltérése) miatt jön létre, de nemrelativisztikus mozgás esetén ennek hatása elhanyagolható: a forrás olyan lassan mozog, hogy a mezőnek van ideje “adiabatikus” módon átrendeződni a közeghatáron, így elhanyagolható a töltésről leszakadó sugárzási rész.